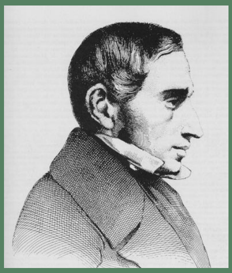


Pierre-François Verhulst
1805-1849

Poursuivant les travaux de Malthus, le mathématicien Belge Pierre-François Verhulst a introduit une fonction de freinage de la croissance de la population. Il s'agit d'un modèle dont la validité est basée sur les données observées et dont on peut se servir pour faire des prévisions sans que celles-ci aient un caractère déterministe.

Pierre-François Verhulst

Le mathématicien belge Pierre-François Verhulst est né à Bruxelles le 28 octobre 1804. Il étudie les mathématiques sous la direction d'Adolphe Quételet (Quételet) à l'Athénée royal de Bruxelles et poursuit ses études à l'université de Gand. À vingt ans, l'Université de Leyde lui décerne le prix scientifique pour un mémoire sur « le problème des maxima et minima ». L'année suivante, un mémoire sur le calcul des variations lui permet de remporter la médaille d'or de la Faculté des Sciences de la Faculté des Sciences de l'Université de Gand. En 1825, âgé de 21 ans, il soutient sa thèse de doctorat sur les équations binômes[1].

De retour à Bruxelles, il collabore avec Quételet et celui-ci lui suggère d'appliquer ses connaissances mathématiques aux statistiques et à la démographie et de développer un modèle de croissance d'une population qui ne soit pas exponentiel. Il étudie l'« Essai sur le principe de population » de Thomas Malthus (1766-1834), paru en 1798.[2] (Malthus)

1. Une équation binôme comporte deux termes, $x^n - A = 0$, où x et A peuvent être des entienrs des réels ou des complexes.
2. Dans son essai, Malthus soutient la thèse que les ressources croissent selon une progression arithmétique alors qu'une population en croissance libre croît selon une progression géométrique avec toutefois quelques freins dont certains sont préventifs et freinent l'accroissement de la population et d'autres sont destructifs, comme un accroissement du taux de mortalité.

En plus des mathématiques, Verhulst est très engagé dans les combats politiques et sociaux de son époque en Belgique. Il lutte pour l'amélioration des conditions de vie des pauvres. En 1929, il collabore brièvement comme enseignant de mathématiques dans des cours publics organisés par le Musée de Bruxelles.

En 1830, atteint de la tuberculose, il se rend en Italie pour soigner sa maladie dans un meilleur climat. Malgré son implication politique, il est absent lors de la révolution de Bruxelles.[3]

Sa carrière de professeur débute véritablement en 1834 à l'École militaire. Il entreprend alors la rédaction d'un *Traité élémentaire sur les fonctions elliptiques* qui fait connaître les travaux de Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Niels Henrik Abel (1802-1829) (Abel01) et Charles Gustave Jacobi (1804-1851). La parution de cet ouvrage, en 1841 lui ouvre les portes de l'*Académie royale de Belgique.*

Modélisation des populations

En demandant à Verhulst de développer un modèle de croissance des populations, Quételet s'attend à ce que celui-ci parvienne à démontrer l'exactitude de sa théorie mécaniste de la croissance d'une population qui repose sur deux principes :

3. La révolution de Bruxelles, en 1830, est la révolte de plusieurs provinces du sud du Royaume des Pays-Bas contre le roi Guillaume Ier. Elle mena à la scission du royaume et à l'indépendance de la Belgique proclamée par le Gouvernement provisoire de Belgique le 28 septembre 1830.

- La population tend à croître selon une progression géométrique[4], ce qui signifie que sans frein, le taux de variation de la population serait de la forme
$$\frac{dP}{dt} = aP;$$
- la somme des obstacles, ou résistance, au développement d'une population est proportionnelle au carré de la vitesse de développement de cette population.[5]

Après diverses tentatives, Verhulst développe une autre approche. Il renonce à déterminer une « loi » permettant de prédire avec précision la croissance et cherche à incorporer un modèle qui s'ajuste assez bien aux données disponibles en considérant diverses fonctions retardatrices de la croissance de la population. Cette fonction doit dépendre de la taille de la population et, parmi celles envisagées, il évalue quatre formes de fonctions,

$$g(P) = aP^2/M,\ g(P) = aP^3/M,$$
$$g(P) = aP^4/M \text{ et } g(P) = a\log(P)/M,$$

Il retient « l'hypothèse la plus simple », soit la fonction $g(P) = aP^2/M$. En soustrayant cette fonction de freinage de l'équation du taux de variation,

$$\frac{dP}{dt} = aP - g(P) = aP - \frac{ap^2}{M}.$$

Ses résultats sont présentés en trois publications (1838-1845-1847). Verhulst démontre que ce modèle décrit bien l'évolution de la population en Belgique et en France, jusqu'en 1833.

Par mise en évidence, 'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(1 - \frac{P}{M}\right),$$

où P est l'effectif de la population au temps t, a est le **taux de croissance maximum** et le paramètre M est appelé **capacité porteuse**. En résolvant l'équation différentielle, on obtient que la taille de la population est décrite par un modèle de la forme

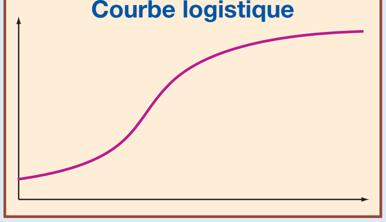
$$P(t) = \frac{M}{1 + b_0 e^{-at}},\ \text{où } b_0 = \frac{M - P_0}{P_0}.$$

On rencontre également la forme équivalente

$$P(t) = \frac{Me^{at}}{b_0 + e^{at}}.$$

Le graphique de cette courbe est en forme de S allongé.

Courbe logistique



Dans son article de 1845, Verhulst appelle **courbe logistique** la courbe représentant graphiquement cette fonction. Il ne donne cependant aucune justification à ce choix.

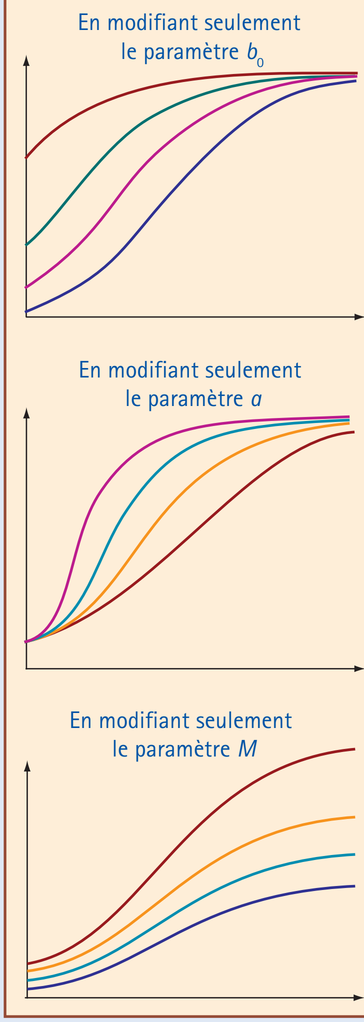
Verhulst met fin au souhait de Quételet de déterminer une loi de la croissance d'une population calquée sur les lois de la physique et ouvre la voie à une approche nouvelle, l'utilisation de modèles qui s'ajustent assez bien aux données, mais qui ne sont pas déterministes comme les lois de la physique.

Verhulst meurt à Bruxelles le 15 février 1849. Son modèle est tombé dans l'oubli pour être redécouvert dans les années 1920 par Raymond Pearl (1879-1940). Celui-ci, spécialiste de l'étude des populations humaines, veut montrer comment modéliser des données à partir d'un concept mathématique et, pour ce faire, il utilise des données obtenues par d'autres chercheurs.

Depuis, les chercheurs L.J. Reed (1886-1966) et J. Berkson (1899-1982) ont observé que la courbe logistique permettait de modéliser des réactions autocatalytiques[6] en chimie.

4. Dans le cas d'une variation continue, la progression géométrique est une fonction exponentielle.
5. Quételet semble s'être inspiré de la résistance en aérodynamique pour poser son principe de résistance à la croissance d'une population.
6. Une réaction autocatalytique est une réaction chimique dont le catalyseur figure parmi les produits de la réaction.

Ajustements de la courbe



Forme générale

L'équation différentielle de la courbe logistique est plus connue sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x)$$

que l'on obtient en divisant par M les deux membres de l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

et en posant $x = P/M$.