Algèbre de Boole

L'algèbre de Boole, du nom de son inventeur George Boole, est une algèbre dans laquelle les variables n'ont que deux valeurs possibles, appelées **valeurs de vérité**.

Proposition

Boole01

Une proposition, qu'on appelle également **énoncé booléen**, est un énoncé dont on peut décider s'il est vrai ou faux. Pour des énoncés simples, cela ne présente aucune difficulté. Pour un énoncé complexe, formé en combinant plusieurs énoncés simples, la valeur de vérité dépend à la fois des énoncés simples et des opérateurs logiques reliant ces énoncés.

Proposition

Une **proposition** (ou **énoncé booléen**) est un énoncé dont on peut décider de la valeur de vérité. Les valeurs de vérité possibles sont « vrai » (représenté par V ou 1) et « faux » (représenté par F ou 0).

REMARQUE
Dans la logique des propositions, il est d'usage de représenter la valeur de vérité par le chiffre 1 pour un énoncé vrai et par le chiffre 0 pour un énoncé faux.

Opérateurs booléens

Boole02

Un énoncé booléen peut être composé de plusieurs énoncés simples reliés par des **opérateurs booléens** (on les appelle également **connecteurs** ou **opérateurs connectifs**). La valeur de vérité d'un énoncé composé dépend à la fois des valeurs de vérité des énoncés simples qui le composent et des opérateurs reliant ces énoncés simples. Les trois opérateurs de base sont la négation, la disjonction et la conjonction. Pour simplifier l'étude de ces opérateurs, nous utiliserons les lettres minuscules p, q et r pour représenter des énoncés booléens.

Négation

Soit p un énoncé booléen (ou proposition). La **négation** de p, notée $\neg p$ et qui se lit « non p », est également un énoncé booléen qui est vrai lorsque p est faux et qui est faux lorsque p est vrai. La **table de vérité** de la négation est donnée ci-contre.

p	$\neg p$
0	1
1	0

D'autres symboles sont parfois utilisés pour noter la négation; ce sont p', $\sim p$ et non p.

Conjonction

Soit p et q deux propositions. La proposition composée notée $p \wedge q$, qui se lit « p et q », est vraie si les deux propositions p et q sont vraies et elle est fausse dans les autres cas. Cette proposition composée est appelée la **conjonction** de p et q. La table de vérité de la conjonction est donnée ci-contre.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

REMARQUE
Les premières colonnes sont réservées aux valeurs de vérité des propositions p et q et la dernière colonne à celles de la composée $p \wedge q$.

Disjonction

Soit p et q deux propositions. La proposition composée notée $p \vee q$, qui se lit « p ou q », est vraie si au moins l'une des deux propositions p et q est vraie et elle est fausse lorsque les deux sont fausses. Cette proposition composée est appelée la **disjonction** de p et q. La table de vérité de la disjonction est donnée ci-contre.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Disjonction exclusive

Soit p et q deux propositions. La proposition composée notée $p \oplus q$, qui se lit « p ou exclusif q », est vraie si une seule des deux propositions simples est vraie et elle est fausse dans les autres cas. Cette proposition composée est appelée la **disjonction exclusive** de p et q. La table de vérité de la disjonction exclusive est donnée ci-contre.

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Conditionnelle

Soit p et q deux propositions. La proposition composée notée $p \to q$, qui se lit « si p alors q », est fausse lorsque la proposition p est vraie et que la proposition q est fausse et elle est vraie dans tous les autres cas. Cette proposition composée est appelée une **conditionnelle**. La table de vérité de la conditionnelle est donnée ci-contre.

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Dans une conditionnelle, $p \to q$, la proposition p est appelée **hypothèse** (ou **antécédent** ou **prémisse**) et la proposition q est appelée **conclusion** (ou **conséquent**). Pour traduire en français une proposition conditionnelle, on dit « si p alors q ».

Dans le langage courant, on ne s'intéresse pas à la conditionnelle lorsque l'hypothèse est fausse. En mathématiques et en informatique, on s'y intéresse et on lui assigne une valeur de vérité même lorsque l'hypothèse est fausse. Cependant, il faut distinguer la valeur de vérité de la conditionnelle comme lien logique et la valeur de vérité de la conclusion. Dire que la conditionnelle est vraie ne signifie pas que la conclusion est vraie, cela signifie que le lien logique est vrai. Cependant, si l'antécédent est vrai et le lien logique est vrai, la conclusion est nécessairement vraie.

Considérons, par exemple, la proposition conditionnelle suivante :

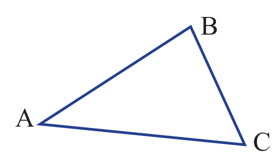
Si un triangle est rectangle, alors la somme des carrés des côtés de son angle droit est égale au carré de son hypoténuse.

Considérons le triangle ABC ci-contre. Ce triangle n'est pas rectangle. Il ne satisfait donc pas à l'hypothèse de la conditionnelle et la conclusion est fausse dans ce cas. Cependant, la conditionnelle reste vraie. Lorsque l'antécédent de la conditionnelle est faux, la conditionnelle est vraie peu importe la valeur de vérité de la conclusion. Cependant, si l'antécédent est vrai, il faut que la conclusion soit vraie pour que la conditionnelle le soit. Lorsque l'antécédent est vrai et la conclusion fausse, la conditionnelle est fausse.

Boole03

La femme d'un logicien se réveille après l'accouchement. Elle dit à son mari : « c'est une fille ou un garçon ? » Et le logicien répond « oui ».

La femme d'un programmeur dit à son mari : « Va à l'épicerie me chercher une baguette de pain, s'ils ont des œufs apporte-m'en une douzaine. Le programmeur revient avec douze baguettes de pain.



En programmation, on rencontre des expressions de la forme « si p alors S », où S est une série d'instructions. Lors de l'exécution de tels programmes, les instructions de S sont exécutées si l'énoncé p est vrai. Si l'énoncé p est faux, S ne s'exécute pas.

Réciproque et contraposée

Soit $p \to q$ une conditionnelle, la conditionnelle $q \to p$ est appelée **conditionnelle réciproque** et $\neg q \to \neg p$ est appelée **conditionnelle contraposée**.

Boole04

Boole05

Biconditionnelle

Soit p et q deux propositions. La proposition composée notée $p \leftrightarrow q$, qui se lit « p si et seulement si q », est vraie lorsque les deux propositions ont la même valeur de vérité; elle est fausse dans les autres cas. Cette proposition composée est appelée une **biconditionnelle**. La table de vérité de la biconditionnelle est donnée ci-contre.

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

L'énoncé « je vais te reconduire en voiture si et seulement si il pleut » est un énoncé biconditionnel.

Tautologie

Une **tautologie**, notée t, est un énoncé composé qui est toujours vrai, quelle que soit la valeur de vérité de ses composantes.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

L'énoncé $p \vee \neg p$ est une tautologie, comme sa table de vérité, donnée ci-contre, permet de le constater.

REMARQUE

La négation d'une tautologie est une contradiction et la négation d'une contradiction est une tautologie.

Contradiction

Une **contradiction**, notée c, est un énoncé composé qui est toujours faux, quelle que soit la valeur de vérité de ses composantes.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	0
1	0	0

L'énoncé $p \wedge \neg p$ est une contradiction comme en témoigne sa table de vérité.

Implication logique

Boole06

Soit P et Q deux énoncés composés. On dit que P **implique logiquement** Q si l'énoncé $P \to Q$ est une tautologie. On note alors $P \Rightarrow Q$.

Équivalence logique

Boole07

Soit P et Q deux énoncés composés. On dit que P et Q sont **logiquement équivalents** si l'énoncé $P \leftrightarrow Q$ est une tautologie. On note alors $P \equiv Q$ ou $P \Leftrightarrow Q$.

EXEMPLE 2.1.7

Montrer l'équivalence logique des propositions ssuivantes.

a) $\neg(p \vee q)$ et $\neg p \wedge \neg q$

b) $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$

Boole08

REMARQUE
Les parenthèses et crochets servent à indiquer les priorités des opérations, il ne faut pas les négliger.

Solution

a) Pour démontrer l'équivalence logique, il faut montrer que la biconditionnelle $[\neg(p \vee q)] \leftrightarrow [\neg p \wedge \neg q]$ est une tautologie. On construit donc la table de vérité.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$[\neg(p \vee q)] \leftrightarrow [\neg p \wedge \neg q]$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

REMARQUE
Les équivalences logiques de cet exemple, appelées Lois de De Morgan, sont dues au logicien et mathématicien Augustus De Morgan.

On constate que la biconditionnelle est une tautologie; les deux énoncés composés sont donc logiquement équivalents et on peut écrire

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

b)On construit la table de vérité de la biconditionnelle

$$[\neg(p \wedge q)] \leftrightarrow [\neg p \vee \neg q].$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$[\neg(p \wedge q)] \leftrightarrow [\neg(p \wedge q)]$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1

Boole09

Boole10

La biconditionnelle reliant les propositions $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$ est une tautologie, ce qui signifie que les deux propositions sont logiquement équivalentes et on peut écrire

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q.$$

Forme booléenne et quantificateurs

L'énoncé « 2 est pair » est un énoncé booléen car on peut décider s'il est vrai ou faux. Cependant, l'expression « x est pair » n'est pas un énoncé booléen, on ne peut déterminer s'il est vrai ou faux sans connaître la valeur de x. Une expression comme « x est pair » est appelée **forme booléenne**. Une forme booléenne devient un énoncé booléen lorsqu'on affecte une valeur à la variable. En mathématiques, on utilise beaucoup les formes booléennes. On donne généralement un cadre de référence à une forme booléenne.

Forme booléenne

Une **forme booléenne** est une expression comportant une ou des variables qui devient un énoncé booléen (proposition) lorsqu'on assigne des valeurs à sa variable ou à chacune de ses variables.

Boole11

Un astronaute débarque sur une exoplanète que l'on croyait inhabitée, mais qui est peuplée de cannibales. Il est fait prisonnier et le chef cannibale lui dit : « Nous laissons à nos prisonniers le choix de leur mort. Tu dois énoncer une proposition : si elle est vraie tu seras bouilli, si elle est fausse, tu seras rôti ». Quelle proposition doit-il faire pour avoir la vie sauve ?

Solution page suivante.

Formes booléennes et ensembles

Nous utilisons les formes booléennes dans la description en compréhension d'un ensemble. Considérons l'ensemble U ci-contre et le sous-ensemble A défini en compréhension par

$$A = \{x \in U \mid x \le 4\}.$$

Dans cette situation, le cadre de référence est l'ensemble U et la forme booléenne est $x \le 4$. L'ensemble A est alors l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la forme booléenne donne un énoncé vrai. Ainsi, si on affecte la valeur 2 à la variable x, on obtient l'énoncé

$$2 \le 4$$

qui est un énoncé vrai. Le nombre 2 est donc un élément de l'ensemble A. Cependant, si on affecte à x la valeur 7, on obtient un énoncé faux, soit :

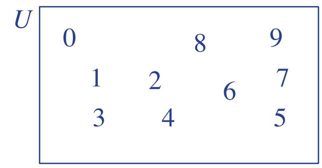
$$7 \le 4.$$

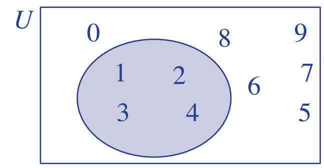
Le nombre 7 n'est donc pas un élément de l'ensemble A.
Pour nous, cela est évident. En lisant la définition de l'ensemble

$$A = \{x \in U \mid x \le 4\},$$

on a automatiquement conclu que :

$$A = \{1; 2; 3; 4\}.$$





L'ensemble A

REMARQUE
Il faut assigner une valeur à chacune des variables d'une forme booléenne pour obtenir un énoncé booléen et déterminer la valeur de vérité de l'énoncé.

Quantification et valeur de vérité

On peut utiliser les formes booléennes pour définir des énoncés sans assigner aux variables des valeurs particulières. On procède alors par **quantification**. La quantification se fait également par rapport à un ensemble de référence, mais celui-ci est parfois implicite. On représente par $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ des formes booléennes à une variable, par $P(x, y)$, $Q(x, y)$ et $R(x, y)$ des formes booléennes à deux variables et par U et V les ensembles de référence. Lorsqu'un ensemble de référence est un ensemble de nombres, on le représente selon l'usage habituel.

Quantificateur universel

La **quantification universelle** d'une forme booléenne $P(x)$ est la proposition « $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs de x dans l'ensemble de référence ». Symboliquement, on écrit simplement

$$\forall\, x \in U, P(x)$$

qui se lit « pour tout élément x de U, $P(x)$ » ou « quel que soit l'élément x de U, $P(x)$ ». Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

NOTE
Le symbole $\forall$ a été introduit en 1933 par le mathématicien allemand Gerhard Gentzen (1909-1945).

Considérons la forme propositionnelle $x > 4$. La quantification universelle de cette proposition sur l'ensemble des nombres réels donne

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, x > 4.$$

qui se lit « pour tout élément x des réels, $x > 4$ » et qui signifie dans le langage ordinaire « tous les nombres réels sont plus grands que 4 ». La quantification, dans ce cas, donne donc une proposition fausse.

Il doit déclarer « je vais être rôti ». S'ils veulent le faire rôtir, la proposition est vraie et ils doivent le faire bouillir et s'ils le font bouillir la proposition est fausse et ils doivent le faire rôtir. Dilemme insoluble, il aura la vie sauve.

Quantificateur existentiel

La **quantification existentielle** d'une forme booléenne $P(x)$ est la proposition « Il existe au moins un élément x de l'ensemble de référence tel que $P(x)$ est vraie ». Symboliquement, on écrit simplement

$$\exists\, x \in U, P(x)$$

qui se lit « il existe un élément x de U, tel que $P(x)$ » ou « il existe au moins un élément x de U, tel que $P(x)$ ». Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

NOTE
Le symbole $\exists$ a été introduit en 1897 par le mathématicien italien Giuseppe Peano (1858-1932), le logicien Bertrand Russel (1872-1970) en a modernisé l'usage.

Considérons l'ensemble $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et la forme booléenne $P(x) : x^2 < 100$. La proposition $\forall x \in U, P(x)$ est équivalente à la conjonction : $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7) \wedge P(8) \wedge P(9)$, qui est vraie.
De plus, si on considère la forme booléenne $R(x)$: $x^2 < 5$, la proposition $\exists\, x \in U, R(x)$ est équivalente à la disjonction :

$$R(1) \vee R(2) \vee R(3) \vee R(4) \vee R(5) \vee R(6) \vee R(7) \vee R(8) \vee R(9)$$

qui est également vraie, car entre autres, $R(1)$ est vraie.

Variables libres et variables liées

Une variable **libre** est une variable à laquelle on n'a pas assigné de valeur et qui n'est pas quantifiée. Lorsqu'on assigne une valeur particulière à une variable ou lorsqu'on quantifie cette variable, on dit que la variable est **liée**.

Dans le cas d'une proposition par quantification universelle $(\forall\, x \in U, P(x))$, si la proposition P est vraie pour chacune des valeurs de l'ensemble de référence, cela signifie que la proposition obtenue par quantification est vraie. Pour déterminer la valeur de vérité d'un tel énoncé, il faut en faire la démonstration, à moins que l'énoncé soit pris comme axiome, comme le sont les propriétés des opérations sur les ensembles. Pour démontrer qu'une proposition obtenue par quantification universelle est fausse, il suffit d'exhiber une valeur a pour laquelle la proposition $P(a)$ est fausse. C'est ce qu'on appelle **démonstration par contre-exemple**.
Symboliquement, on a l'équivalence suivante :

$$\neg(\forall\, x \in U, P(x)) \Leftrightarrow (\exists\, x \in U, \neg P(x)).$$

Dans le cas d'une proposition par quantification existentielle $(\exists\, x \in U, P(x))$, la démonstration consiste normalement en la présentation d'un élément pour lequel la proposition est vraie. Démontrer que la proposition est fausse est parfois plus exigeant, il faut montrer qu'aucun élément ne satisfait à la proposition.
Symboliquement, on a l'équivalence suivante :

$$\neg(\exists\, x \in U, P(x)) \Leftrightarrow (\forall\, x \in U, \neg P(x))$$

REMARQUE
Dans l'étude de la convergence de suites de nombres, on peut montrer qu'une suite converge sans pouvoir donner la limite. On utilise alors des théorèmes permettant de conclure à la convergence.

EXEMPLE 1

Écrire chaque proposition en langage courant et donner sa valeur de vérité en justifiant votre affirmation.

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \sqrt{x} \in \mathbb{R}$.
b) $\forall\, x \in \mathbb{Z}\,,\ 1/x \in \mathbb{Z}$.
c) $\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ 1/x = 0$.
d) $\exists\, x \in \mathbb{Z},\ x^2 - 4 = 0$.
e) $\exists\, x \in \mathbb{N}\,,\ x + 2 = 0$
f) $\exists\, x \in \mathbb{Q},\ x^2 - 2 = 0$

Boole12

Solution

a) En traduisant littéralement, on obtient la proposition :
Pour tout nombre réel x, la racine carrée de x est un nombre réel.
Cette proposition est fausse et pour le démontrer, il suffit de déterminer un contre-exemple puisqu'il s'agit d'une proposition universelle.
Comme contre-exemple, on peut considérer le nombre réel –1 dont la racine carrée n'est pas un nombre réel.

b) En traduisant littéralement, on obtient la proposition :
Pour tout nombre entier x, $1/x$ est un nombre entier.
Cette proposition est fausse et pour le démontrer, il suffit de déterminer un contre-exemple puisqu'il s'agit d'une proposition universelle.
Comme contre-exemple, on peut considérer le nombre entier 2, on a alors $1/x = 1/2$ qui n'est pas un nombre entier.

c) En traduisant littéralement, on obtient la proposition :
Il existe au moins un nombre réel x tel que $1/x$ est égal à 0.
Cette proposition est fausse puisque la division par 0 n'est pas définie. Il n'y a donc **aucun** nombre réel pour lequel la proposition est vraie ou pour tout nombre réel, $1/x \neq 0$. En effet :
$$\neg(\exists\, x \in \mathbb{R}\,,\ 1/x = 0) \Leftrightarrow (\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ 1/x \neq 0).$$

d) En traduisant littéralement, on obtient la proposition :
Il existe au moins un nombre entier x tel que $x^2 - 4 = 0$.
Cette proposition affirme l'existence dans $\mathbb{Z}$ d'au moins une solution à l'équation $x^2 - 4 = 0$. Cet énoncé est vrai et pour le montrer, il suffit d'exhiber une valeur de x pour laquelle la proposition est vraie, ce qui est le cas pour $x = 2$ et pour $x = -2$.

e) En traduisant littéralement, on obtient la proposition :
Il existe au moins un nombre naturel x tel que $x + 2 = 0$.
Cette proposition affirme l'existence dans $\mathbb{N}$ d'au moins une solution à l'équation $x + 2 = 0$. Cet énoncé est faux et pour le montrer, on doit résoudre l'équation, on obtient $x = -2$ qui n'est pas un nombre naturel mais un nombre entier.

f) En traduisant littéralement, on obtient la proposition :
Cette proposition affirme l'existence dans $\mathbb{Q}$ d'au moins une solution à l'équation $x^2 - 2 = 0$. Cet énoncé est faux et pour le montrer, on doit résoudre l'équation, on obtient $x = \pm\sqrt{2}$. L'équation admet deux solutions mais aucune de celles-ci n'est un nombre rationnel.

Pour en savoir plus sur :

Quantificateurs et opérateurs
Boole13
Boole14

Quantification de deux variables
Boole15
Boole16

Raisonnement inductif et conjecture
Boole17

Raisonnement déductif
Boole18

Note historique

LOGIQUE ET CONNAISSANCE

La recherche de rigueur dans la pensée afin de construire une connaissance fiable a pris son essor dans la Grèce antique. Cette recherche a donné la dialectique et la logique. La dialectique est une méthode de discussion et de questionnement qui occupe une place importante dans les philosophies occidentales et orientales. La dialectique est une démarche de réfutation qui vise à remettre en question des positions contraires, la thèse et l'antithèse, en vue de parvenir à une connaissance réconciliant les contraires, la synthèse. On considère que le premier dialecticien est Zénon d'Élée qui, par ses paradoxes, réfutait à la fois les enseignements de Pythagore pour qui la matière et le temps étaient constitués de grains indivisibles et les enseignements d'Anaxagore pour qui la matière et le temps étaient infiniment divisibles (NH Zénon01-02, Zénon).

La démarche dialectique a été popularisée par les dialogues de Platon dans lesquels Socrate interroge un interlocuteur dans une progression logique visant à lui faire prendre conscience d'une connaissance qu'il possédait en lui sans s'en rendre compte (NH Platon01). C'est la théorie de la réminiscence selon laquelle toutes les connaissances ont été acquises par l'Âme qui a pu contempler le monde des Idées entre deux réincarnations. Cette théorie de la connaissance se base sur le précepte de l'immortalité de l'Âme des Pythagoriciens que Platon a adopté. Pour celui-ci, la dialectique permet de développer un véritable savoir en confrontant les opinions contraires. En confrontant les opinions, on se libère du monde des apparences, le monde sensible, et on parvient à la vraie connaissance, le monde intelligible (NH Platon02-03, Platon). La dialectique est un type de connaissance qui repose sur la confrontation de plusieurs opinions de manière à dépasser celles-ci pour parvenir à un véritable savoir (ou à la vérité).

La logique est une démarche qui se distingue de la dialectique, même si les deux démarches peuvent contribuer à développer la connaissance. La logique vise à déterminer des règles générales et formelles permettant de distinguer un raisonnement concluant de celui qui ne l'est pas. On pense automatiquement à la géométrie lorsqu'on cherche à identifier les premières démarches pour établir ces règles, mais le souci de cohérence dans les procédures d'opérations dans les différents systèmes de numération s'inscrit également dans cette recherche.

C'est principalement sous l'impulsion d'Aristote que la logique s'est développée comme démarche de construction du savoir (NH Aristote01). Pour Aristote, les trois grandes formes de la pensée sont l'idée ou concept, le jugement et le raisonnement. Dans le discours, le concept est représenté par le terme, le jugement par la proposition et le raisonnement par l'argument.

Ainsi, le terme « triangle » représente un concept, celui d'une figure plane à trois côtés qui se coupent deux à deux. L'expression « la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux angles droits » est une proposition.

La proposition est un énoncé dont on peut déterminer la valeur de vérité. Elle met en relation deux concepts, le sujet et l'attribut, à l'aide d'une copule, dont la seule acceptable pour plusieurs logiciens est le verbe être. Pour démontrer une proposition, il faut construire une argumentation. L'objectif d'Aristote est de construire la connaissance, ou un discours philosophique cohérent, à partir de vérités considérées comme évidentes pour tous, appelées **axiomes** et de **postulats**, dont on peut déduire des conclusions à l'aide de **syllogismes**.

Dans les fondements de sa philosophie de la nature, Aristote a adopté le modèle géocentrique. Il a postulé que le monde sublunaire et le monde supralunaire étaient de natures différentes. Il a postulé également que le monde supralunaire était parfait et constitué de corps parfaits, donc sphériques. Pour lui, l'univers est fini et sphérique et le vide est impossible. En se basant sur ces postulats, il a développé des théories qui ont été adoptées comme dogme par l'Église, ce qui a freiné le développement scientifique jusqu'à l'époque de Galilée.

Le géomètre Euclide a lui aussi voulu établir une connaissance universelle à partir d'axiomes et de postulats (NH Euclide01). Ceux-ci sont cependant spécifiques aux mathématiques alors que les axiomes d'Aristote sont spécifiques à la philosophie.

Depuis Aristote, des générations de philosophes et de mathématiciens se sont intéressés aux règles de la logique. En 1666, Leibniz dans *Dissertatio de arte combinatoria,* formule le projet de développer une notation universelle et artificielle représentant des idées simples et d'établir des techniques automatisables permettant de combiner ces symboles. Leibniz voulait substituer à l'intuition et à la pensée une procédure apparentée à l'algèbre qui aurait été plus sûre et plus rapide.

Leonhard Euler, dans ses *Lettres à une princesse allemande*, a recours à des diagrammes pour expliquer, identifier et classifier les formes valides de syllogisme (NH Euler01). Un siècle plus tard, John Venn (NH Euler02) développe lui aussi une représentation graphique des syllogismes plus simple à interpréter et qui est également utilisée en théorie des ensembles. Entretemps, les mathématiciens Augustus De Morgan (NH De Morgan) et George Boole (NH Boole) ont posé les fondements d'une algèbre binaire qui a ouvert la voie à l'utilisation des circuits électriques dans le traitement de l'information.