Trigonométriques inverses

Exercice 01a: valeurs optimales

Déterminer les valeurs optimales relatives et absolues de la fonction définie par $f(x) = 0{,}2x + \text{Arctan}(5 - x)$ dans l'intervalle [–8; 10].

Solution

Dérivée première

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\big(0{,}2x + \text{Arc}\tan(5-x)\big) = \frac{d}{dx}(0{,}2x) + \frac{d}{dx}\big(\text{Arc}\tan(5-x)\big)$$
$$= 0{,}2 + \frac{1}{1+(5-x)^2}\frac{d}{dx}(5-x) = 0{,}2 + \frac{-1}{1+(5-x)^2}.$$

La dérivée première est donc $f'(x) = 0{,}2 - \dfrac{1}{1+(5-x)^2}$.

Valeurs critiques

$$0{,}2 - \frac{1}{1+(5-x)^2} = 0$$
$$0{,}2 = \frac{1}{1+(5-x)^2}$$
$$1+(5-x)^2 = \frac{1}{0{,}2} = 5$$
$$(5-x)^2 = 4.$$

On obtient donc $5 - x = \pm 2$, d'où $x = 3$ et $x = 7$. Ces deux valeurs sont dans l'intervalle [-8; 10].

Dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(0{,}2 - \frac{1}{1+(5-x)^2}\right) = \frac{d}{dx}(0{,}2) - \frac{d}{dx}\Big(\big(1+(5-x)^2\big)^{-1}\Big)$$
$$= 0 + \big(1+(5-x)^2\big)^{-2}\frac{d}{dx}\big(1+(5-x)^2\big)$$
$$= \big(1+(5-x)^2\big)^{-2} \times 2(5-x) \times -1$$
$$= \frac{2x-10}{\big(1+(5-x)^2\big)^2}.$$

Le dénominateur de la dérivée seconde est toujours positif, seul son numérateur peut changer de signe. En appliquant le test de la dérivée seconde, on trouve que :

$$f'(3) = 0 \text{ et } f''(3) < 0.$$

La fonction a donc un maximum relatif à $x = 3$.

À COMPLÉTER

$$\frac{d}{du}(\text{Arcsin}\,u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{du}(\text{Arccos}\,u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{du}(\text{Arctan}\,u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{du}(\text{Arccot}\,u) = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{du}(\text{Arcsec}\,u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{du}(\text{Arccsc}\,u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

$$f'(7) = 0 \text{ et } f''(7) > 0.$$

La fonction a donc un minimum relatif à $x = 7$.

Pour déterminer si la fonction a un maximum absolu et un minimum absolu, il faut calculer l'image par la fonction des valeurs –8, 3, 7 et 10 et comparer les résultats obtenus.

x	$f(x)$
–8	–0,1060
3	1,7071
7	0,2929
10	0,6266

Conclusion

Dans l'intervalle [–8; 10], la fonction définie par :

$$f(x) = 0{,}2x + \text{Arctan}(5 - x)$$

a un minimum absolu à – 8, un minimum relatif à 7 et un maximum relatif et absolu à 3.

Exercice 01b: équation de la tangente

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction définie par $f(x) = 0{,}2x + \text{Arctan}(5 - x)$ au point d'abscisse 0.

REMARQUE

L'équation d'une droite de pente $f'(a)$ passant par un point de coordonnées $(a; f(a))$ est donnée par

$$y - f(a) = f'(a)\ (x - a).$$

Solution

L'ordonnée du point de tangence est

$$f(0) = 0{,}2\times 0 + \text{Arctan}(5 - 0) = \text{Arctan}\,5 = 1{,}3734\ ...$$

La pente de la tangente en ce point est

$$f'(0) = 0{,}2 - \frac{1}{1+(5-0)^2} = 0{,}2 - \frac{1}{26} = 0{,}1615...$$

L'équation de la tangente est

$$y - 1{,}3734 = 0{,}1615(x - 0), \text{ d'où } y = 0{,}1615x + 1{,}3734.$$

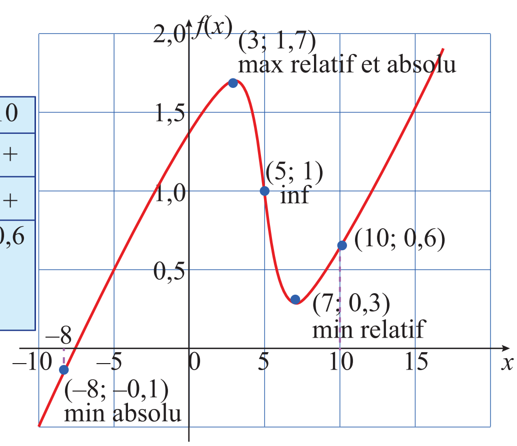
Exercice 01c: représentation graphique

Représenter graphiquement la fonction $f(x) = 0{,}2x + \text{Arctan}(5 - x)$.

Solution

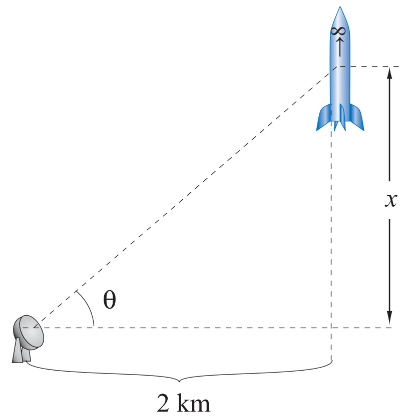
Les valeurs critiques par rapport à la dérivée première sont 3 et 7. Celle de la dérivée seconde est 5 et le domaine est l'ensemble des nombres réels. On regroupe l'information dans un tableau de synthèse.

x	–8		3		5		7	10	10
$f'(x)$	+	+	0	–	–	–	0	+	+
$f''(x)$	–	–	–	–	0	+	+	+	+
$f(x)$	–0,1 min abs	↗	1,7 max rel abs	↘	1 inf	↘	0,3 min rel	↗	0,6



Exercice 02a : taux de variation liés

Un poste de radar doit suivre une fusée téléguidée dont la base de lancement est située à deux kilomètres. La fusée s'élève verticalement à une vitesse de 800 m/s. Déterminer la relation entre le taux de variation de l'angle d'élévation et celui de l'altitude de la fusée.



Solution

L'angle d'élévation θ dépend de la hauteur x de la fusée. On a donc

$$\tan\theta = \frac{x}{2000}, \text{ d'où } \theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2000}\right).$$

En dérivant cette relation, on obtient

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2000}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2000}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2000}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2000}\right)^2} \times \frac{1}{2000}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{2000^2+x^2}{2000^2}} \times \frac{1}{2000}\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{2000}{2000^2+x^2}\frac{dx}{dt}.$$

Le taux de variation de l'angle est décrit en fonction de l'altitude par

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2000}{2000^2+x^2}\frac{dx}{dt}.$$

Exercice 02b : calcul du taux

Déterminer la vitesse à laquelle doit pivoter la caméra pour ne pas perdre la fusée lorsque celle-ci est à une hauteur de 500 m, de 2000 m.

Solution

On calcule le taux de variation de l'angle d'élévation lorsque la fusée est à une altitude de 500 m.

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=500} = \frac{2000 \text{ m}}{(2000^2+500^2)\text{ m}^2} 800 \text{ m/s} = 0{,}3764 \text{rad/s} = 21{,}6\ °/\text{s}.$$

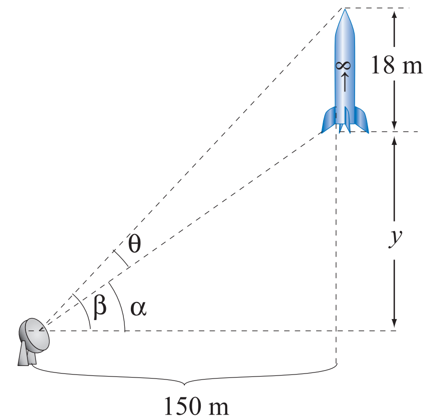
Lorsque la fusée est à une altitude de 500 m, le taux de variation de l'angle d'élévation doit être de 21,6 °/s.

On calcule le taux de variation de l'angle d'élévation lorsque la fusée est à une altitude de 2000 m.

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=2000} = \frac{2000 \text{ m}}{(2000^2+2000^2)\text{ m}^2} 800 \text{ m/s} = 0{,}2 \text{rad/s} = 11{,}5\ °/\text{s}.$$

Lorsque la fusée est à une altitude de 2000 m, le taux de variation de l'angle d'élévation doit être de 11,5 °/s.

Exercice 03a: relation entre les variables



Une fusée de 18 m de longueur s'élève à une vitesse de 300 m/s en suivant une trajectoire verticale. Une caméra installée au sol à 150 m du point de lancement permet de filmer le vol de la fusée. La caméra doit cadrer exactement la fusée pour détecter tout incident en cours de vol. Exprimer l'angle θ en fonction de l'altitude y de la fusée.

Solution

Dans les triangles rectangles on a

$$\tan\alpha = \frac{y}{150}, \text{d'où } \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{y}{150}\right)$$

$$\text{et } \tan\beta = \frac{y+18}{150}, \text{d'où } \beta = \text{Arctan}\left(\frac{y+18}{150}\right).$$

On en tire $\theta = \beta - \alpha = \text{Arctan}\left(\frac{y+18}{150}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{y}{150}\right)$.

Exercice 03b: relation entre les taux de variation

Déterminer la relation entre le taux de variation de l'angle θ et le taux de variation de l'altitude de la fusée.

Solution

En dérivant par rapport à t, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\text{Arctan}\left(\frac{y+18}{150}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{y}{150}\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\text{Arctan}\left(\frac{y+18}{150}\right)\right) - \frac{d}{dt}\left(\text{Arctan}\left(\frac{y}{150}\right)\right) \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{y+18}{150}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y+18}{150}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{150}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{150}\right) \\
&= \frac{1}{\frac{150^2+(y+18)^2}{150^2}} \times \frac{1}{150}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{\frac{150^2+y^2}{150^2}} \times \frac{1}{150}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{150}{150^2+(y+18)^2}\frac{dy}{dt} - \frac{150}{150^2+y^2}\frac{dy}{dt} \\
&= 150\left(\frac{1}{150^2+(y+18)^2} - \frac{1}{150^2+y^2}\right)\frac{dy}{dt}.
\end{aligned}$$

La relation entre les taux de variation est

$$\frac{d\theta}{dt} = 150\left(\frac{1}{150^2+(y+18)^2} - \frac{1}{150^2+y^2}\right)\frac{dy}{dt}.$$

Exercice 03c : calcul du taux de variation

Déterminer le taux de variation de l'angle θ, 1 s après le lancement et 2 s après le lancement.

Solution

Une seconde après le lancement, l'altitude est $y = 300$ m et le taux de variation est :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=300} = 150\left(\frac{1}{150^2+(300+18)^2} - \frac{1}{150^2+300^2}\right)\frac{\text{m}}{\text{m}^2}\times 300\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$= -0{,}035\ 993 \text{ rad/s} = -2{,}06\ °/\text{s}.$$

À 1 s, la fusée est à une altitude de 300 m et l'angle θ diminue d'environ 2,06 °/s.

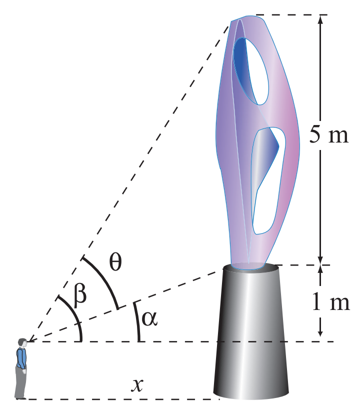
Deux secondes après le lancement, l'altitude est $y = 600$ m et le taux de variation est :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{y=300} = 150\left(\frac{1}{150^2+(600+18)^2} - \frac{1}{150^2+600^2}\right)\frac{\text{m}}{\text{m}^2}\times 300\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$= -0{,}006\ 377 \text{ rad/s} = -0{,}36\ °/\text{s}.$$

À 2 s, la fusée est à une altitude de 600 m, l'angle θ diminue d'environ 0,36 °/s.

Exercice 04a : relation entre les variables

Un amateur de sculpture en admire une posée sur un socle. Le pied de la sculpture est à 1 m au-dessus de l'œil de ce passionné et la sculpture fait 5 m de hauteur. Exprimer l'angle θ en fonction de x, la distance entre l'observateur et le socle.



Solution

Dans les triangles rectangles, on a

$$\cot\alpha = \frac{x}{1}, \text{d'où } \alpha = \text{Arccot}(x) \text{ et } \cot\beta = \frac{x}{6}, \text{d'où } \beta = \text{Arccot}\left(\frac{x}{6}\right).$$

On en tire $\theta = \beta - \alpha = \text{Arccot}\left(\dfrac{x}{6}\right) - \text{Arccot}(x).$

Exercice 04b : relation entre les taux de variation

Déterminer la distance à laquelle l'amateur doit se tenir pour que l'angle de visée soit maximal.

Solution

Dérivée première

En dérivant par rapport à x, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\text{Arccot}\left(\frac{x}{6}\right)-\text{Arccot}(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\text{Arccot}\left(\frac{x}{6}\right)\right)-\frac{d}{dx}(\text{Arccot}(x))$$
$$=\frac{-1}{1+\left(\frac{x}{6}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{6}\right)-\frac{-1}{1+x^2}=\frac{-1}{\frac{6^2+x^2}{6^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{6}\right)+\frac{1}{1+x^2}\frac{dx}{dx}$$
$$=\frac{-6^2}{6^2+x^2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{-6}{6^2+x^2}+\frac{1}{1+x^2}.$$

Valeurs critiques

La dérivée s'annule lorsque $\frac{-6}{6^2+x^2}+\frac{1}{1+x^2}=0$, d'où $\frac{6}{6^2+x^2}=\frac{1}{1+x^2}$.

On en tire $6(1 + x^2) = 36 + 6x^2$ et $6 + x^2 = 36 + 6x^2$ qui donne $5x^2 = 30$ et $x^2 = 6$ ou $x = \pm\sqrt{6}$.

Dérivée seconde et test

La dérivée seconde est :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{-6}{6^2+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{-6}{6^2+x^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$=-6\frac{d}{dx}\left(\left(6^2+x^2\right)^{-1}\right)+\frac{d}{dx}\left(\left(1+x^2\right)^{-1}\right)$$
$$=-6\times-1\left(6^2+x^2\right)^{-2}\frac{d}{dx}\left(6^2+x^2\right)+-1\left(1+x^2\right)^{-2}\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)$$
$$=\frac{6}{\left(6^2+x^2\right)^2}\frac{d}{dx}\left(6^2+x^2\right)-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\frac{d}{dx}\left(1+x^2\right)$$
$$=\frac{6}{\left(6^2+x^2\right)^2}\times 2x-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\times 2x=\frac{12x}{\left(6^2+x^2\right)^2}-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Soit $\theta''(x)=\frac{12x}{\left(6^2+x^2\right)^2}-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

En évaluant la dérivée seconde à $x = \sqrt{6}$ m, on trouve :

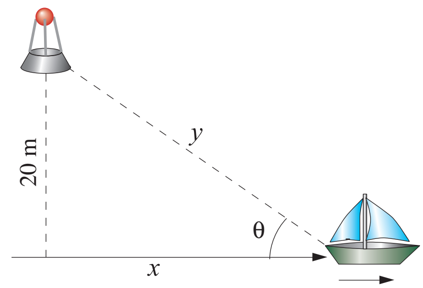
$$\theta''(\sqrt{6})=\frac{12\sqrt{6}}{\left(6^2+6\right)^2}-\frac{2\sqrt{6}}{(1+6)^2}=-0{,}0833<0.$$

Puisque $\theta'(\sqrt{6})=0$ et $\theta''(\sqrt{6})<0$, la tangente est horizontale à $x=\sqrt{6}$ et la courbe est concave vers le bas. L'angle atteint donc sa valeur maximale lorsque l'observateur est à $\sqrt{6}$ m du socle de la sculpture. À ce moment, l'angle de vision est de :

$$\theta(\sqrt{6})=\text{Arccot}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)-\text{Arccot}\left(\sqrt{6}\right)=0{,}795\text{ rad, soit }45{,}6°.$$

Exercice 05a : relation entre les variables

Un bateau qui navigue en ligne droite à une vitesse de 15 m/min, vient de passer une bouée située à 20 m de sa trajectoire. Déterminer la relation entre l'angle de visée de la bouée et la distance du bateau à la bouée.



Solution

Les variables sont l'angle de visée et la distance du bateau à la bouée. Le triangle rectangle donne les relations $y^2 = x^2 + 20^2$ d'où $y = \sqrt{x^2+400}$ et

$$\csc\theta = \frac{y}{20}, \text{d'où } \theta = \text{Arccsc}\left(\frac{y}{20}\right).$$

Par substitution, on obtient :

$$\theta = \text{Arccsc}\left(\frac{y}{20}\right) = \text{Arccsc}\left(\frac{\sqrt{x^2+400}}{20}\right).$$

Exercice 05b : relation entre les taux de variation

Déterminer la relation entre les taux de variation.

Solution

En dérivant la relation précédente par rapport au temps t, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\text{Arccsc}\left(\frac{\sqrt{x^2+400}}{20}\right)\right)\\
&= \frac{-1}{\dfrac{\sqrt{x^2+400}}{20}\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{x^2+400}}{20}\right)^2-1}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{x^2+400}}{20}\right)\\
&= \frac{-1}{\dfrac{\sqrt{x^2+400}}{20}\sqrt{\left(\dfrac{x^2+400}{400}-1\right)}} \times \frac{1}{20}\frac{d}{dt}\left((x^2+400)^{1/2}\right)\\
&= \frac{-1}{\sqrt{x^2+400}\sqrt{\left(\dfrac{x^2+400-400}{400}\right)}} \times \frac{1}{2}(x^2+400)^{-1/2}\,\frac{d}{dt}(x^2+400)\\
&= \frac{-1}{\sqrt{x^2+400}\sqrt{\dfrac{x^2}{400}}} \times \frac{1}{2}(x^2+400)^{-1/2} \times 2x\frac{dx}{dt}\\
&= \frac{-1}{\sqrt{x^2+400}\times\dfrac{x}{20}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+400}}\,\frac{dx}{dt} = \frac{-20}{x^2+400}\,\frac{dx}{dt}.
\end{aligned}$$

La relation entre les taux de variation est donc :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-20}{x^2+400}\frac{dx}{dt}.$$

Exercice 05c : calcul du taux

Calculer le taux de variation de l'angle de visée une minute après que le bateau a passé la bouée.

Solution

Une minute après avoir passé la bouée, le bateau a franchi une distance de 15 m en suivant sa trajectoire. En substituant cette valeur à x et celle de la vitesse du bateau à dx/dt, on obtient :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=15} = \frac{-20}{15^2+40}\times 15 = \frac{-300}{625}$$
$$= -0,48 \text{ rad/min} = -27,50 \text{ °/min}.$$

Après une minute, l'angle de visée de la bouée dimineu de 27,50 °/min.

Exercice 05d : calcul du taux

Calculer le taux de variation de l'angle de visée une minute et 20 secondes après que le bateau a passé la bouée.

Solution

Une minute et 20 secondes après avoir passé la bouée, le bateau a franchi une distance de 20 m en suivant sa trajectoire. En substituant cette valeur à x et celle de la vitesse du bateau à dx/dt, on obtient :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=20} = \frac{-20}{20^2+400}\times 15 = \frac{-300}{800}$$
$$= -0,375 \text{ rad/min} = -21,49 \text{ °/min}.$$

Après une minute et 20, l'angle de visée diminue de 21,49 ° /min

REMARQUE

Le taux de variation est négatif car l'angle de visée diminue à mesure que le bateau s'éloigne.

Exercice 05e : calcul du taux

Calculer le taux de variation de l'angle de visée deux minutes après que le bateau a passé la bouée.

Solution

Deux minutes après avoir passé la bouée, le bateau a franchi une distance de 30 m en suivant sa trajectoire. En substituant cette valeur à x et celle de la vitesse du bateau à dx/dt, on obtient :

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=30} = \frac{-20}{30^2+400}\times 15 = \frac{-300}{1\,300}$$
$$= -0,231 \text{ rad/min} = -13,22 \text{ °/min}.$$

Après deux minutes, l'angle de visée diminue de 13,22 °/min.