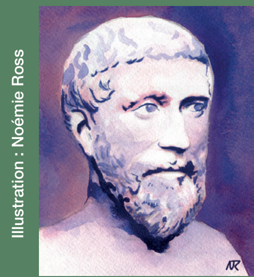
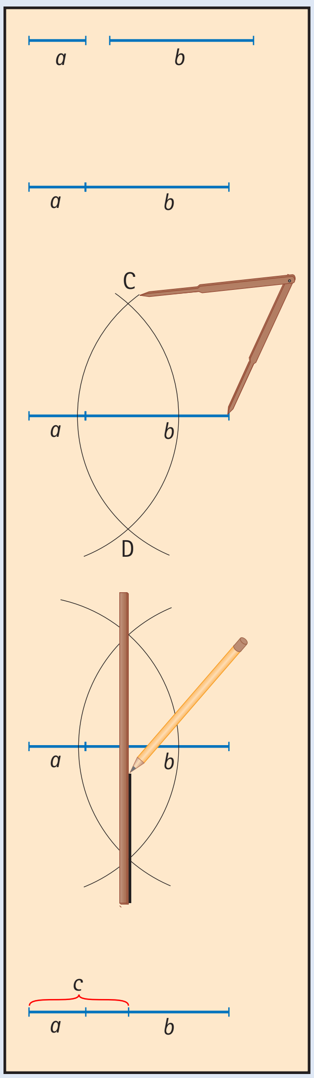


Pythagore
vers –580 à –495

Les médiétés des Pythagoriciens étaient constructibles à la règle et au compas et pour eux cela signifiait que ces grandeurs étaient toutes commensurables.

Médiétés
Constructions géométriques



Médiété arithmétique

Soit deux segments de longueurs a et b respectivement. On construit géométriquement la moyenne arithmétique en procédant de la façon suivante.

On place d'abord les deux segments bout à bout.

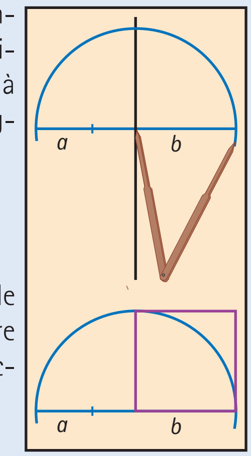
On prend les extrémités du nouveau segment comme centre et avec une ouverture de compas supérieure à la moitié de la longueur $a + b$, on trace des arcs de cercle qui se coupent aux points C et D.

Le segment de droite joignant les points C et D, coupe le segment $a + b$ en son milieu. Ce point milieu divise le segment $a + b$ de telle sorte que :

$$\frac{a-c}{c-b}=1.$$

C'est la médiété arithmétique du segment $a + b$.

En prenant le point milieu comme centre, on trace un demi-cercle dont le rayon est égal à la moitié de la longueur du segment $a + b$.

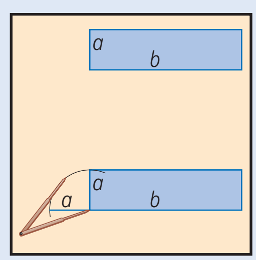


Le rayon du demi-cercle est le côté du carré dont le périmètre est le même que celui du rectangle de côtés a et b.

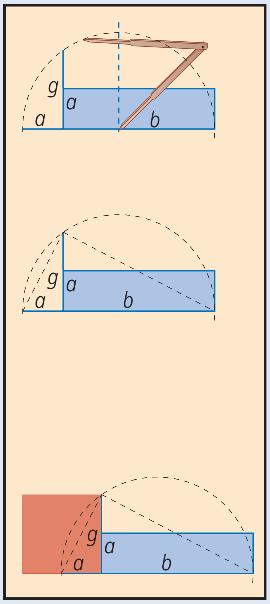
Médiété géométrique

Un problème de quadrature consiste à construire, à la règle et au compas, un carré dont l'aire est la même que celle d'une figure géométrique donnée. Construire la médiété géométrique des côtés a et b d'un rectangle revient à construire un carré dont l'aire est la même que celle du rectangle. On procède de la façon suivante.

Soit un rectangle de côtés a et b.



À l'aide du compas, on reporte les longueurs des deux côtés bout à bout sur une même droite.



On trace le demi-cercle dont le diamètre est de longueur $a + b$ et on élève la perpendiculaire au point de jonction des segments de longueurs a et b.
En joignant le point d'intersection du demi-cercle et de la perpendiculaire, on forme un triangle rectangle dont le diamètre, $a + b$, est l'hypoténuse.
Puisque tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle et que, dans un triangle rectangle la hauteur est la moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse, on a alors :

$$\frac{a}{g} = \frac{g}{b}.$$

d'où l'on obtient :

$$g^2 = ab.$$

C'est donc dire que g est la longueur du côté du carré dont l'aire est égale à celle du rectangle de côtés a et b. En d'autres mots, la longueur g du côté est la racine carrée du produit ab.

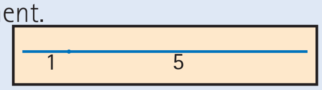
Algébriquement, la construction du carré revient à déterminer g tel que :

$$\frac{a}{g} = \frac{g}{b}.$$

En utilisant ce résultat, on peut construire un segment de droite dont la longueur est la racine carrée de 5. On cherche alors la moyenne géométrique entre 1 et 5. En effet :

$$\frac{1}{g} = \frac{g}{5} \text{ donne } g^2 = 5.$$

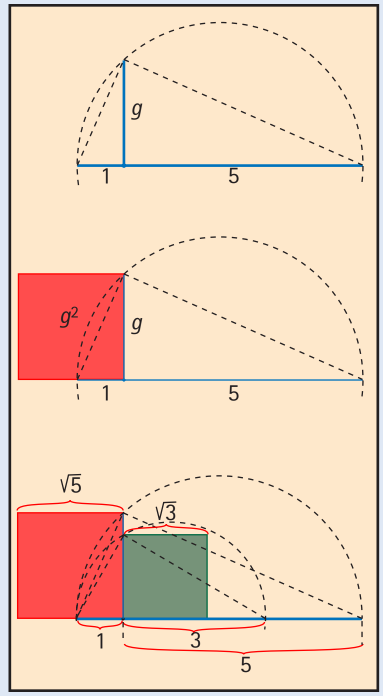
Construisons deux segments de droite bout à bout de longueurs 1 et 5 respectivement.



On peut alors tracer l'arc de cercle dont le segment total est le diamètre et élever la perpendiculaire au point de jonction des segments de longueurs 1 et 5.

La perpendiculaire du point de jonction à la circonférence du cercle est la moyenne proportionnelle cherchée, soit la longueur du côté du carré d'aire 5.

On sait que les racines carrées de 3 et de 5 sont des nombres irrationnels. Cependant, la construction à la règle et au compas de ces grandeurs ne permet pas de conclure à cette irrationnalité et toutes ces grandeurs constructibles à la règle et au compas étaient commensurables pour les Pythagoriciens.



Médiété harmonique

La moyenne harmonique est le rapport de l'aire du carré de côté g sur la moyenne arithmétique des grandeurs a et b,

$$h = \frac{g^2}{c} \text{ d'où } g^2 = hc \text{ et } g = \sqrt{hc}.$$

La moyenne géométrique des grandeurs a et b est également la moyenne géométrique de la moyenne arithmétique de ces deux grandeurs et de leur moyenne harmonique.
Pour construire géométriquement cette moyenne géométrique, on joint le centre du cercle au sommet sur la circonférence du carré dont le côté est la moyenne géométrique. On forme alors le triangle rectangle ABC dont on abaisse la hauteur CH. La figure ci-contre présente également un agrandissement de ce triangle.
Dans ce triangle rectangle, la hauteur CH détermine un triangle ACH semblables au triangle ABC. On a donc :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \text{ d'où } \overline{AC}^2 = \overline{AH} \times \overline{AB}.$$

Soit $g^2 = hc$ et $g = \sqrt{hc}$. Le segment est donc $\overline{AH} = h$ est donc la moyenne harmonique des côtés a et b du rectangle initial.