
Illustration : Alain Ross

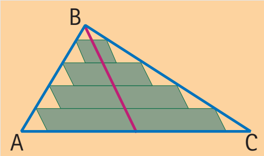
Simon Stevin
1548-1620

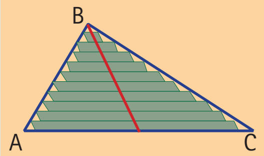
Pour résoudre des problèmes relatifs au centre de masse d'un triangle et à la pression exercée sur un barrage, Simon Stevin a utilisé des démarches qui font partie des raisonnements fondamentaux du calcul intégral.

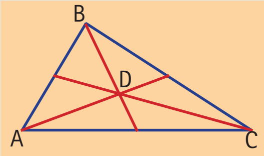
Simon Stevin

Stevin a démontré, dans un ouvrage intitulé *Statique* et publié en 1586, que le centre de gravité d'un triangle est sur les médianes du triangle. Pour ce faire, il pave un triangle quelconque de parallélogrammes inscrits ayant tous la même hauteur et dont deux des côtés sont parallèles à une médiane du triangle.

Selon un résultat d'Archimède sur les figures ayant une symétrie bilatérale, le centre de gravité de chacun de ces parallélogrammes est sur une médiane du triangle, puisque cette droite passe par le milieu des côtés opposés de chacun des parallélogrammes. Si on augmente le nombre de parallélogrammes inscrits, on diminue la différence entre le triangle et les figures inscrites. Cette différence peut être rendue aussi petite que l'on veut. Le centre de gravité du triangle est donc sur cette médiane. En procédant de la même manière, il obtient que le centre de gravité est sur chacune des médianes et se situe donc au point de rencontre de celles-ci. Rappelons que le point de rencontre des médianes d'un triangle est aux deux tiers de la médiane à partir du sommet.

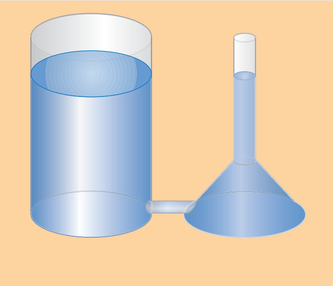






Hydrostatique

Stevin s'est intéressé à l'hydrostatique et a redécouvert le principe des vases communicants. Il a étudié la force qu'exerce un liquide sur une surface. Cette force est le produit de la pression en un point par l'aire de la surface. Or, la pression en un point ne dépend que de la hauteur et de la nature du liquide. Elle est indépendante de la forme du contenant. Ce résultat, contraire à l'intuition et que l'on désigne par *paradoxe hydrostatique*, est à la base du fonctionnement des presses hydrauliques.

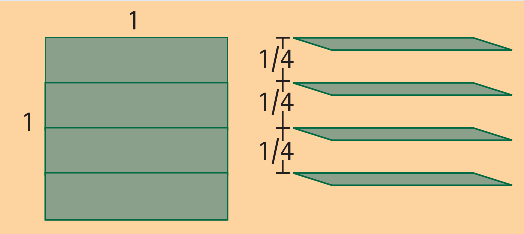


La pression sur le fond est la même dans chacun des contenants.

Force exercée sur un barrage

Le problème du calcul de la force exercée par l'eau sur un barrage a rendu Stevin célèbre.

Pour déterminer cette force, il imagine que le barrage est un carré unitaire divisé en bandes horizontales de même dimension, et compare cette force à celle exercée sur un carré unitaire immer-

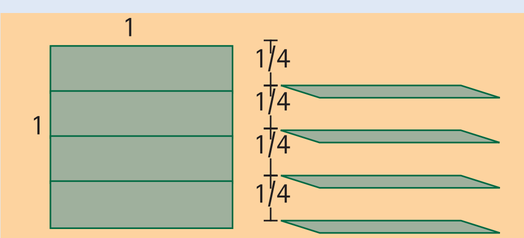


gé horizontalement à une profondeur unitaire (disons, en unités modernes, un carré de 1 m par 1 m immergé horizontalement à une profondeur de 1 m). Il étudie d'abord le problème en divisant son barrage en quatre bandes. Il considère que chacune des bandes subit une rotation de 90° autour de sa partie supérieure.

La bande du haut est alors à la surface de l'eau et ne subit aucune pression. L'aire de la seconde bande est $1 \times 1/4$ et la colonne de liquide qui la surplombe est le quart de celle sur le carré unitaire immergé horizontalement. Puisque la pression est proportionnelle à la hauteur du liquide, la force exercée sur cette bande est $1 \times 1/4 \times 1/4$. L'aire de la troisième bande est $1 \times 1/4$ et elle est à une profondeur de 2/4. La force exercée est $1 \times 1/4 \times 2/4$. La quatrième bande est à une profondeur de 3/4 et la force exercée est $1 \times 1/4 \times 3/4$. La force totale exercée est alors $6/4^2$.

$$\frac{0}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^2}=\frac{1}{4^2}(0+1+2+3)=\frac{6}{4^2}$$

Stevin imagine ensuite que chacune des bandes subit une rotation de 90° autour de sa partie inférieure.



Il détermine que la force exercée sur les bandes est alors $10/4^2$. Stevin obtient donc une borne inférieure et une borne supérieure de la force exercée sur le barrage comparée à celle du carré unitaire immergé.

$$\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^2}+\frac{4}{4^2}=\frac{1}{4^2}(1+2+3+4)=\frac{10}{4^2}$$

À la limite

Il généralise ce résultat en considérant que le barrage est divisé en n bandes et il détermine à nouveau la borne inférieure et la borne supérieure en imaginant des rotations par rapport à la partie supérieure et par rapport à la partie inférieure.

La limite de chacune de ces sommes lorsqu'on augmente le nombre de bandes, soit lorsque n tend vers l'infini, est égale à 1/2.

Borne inférieure

$$\begin{aligned}\frac{0}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}&=\frac{1}{n^2}(0+1+2+\cdots+(n-1))\\&=\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n-1)}{2}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Borne supérieure

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}&=\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)\\&=\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

En conclusion, la force exercée par l'eau sur un carré unitaire en position verticale et dont l'un des côtés est à fleur d'eau est la moitié de celle exercée sur un carré unitaire en position horizontale et immergé à une profondeur unitaire. Il existe sans doute très peu de barrages dont la surface est un carré unitaire. Stevin obtient cependant, à partir de cette représentation simplifiée, un résultat qui est un premier pas dans le développement d'une méthode générale.

On peut reconnaître dans la démarche de Stevin certaines caractéristiques essentielles du calcul intégral, et ce, en 1586, cent ans avant les travaux de Newton et de Leibniz. Sa démarche lui permet de déterminer une borne inférieure et une borne supérieure de la pression exercée et de considérer le passage à la limite. C'est ce que l'on fait en calculant l'aire sous une courbe en considérant des rectangles inscrits et des rectangles circonscrits.