Équations différentielles

Exercice 01A : Placement

On place un montant de 5 000 $ à un taux continu de 5 %, Déterminer le modèle décrivant le montant accumulé en fonction du temps t.

Solution

Équation différentielle

Puisque l'intérêt est continu, on a un taux relatif constant et l'équation différentielle est

$$\frac{dC/dt}{C} = 0{,}05.$$

Solution de l'équation différentielle

Pour résoudre l'équation, on sépare les variables et on applique l'opérateur d'intégration.

$$\frac{dC}{C} = 0{,}05dt, \text{ d'où } \int \frac{dC}{C} = 0{,}05 \int dt.$$

$$\ln|C| = 0{,}05t + k \text{ qui donne } |C| = e^{0{,}05t+k} = e^k e^{0{,}05t}.$$

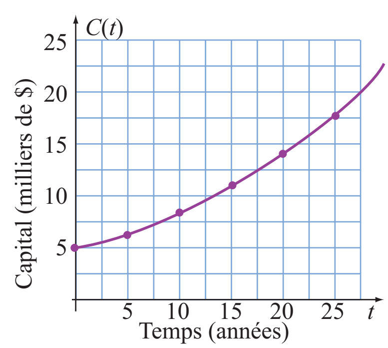
On obtient la solution générale $C = C_0\, e^{0{,}05t}$.

La valeur initiale est de 5000 $, la solution particulière est donc

$$C(t) = 5000\, e^{0{,}05t}.$$

REMARQUE
On peut visualiser l'évolution du capital en représentant graphiquement les valeurs calculées.

Temps t (années)	Capital ($)
0	5 000,00
5	6 420,13
10	8 243,61
15	10 585,00
20	13 591,41
25	17 451,71



Exercice 01B : Utilisation du modèle

Calculer le montant accumulé par intervalle de cinq ans pour les 25 prochaines années si le taux demeure constant.

Solution

Pour déterminer le montant accumulé dans 5 ans, on calcule l'image de 5 par le modèle

$$C(5) = 5\,000\, e^{0{,}05\times 5} = 6\,420{,}127 \ldots$$

Le montant accumulé dans 5 ans est de 6 420,13 $.

On procède de la même façon pour calculer le montant accumulé par intervalles de cinq ans.

Exercice 02A : Dépréciation

Une compagnie achète de nouveaux appareils électroniques au coût de 60 000 $. Le taux de dépréciation annuel relatif de cet équipement est de 20 %. Déterminer le modèle décrivant la valeur de l'équipement en fonction du temps t.

Solution

Équation différentielle

Puisque la dépréciation est continu, on a un taux relatif constant et l'équation différentielle est

$$\frac{dV/dt}{V} = -0{,}2.$$

Solution de l'équation différentielle

Pour résoudre l'équation, on sépare les variables et on applique l'opérateur d'intégration.

$$\frac{dV}{V} = -0{,}2dt, \text{ d'où } \int \frac{dV}{V} = -0{,}2\int dt.$$

$$\ln|V| = -0{,}2t + k \text{ qui donne } |V| = e^{-0{,}2t+k} = e^k e^{-0{,}2t}.$$

On obtient la solution générale $V = V_0\, e^{-0{,}2t}$.

La valeur initiale est de 60 000$, la solution particulière est donc

$$V(t) = 60\,000\, e^{-0{,}2t}$$

Exercice 02B : Utilisation du modèle

Déterminer la valeur de revente dans 1 an.

Temps t (années)	Valeur ($)
0	60 000
1	49 124
2	40 219
3	32 929
4	26 960
5	22 073

Solution

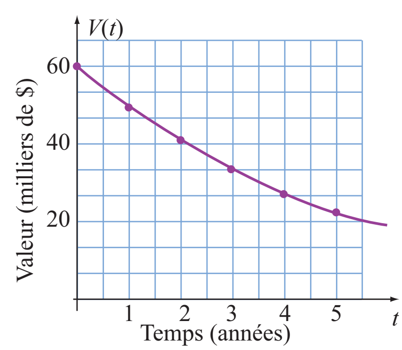
Pour déterminer la valeur de revente dans 1 an, on calcule l'image de 1 par le modèle,

$$V(1) = 60\,000\, e^{-0{,}2\times 1} = 49\,123{,}86$$

La valeur de revente dans 1 an est de 49 123 $.

Exercice 02C : Utilisation du modèle

La politique de la compagnie est de changer les appareils lorsque ceux-ci ont perdu la moitié de leur valeur d'achat. Calculer dans combien de temps la compagnie devrait changer ces appareils.



Solution

On doit déterminer la valeur de t pour laquelle

$$60\,000\, e^{-0{,}2t} = 30\,000.$$

En divisant les deux membres de l'équation par 60 000, on obtient :

$$e^{-0{,}2t} = \frac{1}{2}, \text{ d'où } -0{,}2t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ et } t = \frac{-1}{0{,}2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}47.$$

Il faudra remplacer ces appareils dans trois ans et demi.

Exercice 03A : Pollution

Un déversement accidentel a décimé la population de truites d'un lac. Après avoir récupéré les matières polluantes, le ministère de l'environnement a fait évaluer la population restante. Les chercheurs l'ont estimé à 350 individus alors qu'avant le déversement, elle était de 6 000 individus. On croit que la population augmentera de nouveau proportionnellement à la différence entre la population avant le déversement et la population après le déversement et que la constante de proportionnalité est 0,25.

Écrire cette information à l'aide d'une équation différentielle.

Solution

Équation différentielle

Puisque la croissance de la population est proportionnelle à la différence entre la capacité du milieu et la taille de la population de truites, l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = 0,25(6000 - P).$$

Solution générale de l'équation différentielle

Pour résoudre cette équation, on sépare les variables et on applique l'opérateur d'intégration.

$$\frac{dP}{6\ 000 - P} = 0,25dt, \text{d'où} \int \frac{dP}{6\ 000 - P} = 0,25 \int dt.$$

Pour intégrer le membre de gauche, il faut procéder par changement de variable en posant $u = 6\ 000 - P$, d'où $du = -dP$. On a donc $dP = -du$ On substitue ces expressions dans l'intégrale,

$$-\int \frac{du}{u} = 0,25 \int dt, \text{ d'où } \int \frac{du}{u} = -0,25 \int .$$

On effectue l'intégrale, qui donne

$$\ln|u| = -0,25t + k.$$

En substituant $6000 - P$ à u et en isolant P, on obtient

$$\ln|6000 - P| = -0,25t + k,$$

$$|6000 - P| = e^{-0,25t + k} = e^k e^{-0,25t}$$

$$6000 - P = \pm e^k e^{-0,25t}$$

$$6000 - P = b_0 e^{-0,25t}$$

$$P = 6000 - b_0 e^{-0,25t}$$

La solution générale est donc $P = 6000 - b_0 e^{-0,25t}$.

Solution particulière de l'équation différentielle

Initialement, la population est de 350 truites. En substituant cette valeur dans la solution générale, on a

$$350 = 6\,000 - b_0 e^0, \text{ qui donne } b_0 = 5\,650.$$

La solution particulière est

$$P(t) = 6\,000 - 5\,650e^{-0{,}25t}.$$

Exercice 03B : Utilisation du modèle

Quelle sera la population de truites dans cinq ans ?

Solution

On calcule l'image de 5 par le modèle,

$$P(5) = 6\,000 - 5\,650e^{-0{,}25\times 5} = 4\,381{,}247\ ...$$

Dans cinq ans, la taille de la population de truites devrait être d'environ 4 380 individus.

Exercice 03C : Utilisation du modèle

Déterminer dans combien de temps la population sera de 3 000 truites.

Solution

On égale le modèle 3 000 et on résout l'équation. Pour ce faire, il faut d'abord simplifier,

$$\begin{aligned} 6\,000 - 5\,650e^{-0{,}25t} &= 3\,000 \\ -5\,650e^{-0{,}25t} &= -3\,000 \\ e^{-0{,}25t} &= \frac{-3\,000}{-5\,650} = \frac{60}{113} \end{aligned}$$

On prend le logarithme des deux membres de l'équation,

$$\begin{aligned} \ln\left(e^{-0{,}25t}\right) &= \ln\left(\frac{60}{113}\right) \\ -0{,}25t &= \ln\left(\frac{60}{113}\right) \\ t &= \frac{-1}{0{,}25}\ln\left(\frac{60}{113}\right) = 2{,}532\ ... \end{aligned}$$

On obtient que la taille de la population devrait atteindre 3 000 truites dans environ 2 ans et demi.

Exercice 04A : Propagation

Une maladie contagieuse se propage dans une petite ville. On a déjà recensé 50 cas de cette maladie et le centre de santé considère qu'il pourrait y avoir jusqu'à 400 personnes à risque. De plus, on considère que si aucune mesure n'est prise, le taux de croissance par jour du nombre de personnes affectées est proportionnel au nombre de personnes atteintes et à la proportion de personnes à risque qui n'ont pas encore été infectées. La constante de proportionnalité est de 0,15.

Déterminer le modèle décrivant la population au temps t.

Solution

Équation différentielle

Le nombre de personnes infectées est P et la proportion de personnes à risque non encore infectées est

$$1-\frac{P}{400}$$

Puisque le taux de propagation est proportionnel à ces deux expressions, c'est-à-dire à leur produit, l'équation différentielle est

$$\frac{dP}{dt}=0{,}15P\left(1-\frac{P}{400}\right)=0{,}15P\left(\frac{400-P}{400}\right)$$

Solution générale de l'équation différentielle

Pour résoudre cette équation, on sépare les variables et on modifie le terme de gauche,

$$\frac{400dP}{P(400-P)}=0{,}15dt,\text{ d'où }\frac{dP}{P}+\frac{dP}{400-P}=0{,}15dt.$$

On applique l'opérateur d'intégration.

$$\int\frac{dP}{P}+\int\frac{dP}{400-P}=0{,}15\int dt.$$

La première intégrale du membre de gauche s'effectue directement et on obtient $\ln|P|$. Pour la deuxième intégrale du membre de gauche, il faut procéder par changement de variable en posant $u = 400 - P$, d'où $du = -dP$. On a donc $dP = -du$ On substitue ces expressions dans l'intégrale,

$$\int\frac{dP}{400-P}=-\int\frac{du}{u}$$

ce qui donne $-\ln|u| = -\ln|400 - P|$. On a donc

$$\ln|P| - \ln|400 - P| = 0{,}15t + k.$$

On change le signe des deux membres de l'équation,

$$-\ln|P| + \ln|400 - P| = -0{,}15t - k.$$

On modifie l'expression à l'aide de la règle de la différence de deux logarithmes, puis on exprime l'équation sous forme exponentielle.

$$\ln\left|\frac{400-P}{P}\right|=-0{,}15t-k,$$

$$\frac{400-P}{P}=\pm e^{-k}e^{-15t}$$

$$\frac{400-P}{P}=b_0e^{-15t}.$$

Solution particulière de l’équation différentielle

Au temps 0, on a $P = 50$, on substitue ces valeurs dans l’équation ,

$$\frac{400-50}{50}=b_0e^0\text{, d'où } b_0=\frac{350}{50}=7.$$

En substituant 7 à b_0,

$$\frac{400-P}{P}=7e^{-0,15t}\text{, d'où }\frac{400}{P}-1=7e^{-0,15t}\text{ et }\frac{400}{P}=1+7e^{-0,15t}.$$

En isolant P, on a la solution générale $P(t)=\dfrac{400}{1+7e^{-0,15t}}$.

Exercice 04B : Utilisation du modèle

Déterminer dans combien de temps le nombre de personnes atteintes sera de 150 si aucune mesure n’est prise.

Solution

On cherche la valeur de t dont l’image par le modèle est égale à 150.

Pour résoudre l’équation, il faut d’abord simplifier

$$\frac{400}{1+7e^{-0,15t}}=150\text{, d'où }1+7e^{-0,15t}=\frac{400}{150}=\frac{8}{3},$$

$$7e^{-0,15t}=\frac{5}{3}\text{ et }e^{-0,15t}=\frac{5}{21}.$$

On prend le logarithme des deux membres de l’équation,

$$-0,15t=\ln\left(\frac{5}{21}\right)\text{ et }t=\frac{-1}{0,15}\ln\left(\frac{5}{21}\right)=9,567\ \ldots$$

On obtient que si rien n’est fait, le nombre de personnes atteintes aura triplé en dix jours.

Exercice 04C : Utilisation du modèle

Le centre de santé organise une campagne de vaccination des personnes à risque, mais la mise sur pied de la campagne et la réception des doses de vaccins nécessite quatre jours de délai. Combien y aura-il de personnes atteintes après ces quatre journées ?

Solution

On calcule l’image de 4 par le modèle.

$$P(4)=\frac{400}{1+7e^{-0,15\times 4}}=82,615\ \ldots$$

On obtient que dans quatre jours il y aura environ 83 personnes atteintes.

Exercice 05A : Campagne publicitaire

Une compagnie lance une campagne publicitaire pour mousser les ventes de l'un de ses produits d'utilisation courante. La compagnie estime que le marché potentiel est de 2000 consommateurs et le nombre actuel de clients par semaine est de 100 personnes. On estime que le taux de variation du nombre de consommateurs est proportionnel à la proportion des consommateurs potentiels qui utilisent déjà le produit et à la proportion de ceux qui ne l'utilisent pas. La constante de proportionnalité est 400 et le temps de campagne est mesuré en jours.

Déterminer le modèle décrivant le nombre de clients hebdomadaires au temps t.

Solution

Équation différentielle

La proportion de consommateurs actuels parmi les clients potentiels est $P/2\,000$ et la proportion de clients potentiels qui ne consomment pas le produit est $1 - P/2\,000$.

Puisque le taux de propagation est proportionnel à ces deux expressions, c'est-à-dire à leur produit, l'équation différentielle est

$$\frac{dP}{dt} = 400\,\frac{P}{2\ 000}\left(1 - \frac{P}{2\ 000}\right) = 0{,}2P\left(\frac{2\ 000 - P}{2\ 000}\right)$$

Solution générale de l'équation différentielle

Pour résoudre cette équation, on sépare les variables et on modifie le terme de gauche,

$$\frac{2\ 000dP}{P(2\ 000 - P)} = 0{,}2dt, \text{ d'où } \frac{dP}{P} + \frac{dP}{2\ 000 - P} = 0{,}2dt.$$

On applique l'opérateur d'intégration.

$$\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{2\ 000 - P} = 0{,}2 \int dt.$$

La première intégrale du membre de gauche s'effectue directement et on obtient $\ln|P|$. Pour la deuxième intégrale du membre de gauche, il faut procéder par changement de variable en posant $u = 2\,000 - P$, d'où $du = -dP$. On a donc $dP = -du$ On substitue ces expressions dans l'intégrale,

$$\int \frac{dP}{2\ 000 - P} = -\int \frac{du}{u}.$$

ce qui donne $-\ln|u| = -\ln|2000 - P|$. On a donc

$$\ln|P| - \ln|2000 - P| = 0{,}25t + k.$$

On change le signe des deux membres de l'équation.

$$-\ln|P| + \ln|2000 - P| = -0{,}25t - k.$$

On modifie l'expression à l'aide de la règle de la différence de deux logarithmes, puis on exprime l'équation sous forme exponentielle.

$$\ln\left|\frac{2\ 000-P}{P}\right|=-0,2t-k,$$
$$\frac{2\ 000-P-P}{P}=\pm e^{-k}e^{-2t}$$
$$\frac{2\ 000-P}{P}=b_0e^{-2t}.$$

Solution particulière de l'équation différentielle

Au temps 0, on a $P = 50$, on substitue ces valeurs dans l'équation,

$$\frac{2\ 000-100}{100}=b_0e^0,\text{ d'où } b_0=\frac{1\ 900}{100}=19.$$

En substituant 19 à b_0,

$$\frac{2\ 000-P}{P}=19e^{-0,2t},\text{ d'où }\frac{2\ 000}{P}-1=19e^{-0,2t}\text{ et }\frac{2\ 000}{P}=1+19e^{-0,2t}.$$

En isolant P, on a la solution générale

$$P(t)=\frac{2\ 000}{1+19e^{-0,2t}}.$$

Exercice 05B : Utilisation du modèle

Déterminer combien de temps après le début de la campagne publicitaire la compagnie aura 1 000 clients par semaine.

Solution

On cherche la valeur de t dont l'image par le modèle est égale à 1 000. Pour résoudre l'équation, il faut d'abord simplifier

$$\frac{2\ 000}{1+19e^{-0,2t}}=1\ 000,\text{ d'où } 1+19e^{-0,2t}=\frac{2\ 000}{1\ 000}=2,$$
$$19e^{-0,2t}=1\text{ et } e^{-0,2t}=\frac{1}{19}.$$

On prend le logarithme des deux membres de l'équation,

$$-0,2t=\ln\left(\frac{1}{19}\right)\text{ et } t=\frac{-1}{0,2}\ln\left(\frac{1}{19}\right)=14,722\ \ldots$$

On obtient que la compagnie aura 1 000 clients par semaine après 15 jours de campagne publicitaire.

