OPTIMISATION

7

Résoudre des problèmes d'optimisation.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la description de la situation par un modèle mathématique;
- l'utilisation de la procédure pour déterminer les valeurs critiques;
- la détermination des valeurs critiques à considérer;
- l'application d'un test pour déterminer la valeur cherchée.

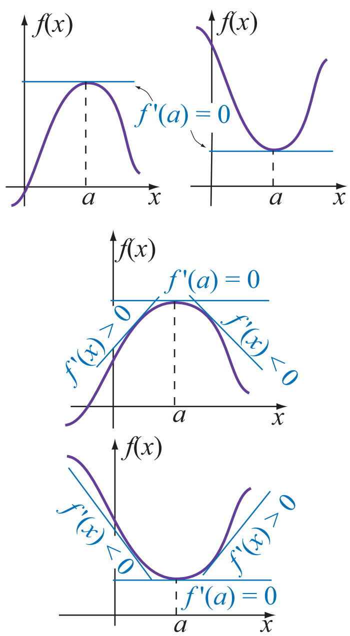
OBJECTIFS

7.1 Résoudre un problème d'optimisation dans une situation modélisable par une fonction algébrique.

7.2 Résoudre un problème d'optimisation dans une situation modélisable par une fonction transcendante.

7.1 Fonctions algébriques

Les problèmes d'optimisation dans des situations modélisables par une fonction quadratique sont déjà abordés au secondaire. Nous allons rappeler quelques-unes de ces situations pour mettre à l'épreuve la procédure générale d'optimisation et présenter ensuite des situations dont le modèle n'est pas quadratique.



Introduction

Nous désirons trouver les valeurs optimales de fonctions sans avoir à faire le tableau complet de la fonction. Pour y parvenir, il faut rappeler les caractéristiques des valeurs optimales. Les figures ci-contre, illustrent les résultats suivants :

- Si la dérivée première est nulle à $x = a$, la tangente est horizontale au point d'abscisse a. La fonction peut donc avoir un maximum relatif, un minimum relatif ou un point d'inflexion à $x = a$. Pour déterminer s'il s'agit d'une valeur optimale, il faut faire les tests suivants :

* Si la fonction est croissante à gauche de a ($f' > 0$) et décroissante à droite de a ($f' < 0$) alors la fonction a un maximum relatif à $x = a$.

* Si la fonction est décroissante à gauche de a ($f' < 0$) et croissante à droite de a ($f' > 0$) alors la fonction a un minimum relatif à $x = a$.

Au chapitre précédent, nous avons énoncé cette démarche dans le théorème appelé **test de la dérivée première**.

THÉORÈME

Test de la dérivée première

Soit f, une fonction telle que $f(a)$ existe et $f'(a) = 0$.

- si $f'(x) > 0$ pour $x < a$ et $f'(x) < 0$ pour $x > a$, alors f a un maximum relatif à $x = a$.
- si $f'(x) < 0$ pour $x < a$ et $f'(x) > 0$ pour $x > a$, alors f a un minimum relatif à $x = a$.

OptimAlgebr01

PROCÉDURE

Application du test de la dérivée première

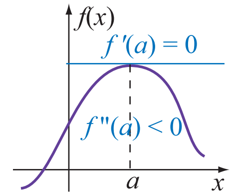
1. Dériver la fonction dont on cherche les valeurs optimales.
2. Trouver les zéros de la fonction dérivée.
3. Analyser le signe de la dérivée première à gauche et à droite de chacun des zéros de la fonction dérivée.
4. Rédiger la conclusion en interprétant selon le contexte.

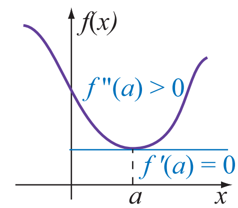
On peut également utiliser un test basé sur la concavité de la courbe au point de tangence.

- Si la dérivée première est nulle à $x = a$, la tangente est horizontale au point d'abscisse a. La fonction peut donc avoir un maximum relatif ou un minimum relatif à $x = a$. Pour le savoir, il faut faire les vérifications suivantes :

* Si la fonction est concave vers le bas à $x = a$ ($f''(a) < 0$) alors la fonction a un maximum relatif à $x = a$.
* Si la fonction est concave vers le haut à $x = a$ ($f''(a) > 0$) alors la fonction a un minimum relatif à $x = a$.

Au chapitre précédent, nous avons énoncé cette démarche dans le théorème appelé **test de la dérivée seconde.**





THÉORÈME

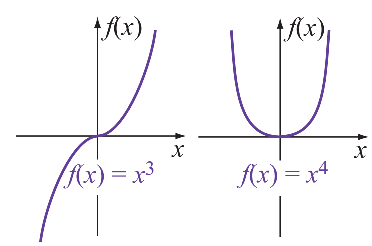
Test de la dérivée seconde

Soit f une fonction telle que $f'(a) = 0$.

- si $f''(a) < 0$, alors f a un maximum relatif à $x = a$.
- si $f''(a) > 0$, alors f a un minimum relatif à $x = a$.

REMARQUE

Si la dérivée première et la dérivée seconde s'annulent à $x = a$, la fonction peut avoir un point d'inflexion à $x = a$. C'est le cas pour la fonction $f(x) = x^3$, représentée ci-contre, dont la dérivée première et la dérivée seconde s'annulent toutes les deux à $x = 0$. La fonction a un point d'inflexion à $x = 0$. Ce n'est pas le cas pour $f(x) = x^4$ qui a un minimum à $x = 0$, mais dont les dérivées première et seconde s'annulent à $x = 0$.



PROCÉDURE

Application du test de la dérivée seconde

1. Trouver la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction dont on cherche les valeurs optimales.
2. Trouver les zéros de la dérivée première.
3. Déterminer le signe de la dérivée seconde en chacun des zéros de la dérivée première.
4. Rédiger la conclusion en interprétant selon le contexte.

L'application d'un test, soit celui de la dérivée première ou celui de la dérivée seconde s'inscrit dans une démarche plus globale de recherche des valeurs optimales du modèle décrivant une situation. La procédure est la suivante.

PROCÉDURE

Recherche des valeurs optimales d'une situation

1. Représenter chaque variable par une lettre et identifier la variable à optimiser.
2. Établir la relation entre les variables sur lesquelles portent les contraintes du problème.
3. Déterminer la relation entre la variable à optimiser et les autres variables.
4. En utilisant les relations entre les variables, exprimer la variable à optimiser en fonction d'une seule variable et déterminer l'intervalle correspondant au problème à l'étude (domaine de validité).
5. Dériver la variable à optimiser et appliquer un test pour trouver la valeur optimale cherchée.
6. Tirer les conclusions qui s'imposent et interpréter les résultats.

REMARQUE

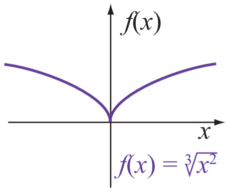
La procédure que nous venons de voir permet de trouver les valeurs optimales pour lesquelles la dérivée première s'annule. Cela ne signifie pas qu'elle permet de trouver toutes les valeurs optimales de toutes les fonctions. Ainsi, la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

a un minimum relatif à $x = 0$. Cependant, sa dérivée,

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

n'est pas définie à $x = 0$. En effet, la tangente à la courbe au point (0; 0) est verticale et n'a pas de pente définie.



Dans ce cas, il faut avoir recours au test de la dérivée première pour pouvoir conclure.

Problèmes d'optimisation

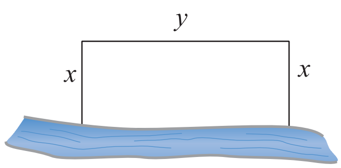
Dans un problème d'optimisation, le modèle mathématique est parfois donné, mais pas toujours. Il faut souvent construire le modèle décrivant la situation pour pouvoir, à partir de celui-ci, déterminer les conditions optimales.

Superficie maximale

EXEMPLE 7.1.1

Vous possédez 200 mètres de treillis à clôture et vous désirez clôturer une partie de terrain sur le bord d'une rivière. Ce terrain devant être loué, l'accès à la rivière est un atout; le terrain ne sera donc clôturé que sur trois côtés. Vous désirez que la superficie soit maximale de façon à vous assurer un meilleur revenu. Trouver les dimensions qu'il faut donner au terrain.

OptimAlgebr02



Représentation des variables

Soit x, la largeur de la partie de terrain, y, la longueur et S, la superficie. On veut maximiser la superficie.

Relation entre les variables obéissant à des contraintes

On dispose de 200 m de treillis et on doit avoir $x > 0$ et $y > 0$. La relation entre ces variables est donnée par le fait que le terrain doit être clôturé sur trois côtés et par la longueur du treillis. Elle est décrite par :

$$y + 2x = 200 \text{ ou } y = 200 - 2x.$$

Puisque $y > 0$, on a $200 - 2x > 0$, d'où $x < 100$.

Relation entre la variable à optimiser et celles des contraintes

La relation entre la superficie et les autres variables est :

$$S = xy.$$

Expression de la variable à optimiser en fonction d'une variable

En utilisant la relation exprimant la contrainte du problème, on peut décrire la superficie en fonction de la variable x. On obtient :

$$S(x) = x\,(200 - 2x) = 200x - 2x^2 \quad \text{où } x > 0 \text{ et } x < 100.$$

La fonction $S(x)$ décrit la superficie lorsque $x \in\ ]0; 100[$, car c'est dans cet intervalle que la fonction est positive.

Dérivation de la variable à optimiser

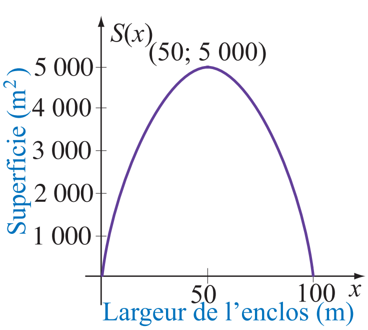
La dérivée est :

$$S'(x) = 200 - 4x.$$

Elle s'annule à $x = 50$. De plus, la dérivée seconde est :

$$S''(x) = -4.$$

Test de la dérivée seconde			
x		50	
$S'(x)$		0	
$S''(x)$		–	
$S(x)$		$\frown$ max	



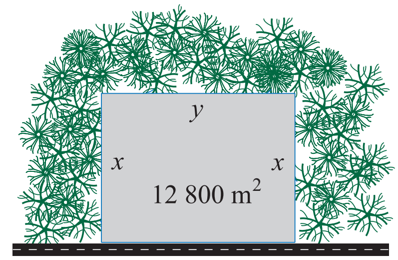
Conclusion

Puisque $S'(50) = 0$ et $S''(50) = -4 < 0$, le test de la dérivée seconde permet de conclure que la superficie est maximale lorsque la largeur de la partie clôturée est de 50 m. La longueur est alors de 100 m et la superficie de 5 000 m^2.

Longueur minimale

EXEMPLE 7.1.2

Le ministère des loisirs désire déboiser une surface de 12 800 m^2 pour aménager une aire de stationnement pour une base de plein air. Cette aire devra être clôturée sur les trois côtés non-adjacents à la route de façon à réserver les allées de la base aux randonnées pédestres. Quelles doivent être les dimensions du stationnement pour que la longueur de la clôture soit minimale?



Solution

Représentation des variables

Représentons par x la largeur du stationnement, par y sa longueur et par A sa superficie. La variable à optimiser est la longueur de la clôture, représentons-là par L.

Relation entre les variables obéissant à des contraintes

La contrainte est la superficie du terrain de stationnement et l'équation de la contrainte est :

$$A = xy = 12\ 800.$$

Relation entre la variable à optimiser et celles des contraintes

La relation entre la longueur de la clôture et les variables sous contrainte est :

$$L = 2x + y.$$

Expression de la variable à optimiser en fonction d'une variable

En utilisant la relation de contrainte, on peut décrire la longueur de la clôture en fonction d'une des dimensions du stationnement. On doit isoler une des variables dans l'équation de contrainte et substituer. En isolant y dans l'équation de contrainte, on a :

OptimAlgebr03

$$y = 12\ 800/x.$$

En substituant cette expression dans l'équation de la relation entre les trois variables, on obtient alors :

$$L(x) = 2x + \frac{12\ 800}{x} = 2x + 12\ 800x^{-1}$$

Dérivation de la variable à optimiser

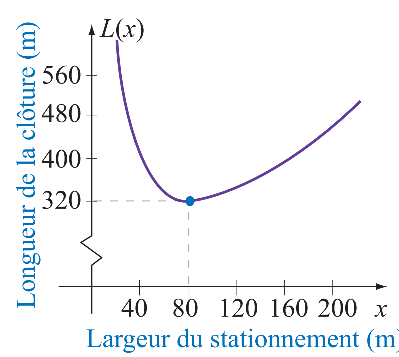
La fonction dérivée est alors :

$$L'(x) = 2 - 12\ 800x^{-2} = 2 - \frac{12\ 800}{x^2}.$$

Test de la dérivée seconde			
x		80	
$L'(x)$		0	
$L''(x)$		+	
$L(x)$		$\cup$ min	

La dérivée première s'annule lorsque :

$2 - \dfrac{12\ 800}{x^2} = 0$, d'où $2x^2 = 12\ 800$ et $x^2 = 6\ 400$. On a donc $x = \pm 80$.
Puisqu'il s'agit d'une longueur, on retient $x = 80$ m.



Test de la dérivée seconde

$$L''(x) = 0 + 25\,600x^{-3} = \frac{25\,600}{x^3}.$$

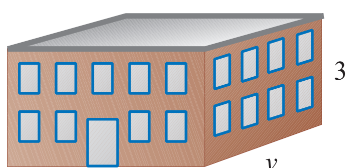
Puisque $L'(80) = 0$ et $L''(80) = 0{,}05 > 0$, le test de la dérivée seconde permet de conclure que la longueur de la clôture est minimale lorsque $x = 80$ m. On trouve alors $y = 160$ m.

Conclusion

Il faut donc déboiser une superficie de 80 m de largeur par 160 m de longueur pour aménager le stationnement de 12 800 m^2 en minimisant la longueur de la clôture.

Coût minimal

OptimAlgebr04



EXEMPLE 7.1.3

L'entreprise qui vous emploie projette la construction d'un entrepôt de 450 m^2 de surface. Les exigences municipales sur l'esthétisme des rues commerciales obligent les commerçants à recouvrir la façade de leurs édifices avec des matériaux de première qualité, alors que les côtés et l'arrière peuvent être recouverts avec des matériaux de moindre qualité. Les coûts ont été estimés à 30 $ du mètre carré pour la façade et 20 $ du mètre carré pour les côtés et l'arrière.

a) Sachant que la hauteur de l'édifice sera de 3 mètres, déterminer le modèle mathématique donnant le coût de recouvrement en fonction de la longueur de la façade.

b) Trouver pour quelle longueur de façade le coût de recouvrement sera minimal.

Solution

a) Soit x, la longueur de la façade et y, la longueur des côtés de l'édifice.

On a alors : $xy = 450$, d'où $y = \dfrac{450}{x}$.

et le coût de recouvrement est donné par :

$$C = 30 \times 3x + 20 \times 3x + 20 \times 3y + 20 \times 3y = 150x + 120y.$$

Par substitution, on a :

$$C(x) = 150x + 120 \times \frac{450}{x} = 150x + \frac{54\,000}{x}.$$

La fonction présente une asymptote verticale à $x = 0$ puisque :

$$\lim_{x \to 0^+}\left(150x + \frac{54\,000}{x}\right) = \infty.$$

b) La dérivée de la fonction est :

$$C'(x) = 150 - 54\,000x^{-2} = 150 - \frac{54\,000}{x^2} = \frac{150x^2 - 54\,000}{x^2}.$$

REMARQUE

Dans cet exemple, les dimensions du terrain peuvent imposer des contraintes supplémentaires. Ainsi les dimensions du terrain pourraient imposer que la façade du bâtiment soit comprise entre 10 m et 15 m.

Elle s'annule à $x = \pm\ 18{,}974$. La valeur négative est à rejeter dans ce contexte car il s'agit de la largeur d'un édifice. La dérivée seconde est :

$$C''(x) = 108\ 000x^{-3} = \frac{108\ 000}{x^3}.$$

Par le test de la dérivée seconde, la fonction a un minimum relatif à $x = 18{,}974$. En effet :

$$C'(18{,}974) = 0 \text{ et } C''(18{,}974) > 0$$

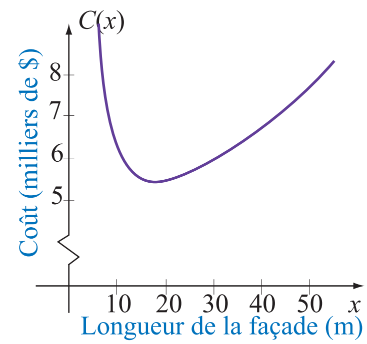
Dans cette situation, le domaine de validité du modèle est $[0; \infty[$. On ne peut donc évaluer le coût aux frontières. En l'évaluant à $x = 18{,}974$, on obtient :

$$C(18{,}974) = 5\ 692\ \$.$$

Le coût de recouvrement sera minimal si la longueur de la façade est de 18,974 m.

Test de la dérivée seconde

x		18,97	
$C'(x)$		0	
$C''(x)$		+	
$C(x)$		$\cup$ min	

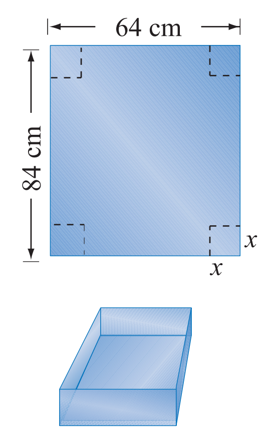


Volume maximal

EXEMPLE 7.1.4

Une compagnie désire fabriquer des boîtes rectangulaires en métal sans couvercle. Ces boîtes seront fabriquées à partir d'une feuille de métal de 84 cm sur 64 cm. Une machine découpera des carrés dans chaque coin et pliera les côtés pour former la boîte; les joints seront alors soudés automatiquement. On demande de déterminer la longueur du côté des carrés pour que le volume de la boîte soit maximal.

OptimAlgebr05



■ ***Solution***

Les variables sont le volume V et la longueur x des côtés des carrés. On veut maximiser le volume V. Exprimons V en fonction de la variable x. On obtient :

$$\begin{aligned} V(x) &= (84 - 2x)(64 - 2x)x \\ &= 5\ 376x - 296x^2 + 4x^3 \\ &= 4(x^3 - 74x^2 + 1\ 344x). \end{aligned}$$

Le domaine de ce modèle est l'intervalle $[0; 32]$ car les dimensions de la boîte ne peuvent être négatives.

La dérivée première est :

$$\begin{aligned} V'(x) &= 4(3x^2 - 148x + 1\ 344) \\ &= 4(3x - 112)(x - 12). \end{aligned}$$

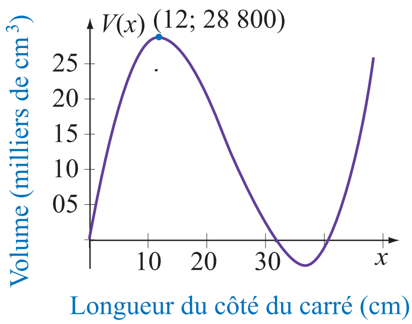
Elle s'annule à $x = 12$ et à $x = 112/3$.

La dérivée seconde est :

$$V''(x) = 4(6x - 148).$$

REMARQUE

Le domaine de validité du modèle mathématique est $[0; 32]$. C'est la portion de la courbe comprise dans cet intervalle qui décrit le volume.



La valeur 112/3 est à l'extérieur du domaine de validité du modèle et on doit la rejeter. On évalue la dérivée seconde à $x = 12$, on obtient :

$$V''(12) = 4(72 - 148) = -304 < 0,$$

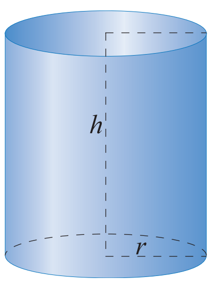
La fonction décrivant le volume a donc un maximum relatif à $x = 12$, puisque $V'(12) = 0$ et que $V''(12) < 0$. Le maximum est atteint lorsque la longueur du côté des carrés est de 12 cm, le volume est alors de 28 800 cm^3.

Aire minimale

EXEMPLE 7.1.5

OptimAlgebr06

Une compagnie désire fabriquer des boîtes de conserves de forme cylindrique de façon à utiliser le moins de métal possible. Cependant, le volume de ces boîtes doit être de 128 cm^3. Quelles doivent être les dimensions des boîtes?



Solution

Les variables sont le rayon r de la base, la hauteur h du cylindre, l'aire A de la surface et le volume V. En exprimant mathématiquement les relations entre les variables, on obtient :

$$V = \pi r^2 h = 128 \text{ cm}^3,$$
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Pour minimiser l'aire A, il faut l'exprimer en fonction d'une seule variable. Puisque :

$$V = \pi r^2 h = 128 \text{ cm}^3 ,$$

il s'ensuit que : $h = \dfrac{128}{\pi r^2}$

et on obtient :

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{128}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{256}{r} = 2\pi r^2 + 256r^{-1}.$$

La dérivée première est :

$$A'(r) = 4\pi r - 256r^{-2} = 4\pi r - \frac{256}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 256}{r^2}.$$

Elle s'annule lorsque :

$$4\pi r^3 - 256 = 0,$$

soit :

$$r^3 = \frac{256}{4\pi} = \frac{64}{\pi} \text{ et } r = \sqrt[3]{\frac{64}{\pi}} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

La dérivée seconde est :

$$A''(r) = 4\pi + 512r^{-3} = 4\pi + \frac{512}{r^3} = \frac{4\pi r^3 + 512}{r^3}.$$

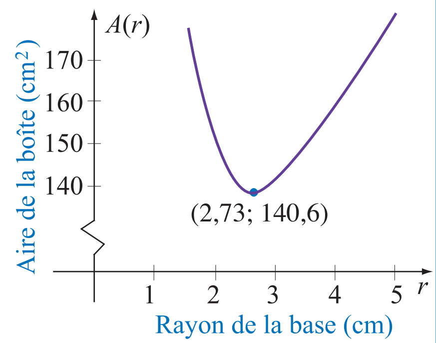
Test de la dérivée seconde			
r		2,73	
$A'(r)$		0	
$A''(r)$		+	
$A(r)$		◡ min	

En évaluant la dérivée seconde à $r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$, on trouve :

$$A''(4/\sqrt[3]{\pi}) = 4\pi + \frac{512}{64/\pi} = 4\pi + \frac{512\pi}{64} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0.$$

La fonction a un minimum à $r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 2{,}73$ cm, puisque la dérivée première s'annule alors que la dérivée seconde est positive. L'aire est $A(4/\sqrt[3]{\pi}) = 96\sqrt[3]{\pi} \approx 140{,}6\ \text{cm}^2$ et la hauteur est $h = \frac{8}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 5{,}46$ cm.

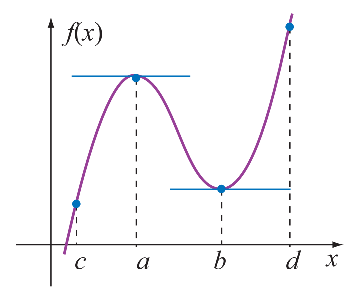
Les dimensions de la boîte doivent être 2,73 cm pour le rayon et 5,46 cm pour la hauteur.



Maximum et minimum absolus

La plus grande valeur de la fonction sur un intervalle sera appelée **maximum absolu** sur cet intervalle, alors que la plus petite valeur de la fonction sera appelée **minimum absolu** sur cet intervalle. Le maximum absolu sur un intervalle n'est pas nécessairement un maximum relatif.

Ainsi, dans l'intervalle $[c; d]$, la fonction dont le graphique est donné ci-contre a un maximum relatif à $x = a$, un maximum absolu à $x = d$, un minimum relatif à $x = b$ et un minimum absolu à $x = c$. Lorsqu'il faut trouver le minimum ou le maximum absolu d'une fonction sur un intervalle fermé, il faudra donc évaluer la fonction aux valeurs critiques et aux frontières de l'intervalle. De plus, si la fonction a une asymptote dans un intervalle, le maximum et le minimum absolus peuvent ne pas exister. Il faut analyser correctement le comportement de la fonction.

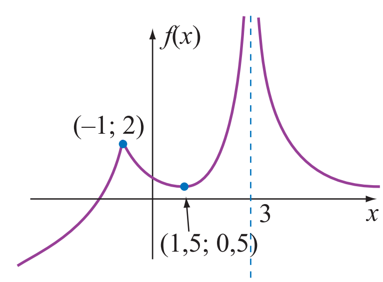


Maximum absolu et minimum absolu

Soit f, une fonction. On dit que $f(a)$ est un **maximum absolu** de la fonction f dans l'intervalle $[c; d] \subset \text{dom}_f$, si $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in [c; d]$.

On dit que $f(a)$ est un **minimum absolu** de la fonction f dans l'intervalle $[c; d] \subset \text{dom}_f$, si $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in [c; d]$.

REMARQUE
La fonction suivante a un minimum relatif à $x = 1{,}5$ et un maximum relatif à $x = -1$, mais elle n'a pas de minimum absolu ni de maximum absolu.

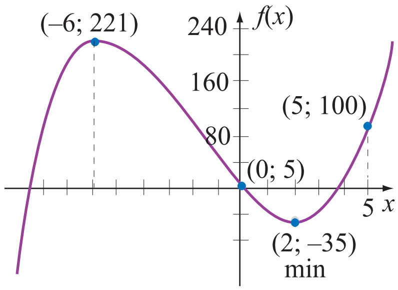


PROCÉDURE

Recherche d'un maximum ou un minimum absolu

Soit f une fonction continue dans l'intervalle $[c; d]$.

1. Dériver la fonction.
2. Déterminer les valeurs critiques de la fonction.
3. Calculer l'image par f des valeurs critiques et des extrémités de l'intervalle et déterminer, parmi les valeurs calculées, la plus grande et la plus petite valeur de l'intervalle.
4. Rédiger la conclusion.



REMARQUE

Dans des applications pratiques, le maximum et le minimum absolus sont souvent liés à des contraintes qui délimitent un intervalle de solutions admissibles. Il faut alors déterminer soit le maximum absolu, soit le minimum absolu dans cet intervalle.

EXEMPLE 7.1.6

Déterminer le maximum et le minimum absolus dans l'intervalle [0; 5] de la fonction définie par la règle de correspondance

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 36x + 5.$$

Solution

Dérivation de la fonction

En dérivant on trouve :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 12x - 36 \\ &= 3(x^2 + 4x - 12) \\ &= 3(x - 2)(x + 6). \end{aligned}$$

Détermination des valeurs critiques

La dérivée s'annule à $x = 2$ et $x = -6$. Cependant, $-6 \notin [0; 5]$.

Calcul des images

On évalue la fonction à 0, 2 et 5, ce qui donne :

$$f(0) = 5; f(2) = -35 \text{ et } f(5) = 100.$$

Conclusion

À $x = 2$, la fonction a un minimum absolu qui est également un minimum relatif. Elle a un maximum absolu à $x = 5$.

Un peu *d'histoire*

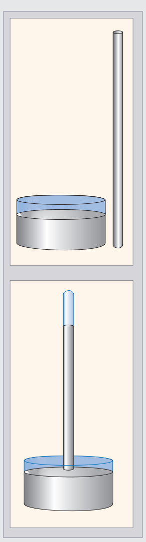
LE VIDE, QUELLE HORREUR !

Plusieurs composantes importantes de la cosmologie d'Aristote ont été remises en question à partir de Copernic. L'univers sphérique et fini dans lequel les sphères et les mouvements circulaires témoignent de la perfection de l'univers est confrontée à la théorie héliocentrique dans laquelle les mouvements planétaires, d'abord circulaires deviennent elliptiques avec Kepler. La théorie du mouvement d'Aristote fondée sur celle des quatre éléments est incompatible avec les mouvements de la Terre. Galilée développe une nouvelle théorie du mouvement dans laquelle la trajectoire d'un projectile est parabolique et la direction du mouvement est en tout temps celle de la tangente à la courbe.

Le rejet du vide par Aristote n'a pas encore été contesté avant l'époque de Galiée. On exprimait ce rejet en disant « la nature a horreur du vide » et ce rejet était devenu dogme de foi. Dans le modèle copernicien, la sphère des étoiles fixes avait été repoussée à une très grande distance pour expliquer l'absence de parallaxe des étoiles, ce qui supposait un grand espace vide entre la sphère de Saturne et la sphère des fixes. Cependant, dans le modèle aristotélicien, le monde supralunaire est régi par des lois physiques distinctes de celles régissant le monde sublunaire. Supposer que le vide puisse exister dans le monde supralunaire, comme c'est le cas dans le modèle copernicien, ne signifie pas qu'il en soit de même dans le monde sublunaire.

La remise en question de cet aspect du modèle aristotélicien vient d'un problème technique. Les fontainiers de Florence ne peuvent pomper l'eau de l'Arno à une hauteur supérieure à 18 brasses, (12 m). Pourtant, on comprend bien le fonctionnement des pompes. Elles aspirent l'air et l'eau monte dans les tuyaux pour prendre la place de l'air, puisque la nature a horreur du vide. Les fontainiers soumettent ce problème à Galilée, mais celui-ci est très pris par ses propres recherches et les fontainiers ne reçoivent pas de réponse. Après la mort de Galilée, ils s'adressent à d'autres savants, dont Evangelista Torricelli (NH Torricelli01).

L'impossibilité de pomper l'air à cette hauteur est d'abord vérifiée expérimentalement et le phénomène n'est plus simplement un problème technique. Il devient un problème scientifique. Comment expliquer cette impossibilité ? Plusieurs hypothèses sont proposées, mais comment les départager ?

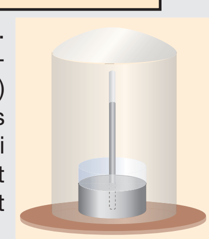


Il n'est pas simple de réaliser des expériences sur ce phénomène à cause de la longueur des tuyaux nécessaires. Evangelista Torricelli décide d'utiliser un liquide plus lourd que l'eau et choisit le mercure (NH Torricelli02). Il met au point un protocole expérimental et réalise une expérience au cours de laquelle un espace «vide » apparaît au sommet du tube de mercure renversé dans une cuve du même liquide. Ne voulant pas subir le même sort que Galilée, Torricelli ne fait pas la relation de cette expérience dans les volumes qu'il publie. L'expérience est cependant connue grâce aux échanges épistolaires entre savants. Marin Mersenne en informe ses correspondants. Blaise Pascal (NH Pascal01) répète l'expérience et apporte diverses modifications au protocole de Torricelli pour démontrer que l'espace au sommet du tube est vide mais l'opposition est toujours vive (NH Pascal02).

EXPÉRIENCES NOUVELLES
TOUCHANT LE VIDE
faites dans des tuyaux, seringues, soufflets, & siphons de plusieurs longueurs & figures; avec diverses liqueurs, comme vif-argent, eau, vin, huile, air, &c.
Avec un discours sur le même sujet.
Où est montré qu'un vaisseau si grand qu'on le pourra faire peut être rendu vide de toutes les matières connues en la nature, & qui tombent sous les sens.
Et quelle force est nécessaire pour faire admettre ce vide.
Dédié à Monsieur PASCAL Conseiller du Roy en les conseils d'État & Privé.
Par le sieur B.P, son fils
Le tout réduit en abrégé, & donné par avance d'un plus grand traité sur le même sujet.

LE PLEIN DU VIDE
OU
Le corps, dont le vide apparent des expériences nouvelles est rempli.
Trouvé par d'autres expériences, confirmé par les mêmes & démontré par raisons physiques

Par le P. Étienne Noël, de la Compagnie de Jésus.
À PARIS
Chez Jean du Bray, rue Saint Jacques
M. DC. XLVIII.
AVEC PERMISSION



Ce n'est qu'après l'expérience du Puy-de-Dôme (NH Pascal03), celle des sphères de Magdebourg par Otto von Guericke (NH Guericke), en 1654, et les expériences de Robert Boyle (NH Boyle), quelques années plus tard, que l'espace au sommet du tube de mercure fut considéré comme vide de toute substance par toute la communauté scientifique.

La nature n'a plus horreur du vide et le modèle aristotélicien prend l'eau de toutes parts.

7.2 Exercices

1. Un homme désire faire un jardin contigu à sa haie de telle sorte qu'il n'ait à clôturer que sur trois côtés. S'il a à sa disposition 40 mètres de treillis à clôture, quelles devront être les dimensions du jardin pour que l'aire de sa surface soit maximale? Quelles seraient les dimensions s'il clôturait sur les quatre côtés?

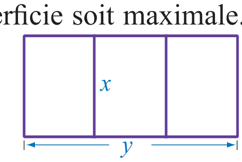
2. Une compagnie désire fabriquer des boîtes rectangulaires en métal sans couvercle. Ces boîtes seront fabriquées à partir d'une feuille de métal de 48 cm par 30 cm. Une machine découpe des carrés dans chaque coin et plie les côtés pour former la boîte, les joints sont alors soudés automatiquement. On demande de déterminer la longueur du côté des carrés pour que le volume de la boîte soit maximale.

3. Le ministère des Loisirs désire aménager une aire de stationnement pour une base de plein air. Cette aire devra avoir 7 200 m^2 et être clôturée sur les trois côtés non-adjacents à la route de façon à réserver les allées de la base aux randonnées pédestres. Quelles doivent être les dimensions du stationnement pour que la longueur de la clôture soit minimale?

4. On lance un objet verticalement dans les airs. La hauteur de cet objet par rapport au sol est donnée par $h(t) = 49t - 4{,}9t^2$ où t est le temps en secondes et h la hauteur en mètres. Trouver à quel moment l'objet atteint sa hauteur maximale. Quelle est cette hauteur?

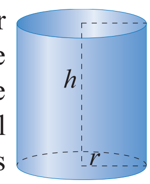
5. Un propriétaire d'une salle de cinéma de 1200 places constate que, lorsque le coût du billet est de 9,75 $, il attire 300 spectateurs et que pour chaque diminution de 0,75 $ il attire 100 spectateurs de plus. Il désire savoir quel prix il doit demander pour que son revenu soit maximal et il réclame votre aide.

6. Un cultivateur possède 800 mètres de clôture avec lesquels il désire faire trois enclos égaux tel qu'illustré ci-contre. Trouver les dimensions pour que la superficie soit maximale.

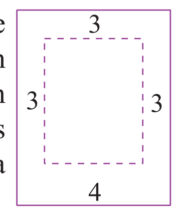


7. Une compagnie de navigation organise des voyages pour aller admirer les baleines sur le fleuve. Le prix du billet individuel est de 80 $ lorsqu'il y a 20 passagers ou moins. Cependant, la compagnie accorde une réduction de 2,50 $ pour chaque personne à chaque fois qu'il s'ajoute une personne au groupe minimum de 20 personnes, de façon à remplir le bateau qui peut contenir 35 personnes. Trouver le nombre de passagers qui donne le revenu maximal.

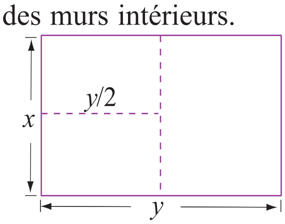
8. Une compagnie désire fabriquer des boîtes de conserve de forme cylindrique, avec couvercle de façon à utiliser le moins de métal possible. Cependant le volume de ces boîtes doit être de 54 cm^3. Quelles doivent être les dimensions des boîtes?



9. Un imprimeur veut utiliser une page de 300 cm^2 avec une marge de 3 cm sur les côtés et le dessus et de 4 cm dans le bas. Quelles devront être les dimensions de la page pour que la surface imprimée soit maximale?

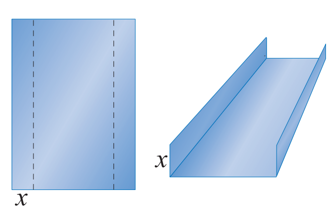


10. Un manufacturier veut faire construire un entrepôt subdivisé en trois parties tel qu'indiqué sur le plan ci-dessous. L'entrepôt doit avoir 650 m^2 de surface et le coût des murs extérieurs est 3 fois plus élevé que celui des murs intérieurs.



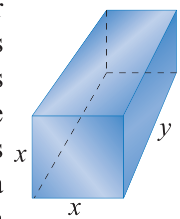
Quelles dimensions doit-il choisir pour minimiser le coût des murs?

11. Une compagnie désire fabriquer des gouttières à partir de feuilles d'aluminium de 27 cm de largeur en repliant les deux extrémités perpendiculairement à la base.



Quelle largeur doit-on replier pour que la capacité de la gouttière soit maximale?

12. Une compagnie doit concevoir et fabriquer une boîte dont les extrémités seront carrées, les côtés rectangulaires et le volume sera de 2 400 cm^3. Quelles devront être les dimensions de la boîte pour minimiser l'aire de la surface?



13. Le coût unitaire total pour produire un certain article dépend de trois facteurs :
    - les frais fixes, 250 $ quotidiennement qui doivent être répartis sur le nombre x d'articles produits,
    - le coût de production de chaque article, 0,19 $,
    - le coût de réparation et de garantie des articles produits $x^2/5\ 000$ qui doit être réparti sur le nombre x d'articles produits quotidiennement.

    La fonction $C_u(x) = \dfrac{250}{x} + 0{,}19 + \dfrac{x}{5\ 000}$

    représente alors le coût unitaire total pour produire quotidiennement x unités du produit. Trouver combien il faut produire d'articles quotidiennement pour minimiser le coût unitaire total.

14. Un des facteurs qu'il faut considérer dans le choix d'un câble de transmission est le coût. L'évaluation du coût se fait à partir de deux facteurs, le coût d'investissement et le coût d'opération. Le coût d'investissement dépend du coût d'achat et de celui-ci dépend le paiement annuel d'intérêts et de taxes et la dépréciation. Or le coût d'achat est directement proportionnel à l'aire de la section du câble. Le coût d'opération quant à lui dépend de la perte de puissance qui est inversement proportionnelle à l'aire de la section du câble. Le coût total est donc décrit par :

    $$C(a) = k_1 a + \frac{k_2}{a},$$

    où $k > 0$ et a est l'aire de la section du câble.

    Montrer que le coût total est minimum lorsque $k_1 a = \dfrac{k_2}{a}$ (Ce résultat est la loi de Kelvin).

15. Le responsable du contrôle de la qualité d'une usine désire optimiser le coût du contrôle de la qualité et du service après vente. Il suppose que le coût du contrôle d'une unité de ce produit est directement proportionnel au nombre de vérifications effectuées sur ce produit. De plus, le coût du service après vente diminue progressivement lorsque le nombre de vérifications augmente, mais ne peut être éliminé complètement. Si le coût total, vérifications et service, en fonction du nombre n de vérifications est donné par :

    $$C(n) = 0{,}25n + \frac{2{,}35}{n + 0{,}4}.$$

    Trouver combien il faut effectuer de vérifications pour minimiser le coût.

16. Le coût unitaire total pour produire un certain article dépend de trois facteurs :
    - les frais fixes, 375 $ quotidiennement qui doivent être répartis sur le nombre d'articles produits,
    - le coût de production de chaque article, 0,28 $,
    - le coût de réparation et de garantie des articles produits $x^2/6\ 000$ qui doit être réparti sur le nombre x d'articles produits quotidiennement.

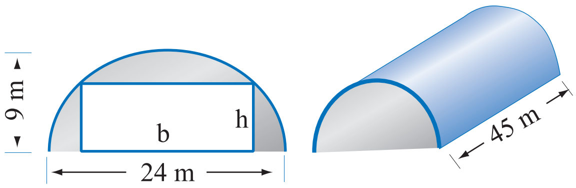
    Déterminer la fonction décrivant le coût unitaire total et trouver combien il faut produire d'articles quotidiennement pour minimiser le coût unitaire total.

17. Le taux de propagation d'une épidémie est directement proportionnel au nombre de personnes atteintes et au nombre de personnes non-atteintes, c'est-à-dire :

    $$T(p) = kp(1 - p),$$

    où $k > 0$, p est la proportion de personnes atteintes et T est le taux de propagation. Montrer que le taux de propagation est maximal lorsque la moitié de la population est atteinte.

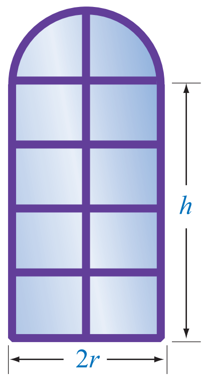
18. On doit aménager l'intérieur d'une structure auto-portante de forme parabolique pour l'utiliser comme entrepôt. Cet aménagement nécessite la construction de murs verticaux et d'un plafond et il faut s'assurer que le volume utile sera maximal. On a constaté que le volume utile sera maximal si l'aire du rectangle inscrit dans la parabole d'une coupe transversale est maximale.



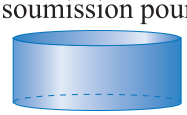
Coupe transversale

Calculer les dimensions du rectangle et le volume utile de l'entrepôt.

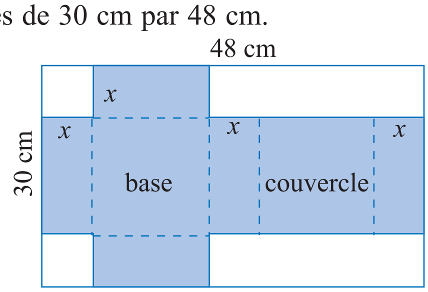
19. Une entreprise de portes et fenêtres veut offrir un nouveau produit, une fenêtre dont la forme est un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Le périmètre de ces fenêtres sera de 8 m et elles doivent assurer le plus d'éclairement possible. La surface de ces fenêtres doit donc être maximale. Trouver les dimensions de la fenêtre, h et r pour que la surface de ces fenêtres soit maximale.



20. Une compagnie doit préparer une soumission pour des bacs à recyclage pour le verre. Ces bacs en plastique doivent être de forme cylindrique sans couvercle. La capacité de ces bacs doit être de 1 m^3. Déterminer les dimensions que devraient avoir ces bacs pour minimiser le coût en matériau.



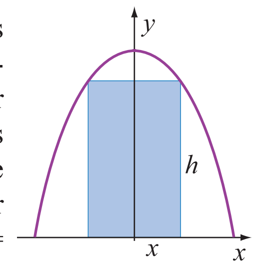
21. Une compagnie doit fabriquer des contenants avec couvercle à partir de feuilles de carton rectangulaires de 30 cm par 48 cm.



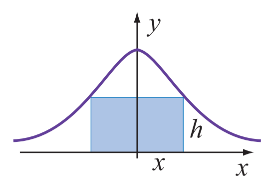
Une presse découpe d'abord un carré et un rectangle de chaque côté de la feuille tel qu'indiqué dans le plan suivant. Puis, une autre machine plie la feuille suivant les lignes pointillées et applique un papier scellant pour coller les côtés de la boîte. Quelle est la longueur du côté du carré pour que le volume de la boîte soit maximal?

22. Une compagnie doit préparer une soumission pour des bacs à recyclage pour le papier. Ces bacs en plastique doivent être de base rectangulaire sans couvercle. La longueur de la base doit être une fois et demi sa largeur. La capacité de ces bacs doit être de 0,3 m^3. Déterminer les dimensions que devraient avoir ces bacs pour minimiser le coût en matériau.

23. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut former de telle sorte que deux des sommets soient sur l'axe des x et les deux autres sur la parabole d'équation : $y = 9 - x^2$.



24. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut former de telle sorte que deux des sommets soient sur l'axe des x et les deux autres sur la courbe d'équation :



$$y = \frac{9}{x^2 + 1}.$$

25. On représente la réaction de l'organisme à une dose de médicament par l'équation :

$$r = m^2\left(\frac{C}{2} - \frac{m}{3}\right)$$

où C est une constante positive et m, la quantité de médicament absorbé par le sang. Déterminer pour quelle dose la réaction est maximale. La *sensibilité* à un médicament est la vitesse de réaction de l'organisme. Déterminer pour quelle dose la sensibilité est maximale.

26. On décrit l'efficacité E d'une vis par :

$$E = \frac{\theta - \mu\theta^2}{\mu + \theta},$$

où θ est l'angle du pas de filetage, en radians, et μ, une constante positive représentant le coefficient de friction du matériau. Déterminer pour quel angle de filetage l'efficacité est maximale pour un coefficient $\mu = 0,5$.

7.3 Fonctions transcendantes

Dans cette section, nous allons présenter diverses situations descriptibles par des fonctions exponentielles ou par des fonctions trigonométriques et pour lesquelles il faut trouver les conditions optimales.

Exemples d'optimisation

Dans certaines des situations qui suivent, le modèle mathématique est donné. Cependant, il y a des problèmes pour lesquels il faut construire le modèle. Pour cela, nous nous servirons de notions fondamentales comme les formules de l'aire de figures géométriques simples et les définitions des rapports trigonométriques.

Puissance maximale

EXEMPLE 7.3.1

Au cours des cinq premières secondes après sa mise en marche, la puissance requise par un appareil est décrite par :

$$P(t) = \frac{800t}{e^t} \text{ W},$$

où P est la puissance en watts (W) et t, le temps en secondes. À partir de la cinquième seconde, la puissance requise est constante.

a) Déterminer à quel moment la puissance requise est maximale et calculer cette puissance.

b) Représenter graphiquement la fonction décrivant la puissance requise par cet appareil.

OptimTranscend01

Solution

a) La dérivée première est $P'(t) = \frac{800(1-t)}{e^t}$ W/s.

Elle s'annule à $t = 1$ s. La dérivée seconde est :

$$P''(t) = \frac{800(t-2)}{e^t} \text{ W/s}^2.$$

Elle s'annule à $t = 2$ s.

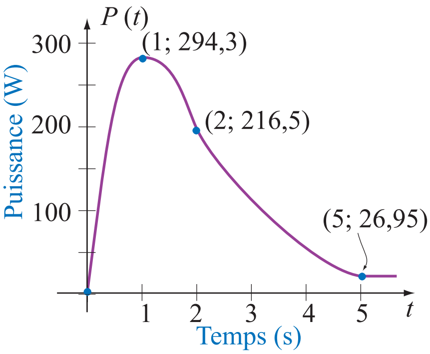
Puisque $P'(1) = 0$ et $P''(1) < 0$, le test de la dérivée seconde permet de conclure que la fonction atteint sa valeur maximale à $t = 1$ s. La puissance est alors :

$$P(1) = \frac{800 \times 1}{e^1} = 294{,}3 \text{ W}.$$

Test de la dérivée seconde			
t		1	
$P'(t)$		0	
$P''(t)$		–	
$P(t)$		$\frown$ max	

b) La puissance est variable dans l'intervalle [0; 5]. Par la suite, elle est constante. La puissance requise après la cinquième seconde est :

$$P(5) = \frac{800 \times 5}{e^5} = 26{,}95 \text{ W}.$$



Dans l'intervalle [0; ∞[, le tableau des caractéristiques graphiques est le suivant :

t	0		1		2		5		∞
$P'(t)$	+	+	0	–	–	–	∄	0	0
$P''(t)$	–	–	–	–	0	+	∄	0	0
$P(t)$	0	↗	294,3	↘	216,5	↘	26,95	26,95	26,95
			max		inf				

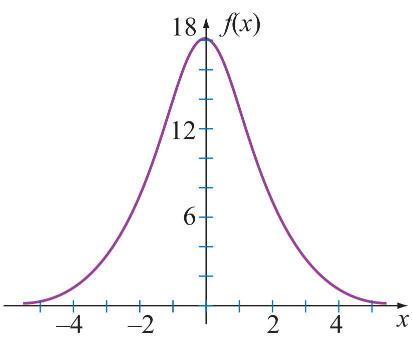
Aire maximale

EXEMPLE 7.3.2

OptimTranscend02

Le graphique de la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = \frac{18}{e^{0,2x^2}}$$

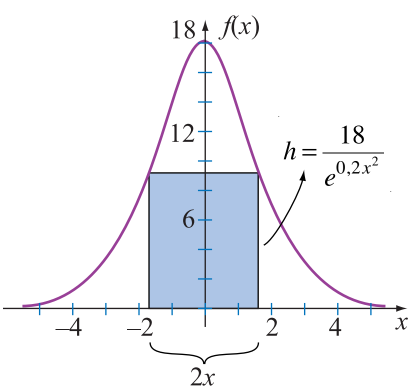


est donné ci-contre. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire sous la courbe de la fonction et dont la base est sur l'axe horizontal.

Solution

Il faut exprimer l'aire du rectangle en fonction de la variable x. Puisque la courbe est symétrique par rapport à l'axe vertical, la base du rectangle est $2x$ et sa hauteur est l'image de x par la fonction, soit

$$h = \frac{18}{e^{0,2x^2}}.$$



L'aire du rectangle est donc

$$A(x) = \frac{36x}{e^{0,2x^2}}.$$

La dérivée première de la fonction est :

$$A'(x) = \frac{36(1-0,4x^2)}{e^{0,2x^2}}.$$

Le dénominateur ne s'annule pas et le numérateur s'annule lorsque

$$1 - 0,4x^2 = 0$$

qui donne $x^2 = 2,5$ et $x = \pm\sqrt{2,5}$. Puisque la courbe est symétrique par rapport à l'axe vertical, on fait un test seulement sur la valeur positive.

On effectue le test de la dérivée première à $x = \sqrt{2,5}$.

La dérivée première s'annule à $x = \sqrt{2,5}$, la tangente est donc horizontale au point correspondant. On détermine le signe de la dérivée à droite et à gauche de $\sqrt{2,5}$ qui vaut approximativement 1,58.

Le dénominateur de la dérivée est toujours positif, son signe est donc celui du numérateur. À $x = 1$, on a :

$$A'(1) = \frac{36(1-0,4)}{e^{0,2x^2}} > 0.$$

À $x = 2$, on a :

$$A'(2) = \frac{36(1-1,6)}{e^{0,2x^2}} < 0.$$

La fonction est donc croissante à gauche de $\sqrt{2,5}$ et décroissante à droite. Elle atteint donc sa valeur maximale à $x = \sqrt{2,5}$.

La base du rectangle est alors $2\sqrt{2,5}$, sa hauteur est $18/e^{0,5}$ et son aire est

$$A = \frac{36\sqrt{2,5}}{e^{0,5}}.$$

Test de la dérivée première			
x	1	1,58	2
$A'(x)$	+	0	–
$A(x)$	↗	max	↘

Volume maximal

EXEMPLE 7.3.3

On doit aménager l'intérieur d'une structure autoportante semi-cylindrique dont le rayon est de 6 m et la longueur de 20 m pour l'utiliser comme entrepôt. Cet aménagement signifie la construction de murs verticaux et d'un plafond et il faut s'assurer que le volume utile soit maximal. Pour ce faire, il faut que l'aire du rectangle inscrit dans le demi-cercle d'une coupe transversale soit maximale. On vous demande de calculer les dimensions du rectangle et le volume utile de l'entrepôt en prenant l'angle θ comme variable indépendante.

OptimTranscend03

Solution

Dans la coupe transversale, la hauteur du rectangle est $h = 6 \sin \theta$ et la base est $b = 2a = 12 \cos \theta$ où $0 < \theta < 90°$.

L'aire de la coupe rectangulaire en fonction de l'angle θ est :

$$A(\theta) = 72 \sin \theta \cos \theta$$

En utilisant l'identité trigonométrique $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, on a

$$A(\theta) = 36 \sin 2\theta.$$

La dérivée première de cette fonction est :

$$A'(\theta) = 72 \cos 2\theta$$

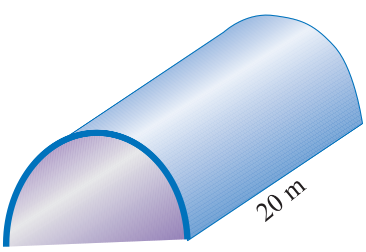
Pour trouver le zéro de la dérivée première, il faut résoudre l'équation trigonométrique :

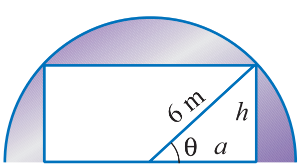
$$\cos 2\theta = 0,$$

on a donc $2\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/4$ rad. La dérivée première s'annule lorsque $\theta = \pi/4$ rad ou 45°. La dérivée seconde est

$$A''(\theta) = -144 \sin 2\theta.$$

Pour confirmer que l'angle de 45° est bien l'angle pour lequel l'aire du rectangle est maximale, appliquons le test de la dérivée seconde.





Coupe transversale

Test de la dérivée seconde			
x		45°	
$A'(x)$		0	
$A''(x)$		–	
$A(x)$		⌒ max	

Puisque $A'(45°) = 0$, la tangente est horizontale au point correspondant et puisque $A''(45°) = -144 < 0$, la courbe est concave vers le bas. La valeur maximale est donc atteinte à 45°.

On a alors $h = 6\sin 45° = 4{,}24$ m, $b = 2x = 12\cos 45° = 8{,}48$ m, d'où

$$V = 8{,}48 \times 4{,}24 \times 20 = 719 \text{ m}^3.$$

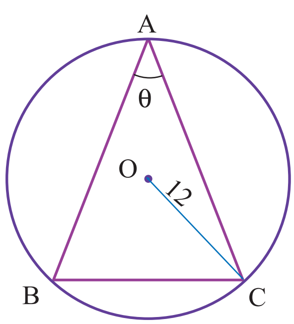
Les dimensions utiles sont $h = 4{,}24$ m, $b = 8{,}48$ m et $l = 20$ m, pour un volume utile de 719 m^3.

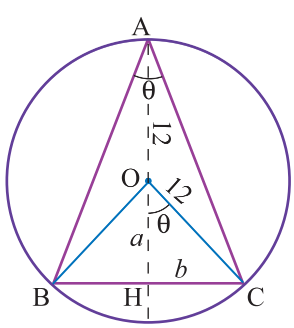
Aire maximale

EXEMPLE 7.3.4

On désire inscrire un triangle isocèle tel qu'illustré à la figure ci-contre dans un cercle de 12 cm de rayon. Trouver la valeur de l'angle θ pour que l'aire du triangle isocèle inscrit dans le cercle soit maximale.

OptimTranscend04





Solution

Joignons le centre du cercle aux extrémités de la base pour construire le triangle OBC. L'angle BOC est égal au double de l'angle θ, car c'est un angle au centre du cercle interceptant le même arc que l'angle inscrit BAC.

On veut maximiser l'aire du triangle ABC qui est donnée par le demi-produit de la base $\overline{\text{BC}}$ et de la hauteur $\overline{\text{AH}}$. De plus, $\overline{\text{BC}} = 2b$ et $\overline{\text{AH}} = 12 + a$. Il nous faut donc exprimer b et a en fonction de l'angle θ dans le triangle rectangle OHC. On trouve alors :

$$a = 12 \cos \theta \quad \text{et} \quad b = 12 \sin \theta.$$

L'aire du triangle isocèle ABC est alors donnée par :

$$A = \frac{\overline{\text{BC}} \times \overline{\text{AH}}}{2} = \frac{2b(12+a)}{2} = \frac{(24\sin\theta)(12+12\cos\theta)}{2}$$
$$= 144[\sin\theta(1+\cos\theta)].$$

La fonction à optimiser est :

$$A(\theta) = 144 \sin \theta\, (1 + \cos \theta).$$

La dérivée première est :

$$A'(\theta) = 144[\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta].$$

Pour trouver les zéros de la dérivée première, il faut résoudre l'équation trigonométrique :

$$\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 0.$$

En transformant cette équation, on obtient :

$$2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0.$$

On obtient donc une équation quadratique dont les zéros sont :

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}, \text{ soit } -1 \text{ et } 1/2.$$

La valeur $\theta = \arccos(-1) = 180°$ est à rejeter car elle n'a aucun sens dans le contexte. La seconde valeur est $\theta = \arccos(1/2) = 60°$. Pour confirmer que c'est l'angle pour lequel l'aire du triangle est maximale, appliquons le test de la dérivée première.

Il nous faut choisir, dans le voisinage de 60°, une valeur d'angle plus petite et une valeur plus grande que 60° et déterminer le signe de la dérivée première pour ces valeurs. Choisissons les angles de 45° et 75°. On a alors :

$$A'(45°) = 144[\cos 45° + \cos^2 45° - \sin^2 45°] = 101{,}82 > 0,$$
$$A'(75°) = 144[\cos 75° + \cos^2 75° - \sin^2 75°] = -87{,}44 < 0.$$

Test de la dérivée première			
θ	45°	60°	75°
$A'(\theta)$	+	0	–
$A(\theta)$	↗	max	↘

Cela confirme que la fonction décrivant l'aire est croissante à gauche de 60° et décroissante à droite. La fonction atteint donc sa valeur maximale lorsque l'angle est de 60°. Ce qui signifie que le triangle doit être équilatéral pour que l'aire soit maximale. Cette aire est :

$$A(60°) = 144 \sin 60° \,(1 + \cos 60°) = 187 \text{ cm}^2.$$

Portée maximale

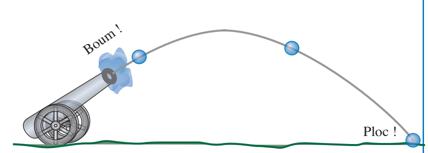
EXEMPLE 7.3.5

En négligeant la résistance de l'air, la portée R, en mètres, d'un projectile est décrite par :

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g},$$

où $g = 9{,}8$ m/s^2, v_0 (m/s) est la vitesse initiale et θ, l'angle d'élévation du projectile au lancement. Démontrer que la portée est maximale lorsque l'angle de lancement est de 45° et calculer cette portée.

OptimTranscend04



Solution

On doit considérer la vitesse initiale comme une constante et g est également une constante. La dérivée première est :

$$R'(\theta) = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\theta$$

et la dérivée seconde est :

$$R''(\theta) = \frac{-4v_0^2}{g} \sin 2\theta.$$

Test de la dérivée seconde			
x		45°	
$A'(x)$		0	
$A''(x)$		–	
$A(x)$		⌒ max	

La dérivée première s'annule à $\theta = \pi/4 = 45°$. En appliquant le test de la dérivée seconde, Puisque $R'(45°) = 0$, la tangente est horizontale au point correspondant et puisque $P''(45°) < 0$, la courbe est concave vers le bas. La portée maximale est donc atteinte à 45°.

Cette portée est l'image de 45° par la fonction :

$$R(45°) = \frac{v_0^2 \sin 90°}{g} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Un peu d'histoire

RÉFLEXION ET RÉFRACTION

Loi de Snell-Descartes

Le phénomène de la réflexion semble avoir été connu dès l'Antiquité comme le révèle l'anecdote des miroirs ardents d'Archimède. Le mathématicien arabe ibn Sahl (940-1000) a rédigé, en 984, un ouvrage sur les miroirs ardents et les lentilles dans lequel il explique comment les miroirs courbes et les lentilles peuvent focaliser la lumière en un point.

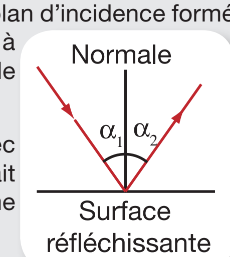
L'astronome, médecin, philosophe et physicien al-Haytam, qui vécut principalement au Caire et qui est né en 965 à Bassorah, dans l'actuel Irak, a rédigé *Discours sur la lumière* qui porte sur l'optique géométrique et physiologique. Selon lui la réfraction de la lumière est causée par un ralentissement ou une accélération de la lumière dans son déplacement. Dans un milieu plus dense la lumière voyage plus lentement selon al-Haytam. Il énonce les lois suivantes :

Propagation de la lumière

Dans un milieu homogène, les rayons lumineux émis par une source lumineuse ponctuelle se propagent en ligne droite le long des rayons d'une sphère centrée à la source.

Lois de la réflexion

1. Le rayon réfléchi est situé dans le plan d'incidence formé par le rayon incident et la normale à la surface réfléchissante au point de réflexion.
2. L'angle que fait le rayon réfléchi avec la normale est égal à l'angle que fait le rayon incident avec cette même normale.

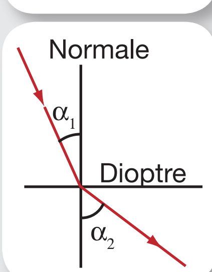


Lois de la réfraction

1. Le rayon réfracté est situé dans le plan d'incidence formé par le rayon incident et la normale à la surface séparant les deux milieux.
2. La deuxième loi a été décrite de diverses façons plus ou moins équivalentes à

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction, α_1 et α_2 sont les angles d'incidence et de réfraction.



En Europe, le premier savant qui s'est intéressé aux problèmes de réflexion et de réfraction est Willebrord Snell van Royen qui, selon la mode de l'époque, avait latinisé son nom en Villebrordus Snellius. Selon Christiaan Huygens, Snell énonça le premier les lois de la réfraction en 1621. Cette découverte qui ne fut pas publiée semble avoir été obtenue empiriquement sans démonstration. Il faut préciser que les travaux d'al-Haytam avaient été traduits à l'époque et étaient certainement connus en Europe. C'est probablement pourquoi Snell n'a pas jugé utile de publier sur le sujet.

Le problème a été repris par Descartes dans son ouvrage *Dioptrique.* Il ne démontre pas les lois, mais il tente d'expliquer le comportement de la lumière en faisant une analogie avec les chocs de particules (NH Descartes05). Dans le cas de la réflexion, il considère que le phénomène est analogue à celui d'une balle frappée par une raquette qui rebondit sur un sol parfaitement plat et dur l'empêchant de passer outre. Dans le cas de la réfraction, il n'utilise pas les sinus pour énoncer la loi, mais l'exprime géométriquement par des rapports en utilisant encore une analogie avec les chocs pour tenter de convaincre de la validité de son énoncé.

Ces explications ne sont pas convaincantes pour Fermat, pourtant, la loi telle qu'énoncée par Descartes est vérifiée expérimentalement. Fermat décide d'étudier le problème en adoptant comme hypothèse de départ que : « La nature agit toujours par les voies les plus simples »(NH Fermat06). De cette hypothèse découle le principe de « moindre temps » selon lequel le chemin suivi par la lumière est celui pour lequel la durée du trajet est minimale. En adoptant ce principe et en appliquant sa méthode de recherche des valeurs extrêmes, Fermat parvient au même résultat que Descartes. Sa démarche est cependant critiquée par plusieurs adeptes de la théorie cartésienne. Pour les cartésiens, le principe des « voies les plus courtes et les plus simples » est un « principe moral, pas un principe de physique et ne peut être la cause d'aucun effet de la nature ».

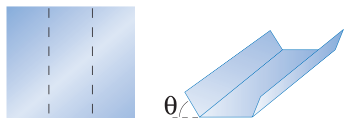
Ce principe qui sera repris par Maupertuis pour devenir le « principe de moindre action » finira par s'imposer. Trente ans après la démonstration de Fermat, Jean Bernoulli (NH Bernoulli), alors de passage à Paris, choisit un problème analogue à celui de la réfraction, qui se résout par la démarche de Fermat et de façon beaucoup plus simple par le calcul différentiel de Leibniz dont il veut montrer l'efficacité. Ce problème est le suivant :

> *Un voyageur partant d'un lieu doit traverser deux campagnes, des champs dirait-on aujourd'hui, séparées par une ligne droite. On suppose qu'il parcourt dans l'une des campagnes un certain espace en un certain temps et dans l'autre un autre espace en un autre temps. Bref, sont données les vitesses du mouvement supposé uniforme et rectiligne dans chaque champ. On demande par quel point de la droite de séparation le voyageur doit passer afin qu'il emploie le moins de temps qu'il est possible pour parvenir de son point de départ à son point d'arrivée.*

Le problème formulé par Jean Bernoulli ne fait pas directement référence à la réfraction, ce qui le met à l'abri des critiques des cartésiens purs et durs.

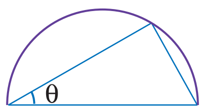
7.4 Exercices

1. On doit utiliser une feuille de métal de 36 cm de largeur pour fabriquer une gouttière en repliant d'un angle θ des bandes de 12 cm de largeur de chaque côté.



Quel doit être l'angle θ pour que la capacité de la gouttière soit maximale?

2. On doit inscrire un triangle rectangle dans un demi-cercle de 16 cm de diamètre.



Quel doit être l'angle θ pour que l'aire du triangle soit maximale?

3. Au cours des cinq premières secondes de sa mise en marche, la puissance requise par un appareil est décrite par :

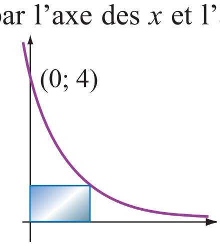
$$P(t) = \frac{600t}{e^t}\ \text{W},$$

où P est la puissance en watts (W) et t est le temps en secondes. À partir de la cinquième seconde, la puissance requise est constante.

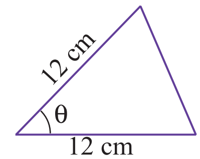
a) Déterminer à quel moment la puissance requise est maximale et calculer cette puissance.

b) Représenter graphiquement la fonction décrivant la puissance requise par cet appareil.

4. Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire sous la courbe $y = \dfrac{4}{e^x}$ et délimité par l'axe des x et l'axe des y.

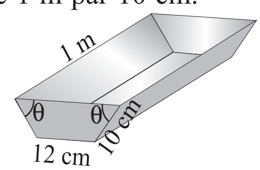


5. Un triangle isocèle a deux côtés de 12 cm de longueur.



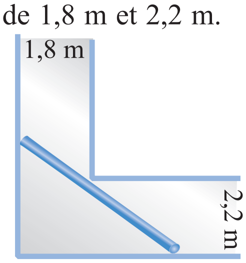
Montrer que l'aire du triangle est maximale lorsque l'angle entre les deux côtés de même longueur est de 90°.

6. Une compagnie veut construire en série des boîtes à fleurs pour les rampes de galerie. Le fond sera constitué d'une planche de 1 m par 12 cm, les extrémités formeront un trapèze isocèle perpendiculaire à la base. Les côtés seront constitués de planches de 1 m par 10 cm.



Calculer l'angle θ du trapèze pour que le volume de terre que les boîtes pourront contenir soit maximal.

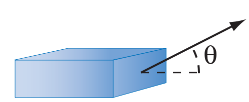
7. Deux corridors situés à angle droit ont des largeurs respectives de 1,8 m et 2,2 m.



Trouver la longueur de la plus grande tige que l'on peut glisser sur le plancher pour passer d'un corridor à l'autre, la tige devant rester horizontale.

8. L'intensité de la force requise pour tirer un objet de masse M sur un plan horizontal à l'aide d'une corde faisant un angle θ avec le plan horizontal est donnée par :

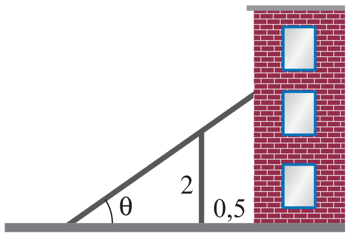
$$F = \frac{\mu M g}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$



où F est l'intensité de la force, g est l'accélération gravitationnelle égale à 9,8 m/s^2, μ est une constante appelé **coefficient de friction** et $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Montrer que l'intensité de la force est minimale lorsque tan θ = μ.

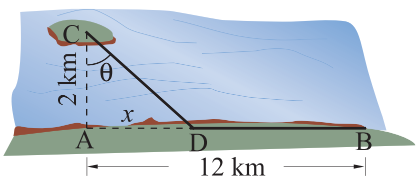
9. Un entrepreneur doit étayer le mur d'un édifice

endommagé par un tremblement de terre. Ce mur sera étayé à l'aide de poutres qui devront prendre appui au sol et passer par dessus une clôture de 2 m située à 0,5 m du mur à soutenir.



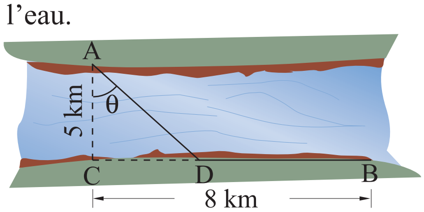
Quelle est la longueur minimale des poutres que l'on peut utiliser pour ce travail? (Exprimer la longueur des poutres en fonction de l'angle θ).

10. Un centre de villégiature C a été implanté sur une île à 2 km de la rive. Pour le ravitaillement, il faut se rendre sur la terre ferme à la ville B située à 12 km du point de la rive le plus rapproché de l'île. Le responsable du ravitaillement estime qu'il peut ramer à une vitesse 2 km/h et marcher à une vitesse de 4 km/h.



Déterminer la direction θ qu'il doit donner au bateau pour que le temps du parcours soit minimal.

11. Une compagnie de téléphone doit établir une liaison souterraine entre les villes A et B situées de part et d'autre d'un fleuve de 5 km de large. Le coût d'enfouissement de cette ligne est de 500 $ du mètre sur la terre ferme et de 850 $ du mètre sous l'eau.



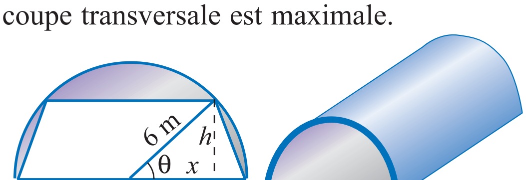
Trouver dans quelle direction θ il faut orienter la ligne à partir de la ville A pour que le coût d'enfouissement total soit minimal.

12. On estime que la puissance requise pour opérer un appareil durant la période transitoire qui suit sa mise en marche est décrite en fonction du temps par :

$$P(t) = \frac{400t^2}{e^t},$$

où le temps t est mesuré en secondes. Déterminer à quel moment la puissance requise est maximale et représenter graphiquement la fonction.

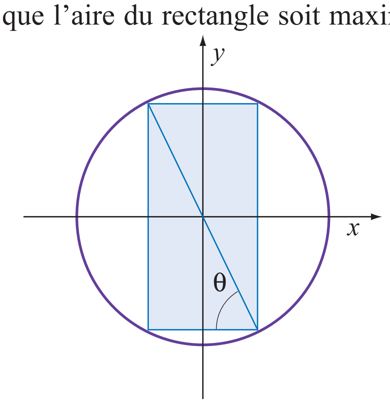
13. On doit aménager l'intérieur d'une structure autoportante semi-cylindrique dont le rayon est de 6 m et de 20 m de longueur pour l'utiliser comme entrepôt. Tel qu'illustré ci-contre, cet aménagement signifie la construction de murs obliques et d'un plafond pour permettre l'isolation et le chauffage de l'entrepôt. Il faut s'assurer que le volume utile sera maximal, cela se produit lorsque l'aire du trapèze isocèle inscrit dans le demi-cercle d'une coupe transversale est maximale.



Coupe transversale

Calculer les dimensions du trapèze et le volume utile de l'entrepôt.

14. Déterminer les dimensions du rectangle que l'on peut inscrire dans un cercle de rayon 6 de telle sorte que l'aire du rectangle soit maximale.



Exprimer la base et la hauteur du rectangle en fonction de l'angle θ et du diamètre du cercle.

Exercices de synthèse

1. Dans certains cas, la vitesse v d'une réaction chimique est proportionnelle à la concentration des réactifs et à celle des produits. La relation est décrite par :

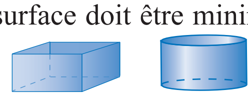
$$v = kx(a - x),$$

où $k > 0$ et x est la concentration d'un produit et a, la concentration en début de réaction. Déterminer pour quelle valeur de x la vitesse de réaction est maximale et donner la valeur de v correspondante.

2. Dans un problème d'optimisation, on a obtenu le modèle suivant ainsi que son domaine de validité. Déterminer les valeurs critiques de la fonction, ses valeurs optimales, construire le tableau des caractéristiques et esquisser le graphique. Déterminer le(s) maximum(s) absolu(s) et le(s) minimum(s) absolu(s) dans le domaine de validité.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1,\ [-3;\ 6].$$

3. Un jardinier amateur décide de se construire un réservoir pour recueillir l'eau de pluie afin d'arroser son jardin. Ce réservoir doit avoir une capacité de 4 m^3 et sa surface doit être minimale.



a) Quelles devraient être les dimensions s'il choisit de construire un réservoir de forme rectangulaire à base carrée?
b) Quelles devraient être les dimensions s'il choisit de construire un réservoir de forme cylindrique?

4. Dans un problème d'optimisation, on a obtenu le modèle suivant ainsi que son domaine de validité. Déterminer les valeurs critiques de la fonction ainsi que le maximum absolu et le minimum absolu dans le domaine de validité.

$$f(x) = x^3e^x,\ [-5;\ 1].$$

5. Dans un problème d'optimisation, on a obtenu le modèle suivant ainsi que son domaine de validité. Déterminer les valeurs critiques de la fonction ainsi que le maximum absolu et le minimum absolu dans le domaine de validité.

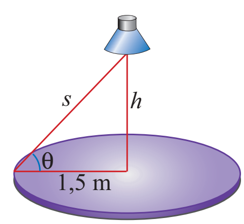
$$f(x) = \cos x(\cos x + 1),\ [0;\ 2\pi].$$

6. Déterminer les valeurs critiques des fonctions suivantes. Déterminer les maxima et minima relatifs de ces fonctions, construire le tableau des caractéristiques et esquisser le graphique. Déterminer le maximum absolu et le minimum absolu dans l'intervalle donné.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 10$, $[-2;\ 6]$
b) $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$, $[-1;\ 8]$
c) $f(x) = (x^2 - 5)e^{0,5x}$, $[-8;\ 3]$
d) $f(x) = x^3/e^{2x}$, $[-0,2;\ 4]$
e) $f(x) = 4x(3 - \ln x)$, $[1;\ e^3]$
f) $f(x) = \sin^3 x$, $[-\pi;\ 2\pi]$

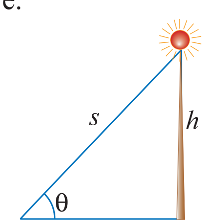
7. Un propriétaire de cabaret veut installer des lampes suspendues en haut de chacune de ses tables qui sont circulaires. Dans de telles conditions, l'intensité lumineuse en un point de la surface de la table est inversement proportionnelle au carré de la distance de ce point à la source et directement proportionnelle à $\sin\theta$ où θ est l'angle d'élévation du point de la surface à la source.

$$I(\theta) = \frac{k}{s^2}\sin\theta,\ \text{où } k \text{ est une constante.}$$



Sachant que les tables ont un rayon de 1,5 m, calculer à quelle hauteur il faut placer les lampes pour que l'intensité lumineuse au bord de la table soit maximale.

8. Dans une avenue nouvellement aménagée, la municipalité envisage d'installer des lampadaires à tous les 16 m. Calculer la hauteur de ces lampadaires pour que l'intensité lumineuse produite par un lampadaire soit maximale à une distance de 8 m du lampadaire.



9. Cinq cent grammes d'une substance radioactive se décomposent selon le modèle :

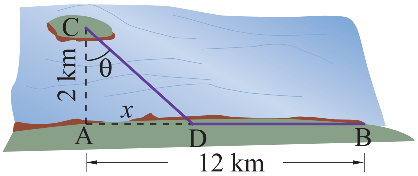
$$Q(t) = 500\ e^{-0{,}000\ 25\ t}$$

où Q est la quantité en grammes après t années.

a) Trouver la fonction décrivant le taux de décomposition en fonction du temps t.

b) Quelle est la quantité restante et le taux de décomposition au bout de 500 ans?

10. Un centre de villégiature C a été implanté sur une île à 2 km de la rive. Pour le ravitaillement, il faut se rendre sur la terre ferme à la ville B située à 12 km du point de la rive le plus rapproché de l'île. Le responsable du ravitaillement estime qu'il peut ramer à une vitesse 2 km/h et marcher à une vitesse de 4 km/h.



a) En considérant x comme variable indépendante, déterminer la valeur de x pour que le temps du parcours soit minimal.

b) Déterminer la distance x pour que le temps de parcours soit maximal.

11. Trouver les points de la courbe $y^2 = 4x$ les plus rapprochés du point (5; 0).

12. Trouver l'équation de la tangente et de la normale à la courbe de la fonction au point indiqué.

a) $f(x) = (x^2 - 3)e^{x/2}$ au point $(2; e)$

b) $f(x) = \sin^3 x$ au point $(\pi/6; 1/8)$

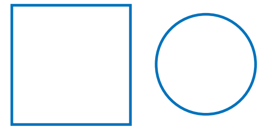
13. Déterminer un modèle d'approximation linéaire pour les fonctions suivantes et utiliser ce modèle pour estimer les images demandées.

a) $f(x) = (x^2 - 5)e^x$. En considérant $(2; -e^2)$ comme centre d'approximation linéaire, estimer $f(1{,}9)$ et $f(2{,}1)$.

b) $f(x) = 4x(3 - \ln x)$. En considérant (1; 12) comme centre d'approximation linéaire, estimer $f(0{,}85)$ et $f(1{,}15)$.

c) $f(x) = \sin^3 x$. En considérant $(\pi/6; 1/8)$ comme centre d'approximation linéaire, estimer $f(0{,}52)$ et $f(0{,}54)$.

14. Un fil de 160 cm doit être coupé en deux parties pour former un carré et un cercle.

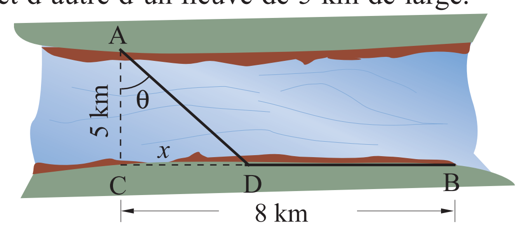


a) Déterminer la longueur des deux parties pour que la somme des aires soit minimale.

b) Déterminer la longueur des deux parties pour que la somme des aires soit maximale.

c) La valeur obtenue en a) est-elle un minimum relatif ou un minimum absolu ? La valeur obtenue en b) est-elle un maximum relatif ou un maximum absolu ?

15. Une compagnie de téléphone doit établir une liaison souterraine entre les villes A et B situées de part et d'autre d'un fleuve de 5 km de large.



En se basant sur les coûts de projets déjà réalisés par la compagnie, les ingénieurs estiment que le coût d'enfouissement de cette ligne sera de 500 $ du mètre sur la terre ferme et de 850 $ du mètre sous l'eau.

a) En considérant x comme variable indépendante et en supposant que l'estimation des ingénieurs est juste, déterminer la distance x pour que le coût d'enfouissement total soit minimal. Calculer, dans ces conditions, la longueur du trajet sous l'eau et le coût total du projet.

b) Des travaux d'étude des sols ont été réalisés en vue de la mise en chantier. Une nouvelle estimation des coûts a été faite à partir des résultats de cette analyse. Selon cette nouvelle estimation, le coût d'enfouissement ligne sera de 650 $ du mètre sur la terre ferme et de 1200 $ du mètre sous l'eau. En vous basant sur cette nouvelle estimation, déterminer la distance x pour que le coût d'enfouissement total soit minimal. Calculer, dans ces conditions, la longueur du trajet sous l'eau et le coût total du projet?

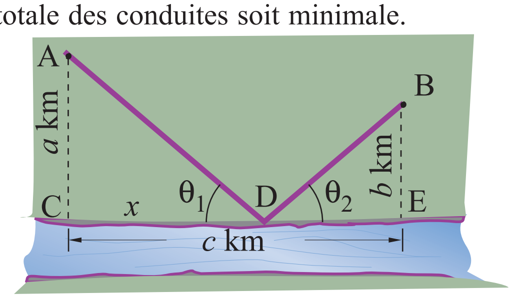
16 On a établi le modèle suivant pour décrire le mouvement amorti.

$$p(t) = e^{-0,5t} \sin 2t,$$

où t est le temps en seconde et p, la position en mètres du corps par rapport à la position d'équilibre.

a) Esquisser le graphique de ce mouvement amorti durant l'intervalle de temps [0; 12].
b) Déterminer la différentielle de la position dans l'intervalle [1; 1,5].
c) Calculer la vitesse au temps $t = 0$.
d) Déterminer l'accélération au temps $t = 0$.
e) Calculer la vitesse au temps $t = 1$.
f) Déterminer l'accélération au temps $t = 1$.

17. Deux municipalités non fusionnées désirent construire une station de pompage commune pour s'alimenter en eau. On désire déterminer l'emplacement de la station de telle sorte que la longueur totale des conduites soit minimale.



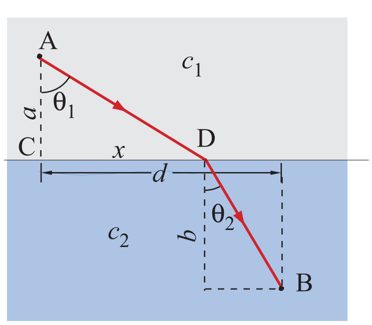
a) Montrer que la longueur de la conduite est minimale lorsque :

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 + a^2}}.$$

b) En déduire que cela se produit lorsque les angles θ_1 et θ_2 sont égaux.

18. La vitesse de la lumière dépend de son milieu de propagation. De plus, selon le principe de Fermat en optique géométrique, pour aller d'un point à un autre, la lumière suit toujours le trajet qui minimise le temps de parcours.

NH Descartes05, NH Fermat06



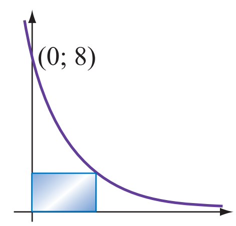
a) Montrer que pour aller d'un point A situé dans un milieu où sa vitesse est c_1 à un point B où sa vitesse est c_2, la lumière suit le trajet tel que:

$$\frac{x}{c_1\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{d - x}{c_2\sqrt{(d - x)^2 + b^2}}.$$

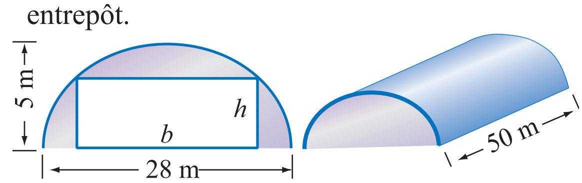
b) En déduire la loi de Snell, c'est-à-dire :

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

19. Trouver les dimensions du rectangle d'aire maximale que l'on peut inscrire sous la courbe d'équation $y = 8e^{-0,5x}$ et délimité par l'axe des x et l'axe des y.



20. On doit aménager l'intérieur d'une structure autoportante de forme elliptique pour l'utiliser comme entrepôt.

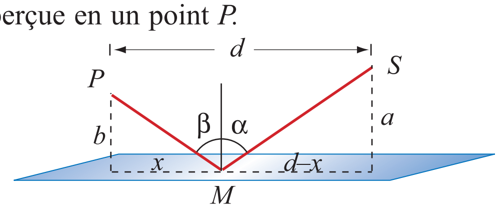


Coupe transversale

Cet aménagement signifie la construction de murs verticaux et d'un plafond et il faut s'assurer que le volume utile sera maximal. Cela se produit lorsque l'aire du rectangle inscrit dans la demi-ellipse d'une coupe transversale est maximale.

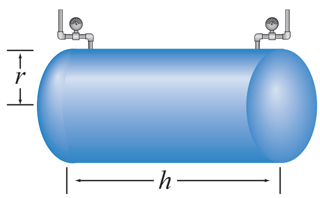
Calculer les dimensions du rectangle et le volume utile de l'entrepôt.

21. En optique, le principe de Fermat stipule que le trajet effectué par la lumière rend le temps de parcours minimal. Pour cette raison, dans un milieu homogène, le trajet de la lumière est une droite. Supposons que la lumière émise par une source S est réfléchie par un miroir en un point M et est perçue en un point P.



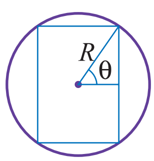
Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque l'angle d'incidence α est égal à l'angle de réflexion β. (Suggestion: le milieu étant homogène, la vitesse de la lumière est constante et pour minimiser le temps de parcours, il suffit de trouver le trajet minimal.)

22. Une compagnie doit fabriquer des réservoirs pour le gaz propane d'une capacité de 3 m^3.

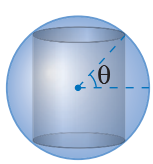


La partie centrale du réservoir est un cylindre et les extrémités sont des hémisphères. Pour minimiser le coût des matériaux de ces réservoirs, on veut minimiser l'aire de la surface. Déterminer le rayon et la longueur de la partie cylindrique pour atteindre cet objectif.

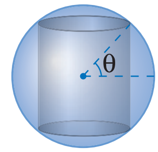
23. Déterminer l'angle θ pour lequel l'aire du rectangle inscrit dans le cercle de rayon R est maximale.



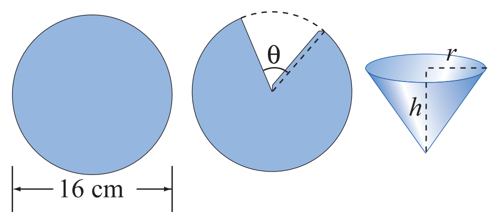
24. Déterminer l'angle θ pour lequel le volume du cylindre inscrit dans la sphère de rayon R est maximal.



25. Déterminer l'angle θ pour lequel l'aire du cylindre inscrit dans la sphère de rayon R est maximale.



26 On utilise des feuilles circulaires de papier de 16 cm de diamètre pour former des cônes servant de verres. Une machine découpe un secteur circulaire en laissant une languette de collage et l'ajustement de la machine se fait en déterminant l'angle θ du secteur circulaire.



a) Montrer que le rayon r du verre conique est

$$r = \frac{4}{\pi}(2\pi - \theta).$$

b) Montrer que la hauteur h du verre conique est

$$h = \frac{4}{\pi}\sqrt{4\pi\theta - \theta^2}.$$

c) Exprimer le volume du cône en fonction de l'angle θ.

d) Déterminer la valeur de θ pour laquelle le volume du verre est maximal.

e) Calculer le volume maximal du verre.