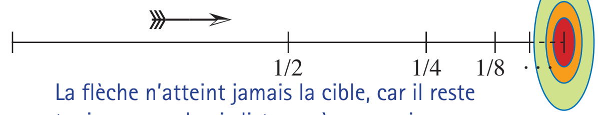
SÉRIES DANS L'HISTOIRE

La série la plus connue est celle à laquelle parvient Zénon d'Élée en développant le paradoxe de la dichotomie. Dans ce paradoxe, Zénon voulait discréditer les enseignements d'Anaxagore selon qui l'étendue est infiniment divisible (NH Zénon01). Pour Zénon, si la distance est infiniment divisible, le mouvement est impossible puisque la somme d'une infinité de grandeurs ne peut jamais être complétée et qu'une telle somme ne peut donner une grandeur finie.

La dichotomie



La flèche n'atteint jamais la cible, car il reste toujours une demi-distance à parcourir.

Cette conviction de Zénon a été endossée par Aristote qui distinguait l'infini potentiel et l'infini en acte. L'infini potentiel est un infini en devenir, jamais réalisé. En additionnant successivement 1 à partir de l'unité, on écrirait tous les nombres, mais c'est un processus sans fin, un infini potentiel. L'infini en acte, ou infini actuel, serait le résultat obtenu en appliquant un processus sans fin, il ne peut donc exister (NH Aristote02).

Zénon a également échafaudé des paradoxes pour critiquer les enseignements des Pythagoriciens qui professaient que le temps et l'espace sont constitués de grains indivisibles, ce qui était le fondement de leur théorie de la commensurabilité (NH Pythagore02). Selon Zénon, le mouvement est impossible si le temps et l'espace sont constitués de grains indivisibles puisqu'une flèche qui occupe une portion d'espace en un instant donné ne peut simultanément occuper une autre portion de l'espace (NH Zénon02, Zénon).

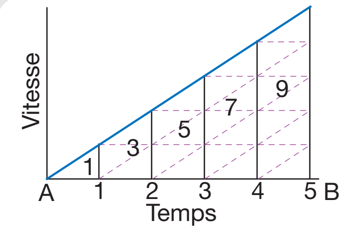
En fait, la célébrité de la série de Zénon ne doit pas faire oublier que les Mésopotamiens déjà, utilisaient les séries pour approximer des grandeurs comme la racine carrée d'un nombre[1]. La méthode qu'ils utilisaient est appelée « algorithme de Babylone ».

À partir de problèmes géométriques, Archimède a utilisé des séries convergentes pour calculer l'aire de surfaces comme celle délimitée par un arc de parabole. Il obtient la série

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots$$

et il montre que cette somme ne peut excéder 4/3 et ne peut être plus petite que 4/3 (NH Archimède05).

Les paradoxes de Zénon ont fait l'objet de discussions durant des siècles dans les cercles philosophiques et dans les cercles mathématiques. D'autres séries ont été étudiées comme la série harmonique dont la divergence a été démontrée par Nicole Oresme (NH Oresme). On doit également à Oresme la première analyse graphique du mouvement uniformément accéléré grâce à laquelle, il parvient au résultat que Galilée obtiendra expérimentalement quelques siècles plus tard. Dans cette étude, la distance parcourue dans un mouvement uniformément accéléré est décrite par une somme finie de termes.

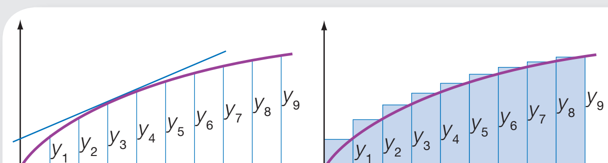


Comme le font voir les triangles, les aires sous la courbe dans les intervalles sont dans les proportions 1, 3, 5, 7, ...

L'avènement du calcul infinitésimal (nom que portait à l'origine ce que nous désignons maintenant par calcul différentiel et calcul intégral) a suscité un très grand intérêt pour les séries auprès des mathématiciens. Cavalieri, Roberval, Fermat, entre autres, ont utilisé les séries pour calculer l'aire sous des courbes. C'est par l'étude des séries de différences et de sommes que Leibniz est parvenu à résoudre le problème que lui avait posé Christiaan Huygens (NH Leibniz03) et a compris le lien entre la dérivation et l'intégration (NH Leibniz04).

Dans une lettre au Marquis de l'Hospital en mars 1695, Leibniz écrit[2, 3] :

> *Reconnaissant cette grande utilité des différences et voyant que par le calcul de M. Descartes l'ordonnée de la courbe peut être exprimée, je vis que trouver les quadratures ou les sommes des ordonnées n'est autre chose que trouver une ordonnée dont la différence est proportionnelle à l'ordonnée donnée. Je reconnus aussi bientôt que trouver les tangentes n'est autre chose que différentier et trouver les quadratures n'est autre chose que sommer, pourvu qu'on suppose les différences incomparablement petites.*



En représentant les termes d'une série par des ordonnées, la somme des ordonnées est une approximation de l'aire sous la courbe et la différence de deux ordonnées successives est approximativement la pente de la tangente.

Depuis, la notion de série a été clairement définie et on a déterminé les critères permettant de savoir si une série converge ou diverge.

1. http://accromath.uqam.ca/2006/07/extraction-dun-racine-dans-un-carre/
2. http://archive.org/stream/leibnizensmathe08leibgoog#page/n477/mode/2up
3. http://archimede.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/oct06/Nombres-polygonaux.pdf