MODÈLE EXPONENTIEL *en* GESTION

CHAPITRE 7

Résoudre des problèmes de gestion à l'aide du modèle exponentiel et des logarithmes.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- l'utilisation du modèle exponentiel pour modéliser un problème de dépréciation;
- l'utilisation des exposants pour résoudre des problèmes d'équivalence de taux;
- l'utilisation du modèle exponentiel pour décrire des phénomènes de croissance ou de décroissance limitée.

OBJECTIFS

7.1 Résoudre des problèmes du domaine de la gestion nécessitant l'utilisation de modèles exponentiels.

7.2 Calculer la valeur future et la valeur actuelle d'un placement ou d'un prêt.

7.3 Résoudre des problèmes nécessitant le calcul d'un taux réel connaissant le taux périodique.

7.4 Utiliser un modèle exponentiel pour analyser un phénomènes de croissance ou de décroissance limitée

7.1 Capital et intérêt

Le chapitre précédent nous a permis de construire des modèles exponentiels lorsque la croissance ou la décroissance est à un taux constant. Nous allons maintenant étudier plus en détail des situations de gestion modélisables par des fonctions exponentielles. Nous accorderons une attention particulière à la croissance d'un capital : calcul de la valeur future, calcul du temps, calcul du taux et calcul de la valeur actuelle. Ces notions seront approfondies au chapitre suivant dans une étude des annuités.

ModExpoGestion01

Valeur future et valeur actuelle

EXEMPLE 7.1.1

On place un montant de 5 000 $ à un taux d'intérêt mensuel de 1,5 %.

a) Déterminer un modèle mathématique décrivant la valeur du capital après n mois. Esquisser le graphique de cette fonction.

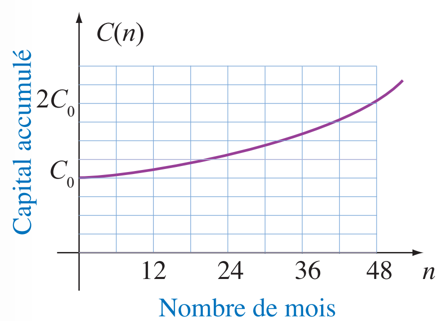
b) Déterminer le montant accumulé dans 52 mois.

c) À quel moment le capital aura-t-il triplé ?

Solution

a) Représentons par $C(n)$ le capital accumulé après n mois. On a alors $C(n) = 5\,000(1{,}015)^n$.

Périodes	Capital	Capital ($)
0	$1{,}00C_0$	5 000,00
12	$1{,}20C_0$	5 978,09
24	$1{,}43C_0$	7 147,51
36	$1{,}71C_0$	8 545,70
48	$2{,}04C_0$	10 217,39



b) Le capital accumulé dans 52 mois sera

$$C(52) = 5\,000\,(1{,}015)^{52} = 10\,844{,}37\ \$.$$

c) On cherche la valeur de n pour laquelle le capital sera de 15 000 $, soit

$$C(n) = 5\,000\,(1{,}015)^n = 15\,000\ \$.$$

En divisant les deux membres de l'équation par 5 000, on a

$$(1{,}015)^n = 3.$$

Prenons le logarithme des deux membres

$$n \ln 1{,}015 = \ln 3.$$

d'où $n = \dfrac{\ln 3}{\ln 1{,}015} = 73{,}79.$

Le capital aura triplé dans 74 mois.

Valeur future et valeur actuelle

On appelle **valeur future** (ou valeur cumulée) d'un capital la valeur C (ou $C(n)$) de ce capital ayant été placé à un taux périodique fixe pour n périodes.

On appelle **valeur actuelle** d'une somme C payable dans n périodes le capital initial C_0 qu'il faut placer à un taux périodique fixe pendant n périodes pour accumuler la somme C (ou $C(n)$).

REMARQUE

Dans cette relation entre la valeur future et la valeur actuelle, il y a quatre composantes: la valeur actuelle du capital, sa valeur future, la durée du placement et le taux d'intérêt. Dans la résolution des problèmes, on peut avoir à calculer n'importe laquelle de ces composantes.

La relation entre la valeur future C et la valeur actuelle C_0 est également utilisée pour calculer la valeur actuelle lorsqu'on connaît la valeur future. En effet, puisque

$$C = C_0(1 + i)^n,$$

on a $C_0 = C/(1+i)^n$ ou $C_0 = C(1+i)^{-n}$.

THÉORÈME

Valeur future d'un capital

La valeur future C d'un capital initial C_0 placé à un taux d'intérêt périodique i pour une durée de n périodes est décrite par

$$C(n) = C_0\,(1 + i)^n.$$

Il est à noter que ce résultat a déjà été présenté au chapitre précédent.

EXEMPLE 7.1.2

Calculer la valeur demandée :

a) La valeur future d'un montant de 15 000 $ placé à un taux semestriel de 4 % pendant 8 ans.

b) La valeur actuelle d'une somme de 12 000 $ payable dans 5 ans sachant que le taux est de 8 % capitalisé annuellement. Interpréter ce résultat.

ModExpoGestion02

Solution

a) La valeur actuelle est $C_0 = 15\,000$. Le taux $i = 0{,}04$ étant semestriel, les périodes sont donc de 6 mois. Comme le placement est d'une durée de 8 ans, il y a donc 16 périodes. La relation entre la valeur actuelle et la valeur future est alors

$$C(n) = 15\,000\,(1{,}04)^n,$$

d'où $$C(16) = 15\,000\,(1{,}04)^{16} = 28\,094{,}72 \text{ \$}.$$

b) La valeur future est $C = 12\,000$, le taux $i = 0{,}08$ est capitalisé annuellement et $n = 5$, ce qui donne

$$12\,000 = C_0\,(1{,}08)^5$$

$$C_0 = \frac{12\,000}{(1{,}08)^5} = 8\,166{,}99 \text{ \$}.$$

Un paiement de 12 000 $ dans 5 ans équivaut donc à un paiement actuel de 8 167 $. Cela signifie qu'il faudrait placer dès maintenant un montant de 8 167 $ à un taux de 8 % capitalisé annuellement pour faire le paiement de 12 000 $ dans 5 ans. Mais on peut également dire qu'en faisant le paiement dès maintenant il suffirait de verser 8 167 $.

Calcul du taux

ModExpoGestion03

EXEMPLE 7.1.3

À quel taux capitalisé annuellement faut-il placer un montant de 4 500 $ pour accumuler un montant de 9 000 $ en 8 ans ?

Solution

La valeur future est C = 9 000, la valeur actuelle est C_0 = 4 500 et le nombre de périodes est 8. On a donc

$$4\,500\,(1 + i)^8 = 9\,000\,,$$

d'où $$(1 + i)^8 = 2.$$

On peut résoudre en prenant la racine huitième des deux membres de l'égalité. Puisqu'il s'agit d'une racine paire, on obtient une valeur positive et une valeur négative, soit

$$1 + i = \pm\,1{,}0905.$$

Puisque $1 + i$ représente un taux d'intérêt, la valeur négative est à rejeter, et on a

$$1 + i = 1{,}0905,$$

d'où $$i = 0{,}0905 = 9{,}05\ \%.$$

Calcul du temps

EXEMPLE 7.1.4

Pendant combien de temps doit-on placer un capital de 8 000 $ à un taux semestriel de 3,5 % pour doubler ce capital ?

Solution

La valeur actuelle est de 8 000 $, la valeur future est de 16 000 $ et le taux de 0,035 est semestriel. On a donc

$$16\,000 = 8\,000\,(1{,}035)^n$$

d'où $$2 = (1{,}035)^n$$

En prenant le logarithme des deux membres de l'égalité, on a

$$\ln(1{,}035)^n = \ln 2$$

$$n\,\ln(1{,}035) = \ln 2$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}035)} = 20{,}15.$$

Il faut donc placer le montant pour plus de 20 semestres, soit pendant 21 semestres ou pendant 10 ans et 6 mois pour au moins doubler le capital initial.

PROCÉDURE

Calcul du paramètre inconnu, capitalisation à taux périodique

1. Identifier les données du problème.
2. Identifier le paramètre inconnu.
3. Substituer les données du problème dans le modèle $C = C_0\,(1 + i)^n$.
4. Isoler le paramètre inconnu en utilisant les propriétés des exposants et des logarithmes.
5. Interpréter le résultat dans le contexte.

Dans les situations que nous avons étudiées jusqu'à maintenant, on donnait toujours le taux périodique. En pratique, les institutions financières affichent un taux annuel qui est capitalisé plusieurs fois dans l'année, ce qui signifie que l'intérêt est versé plusieurs fois dans l'année. Un taux annuel capitalisé plusieurs fois par année est appelé un **taux nominal**.

Taux nominal et taux réel

ModExpoGestion04

Vous venez de recevoir un retour d'impôt de 2 000 $ pour votre emploi d'été. Vous songez à placer ce montant et vous avez consulté trois institutions financières pour trouver laquelle offre les conditions les plus avantageuses. La première institution (B_1) offre un taux annuel de 9 % et celui-ci est versé à la fin de l'année. La deuxième institution (B_2) offre un taux annuel de 9 % et l'intérêt est versé quatre fois par année, à raison de 2,25 % à chaque versement. La troisième institution (B_3) offre un taux annuel de 9 % et l'intérêt est versé mensuellement, à raison de 0,75 % à chaque versement. Quelle institution offre les meilleures conditions ?

À première vue, les conditions semblent équivalentes, puisque

$$4\times\ 2{,}25\ \% = 9\ \% \text{ et } 12\times\ 0{,}75\ \% = 9\ \%.$$

Cependant, il ne faut pas oublier que l'intérêt versé en cours d'année s'ajoute au capital et rapporte lui aussi de l'intérêt. Pour pouvoir comparer les conditions, il faut calculer le capital accumulé à la fin de l'année pour chacune des institution.

Pour l'institution B_1, il y a une période de capitalisation à un taux de 9 %, ce qui donne

$C(1) = 2\ 000(1{,}09)^1 = 2\ 180$ \$, soit 180 $ d'intérêts.

Pour l'institution B_2, il y a quatre périodes de capitalisation à un taux de 2,25 %, ce qui donne

$C = 2\ 000(1{,}0225)^4 = 2\ 186{,}17$ \$, soit 186,17 $ d'intérêts.

Pour l'institution B_3, il y a douze périodes de capitalisation à un taux de 0,75 %, ce qui donne

$C = 2\ 000(1{,}0075)^{12} = 2\ 187{,}61$ \$, soit 187,61 $ d'intérêts.

C'est donc la banque B_3 qui offre les meilleures conditions. La différence de 7,61 $ peut sembler négligeable, mais lorsque le capital placé est plus important et que la durée du placement est plus longue, la différence est appréciable.

Les taux affichés par les institutions financières sont la plupart du temps capitalisés plus d'une fois par année, et il faut en tenir compte dans les calculs.

Taux nominal, taux périodique et taux réel

On appelle **taux nominal**, que l'on note $(j; m)$, un taux annuel j qui est composé m fois par année.

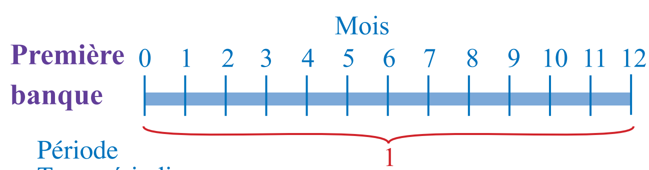
On appelle **taux périodique**, que l'on note i, le taux qui s'applique à chaque période de capitalisation.

On appelle **taux réel** ou **taux effectif**, que l'on note r, le taux réellement payé annuellement. On l'obtient en ramenant le taux périodique sur une base annuelle.

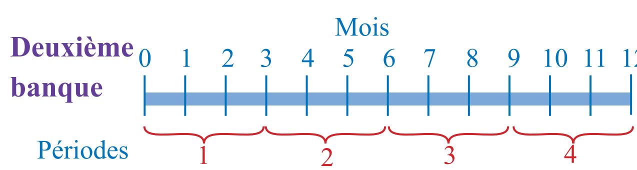
Taux équivalents

Deux taux sont **équivalents** s'ils donnent le même rendement pour un même capital et une même durée.

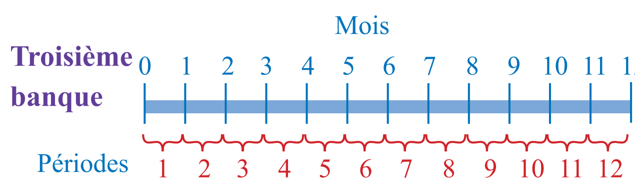
La durée utilisée pour juger de l'équivalence des taux est normalement l'année. L'illustration suivante donne le taux réel versé par chacune des banques de la mise en situation.



Taux périodique 9 %
Taux réel $(1{,}09)^1 = 1{,}09$ d'où $r = 0{,}09$ ou 9 %



Taux périodique 2,25 %
Taux réel $(1{,}0225)^4 = 1{,}09308$ d'où $r = 0{,}09308$ ou 9,31 %



Taux périodique 0,75 %
Taux réel $(1{,}0075)^{12} = 1{,}09381$ d'où $r = 0{,}09381$ ou 9,38 %

Le calcul du taux réel constitue une autre forme de comparaison des conditions offertes par les différentes institutions financières. Le taux réel versé par la troisième banque est le plus avantageux, ce qui confirme ce que nous avions constaté en calculant le capital accumulé après un an pour les différentes banques. Le taux nominal est donné en pourcentage avec deux décimales mais le nombre de décimales retenues dans le taux périodique et le taux réel dépend du montant dont on calcule l'intérêt. On conserve plus de décimales pour un placement de 1 000 $ que pour un placement de 10 $.

ModExpoGestion05

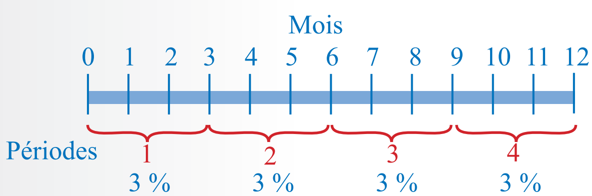
EXEMPLE 7.1.5

Calculer le taux périodique et le taux réel équivalents à un taux nominal de 12 % capitalisé trimestriellement.

Solution

Puisqu'il y a quatre périodes de capitalisation dans l'année, le taux périodique est

$$i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03.$$



Le taux périodique est de 3 % par trimestre. Le taux réel est donc le taux r pour lequel

$$1 + r = (1{,}03)^4 = 1{,}1255.$$

Le taux réel est donc $r = 0{,}1255$ ou 12,55 %.

REMARQUE

Pour calculer la valeur future ou la valeur actuelle d'un capital, il faut déterminer le taux périodique et le nombre de périodes.

EXEMPLE 7.1.6

Calculer la valeur future d'un capital de 15 000 $ placé pour 6 ans à un taux nominal de 12 % capitalisé mensuellement. Quel est le taux réel de ce placement ?

Solution

La valeur actuelle est $C_0 = 15\ 000$, le nombre de périodes est 72 et le taux périodique est

$$i = \frac{j}{m} = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01.$$

En substituant cette valeur dans $C(n) = C_0(1 + i)^n$

on trouve $C(72) = 15\ 000\ (1{,}01)^{72} = 30\ 706{,}49$ $

Le taux réel est $1 + r = (1{,}01)^{12} = 1{,}126825$

d'où $r = 0{,}126825$

Le taux réel est donc de 12,68 %.

Croissance d'une population

En gestion, le recours aux modèles de croissance exponentielle ne se limite pas aux problèmes de capitalisation. On rencontre aussi, par exemple, des problèmes dont la solution nécessite la modélisation de la croissance d'une population.

ModExpoGestion06

EXEMPLE 7.1.7

La municipalité de banlieue pour laquelle vous travaillez est en pleine croissance. La population, qui est actuellement de 17 500 personnes, a connu une augmentation annuelle de 5,2 % au cours des 2 dernières années.

a) Vous faites partie de l'équipe de planification du développement de la municipalité et on vous a demandé de déterminer une fonction permettant de prévoir la population de la municipalité au cours des 5 prochaines années. En supposant que le taux de croissance de la population demeurera constant, quelle est cette fonction et quelle sera la population dans 5 ans ?

b) Durant la présentation de vos résultats, l'économiste de la municipalité a contesté vos conclusions en alléguant que le ralentissement économique aura un impact sur la croissance de la municipalité, car le nombre de jeunes ménages désirant acquérir une maison neuve va diminuer. L'économiste prétend que le taux d'accroissement pour les 5 prochaines années sera plutôt de 2,4 %. Si vous tenez compte de cette information, quelle serait la fonction décrivant la population pour les prochaines années et quelle sera la population dans 5 ans ?

Solution

a) Soit P la population de la municipalité, la fonction cherchée est de la forme

$$P(t) = P_0\,(1{,}052)^t$$

où t est le nombre d'années à partir d'aujourd'hui et P_0 est la population au temps $t = 0$. La fonction est donc

$$P(t) = 17\,500\,(1{,}052)^t$$

et $$P(5) = 17\,500\,(1{,}052)^5 = 22\,548$$

b) Dans ces conditions, la fonction est

$$P(t) = 17\,500\,(1{,}024)^t$$

et la population, dans cinq ans, sera environ

$$P(5) = 17\,500\,(1{,}024)^5 = 19\,703.$$

Paramètres d'une croissance de capital

La relation générale d'une croissance de capital est

$$C(n) = C_0(1+ i)^n.$$

La valeur actuelle est C_0 et la valeur future est C. La base du modèle exponentiel est $1 + i$, où i est le taux périodique. Si le taux donné est nominal $(j; m)$, il faut calculer le taux périodique $i = j/m$ et calculer le nombre n de périodes.

Un peu *d'histoire*

AVÈNEMENT DES LOGARITHMES

Il n'y a pas de génération spontanée dans le développement de la connaissance. Plusieurs savants s'intéressent aux problèmes qui se posent à leur époque, chacun apporte sa contribution. Les notions finissent pas être clairement définies, mais leur forme continue à évoluer grâce à ceux et celles qui doivent les enseigner pour en favoriser la compréhension et l'utilisation.

Le développement des logarithmes ne fait pas exception. Plusieurs savants ont cherché, dès la fin du XVIe siècle, des méthodes pour simplifier les opérations de multiplication et de division. La recherche scientifique, particulièrement en astronomie, était entravée par la lourdeur des calculs à effectuer. Les problèmes liés à la navigation, qui a pris son essor avec la découverte de l'Amérique, nécessitent aussi beaucoup de calculs. Tous les gens qui ont à effectuer ces calculs cherchent des moyens pour en alléger le fardeau.

La nécessité de simplifier les calculs ne venait pas seulement du domaine scientifique. Le développement des banques, le commerce entre les villes et entre les pays, le crédit et le prêt de l'argent rendaient incontournable le développement de méthodes de calculs d'intérêts composés connues de tous pour éviter que les gens soient indûment lésés.

Les problèmes de taux d'intérêt étaient connus depuis longtemps. Dans la *Summa de Arithmetica* publié à Venise en 1494, Luca Pacioli (1445-1517) pose le problème suivant : en combien d'années un capital est-il doublé lorsqu'il est placé à intérêts composés ? Il donne en réponse que le temps pour doubler un capital placé à r% d'intérêts composés est $n = 72/r$. La méthode simple pour calculer le nombre d'années est d'utiliser les logarithmes, après avoir exprimé sous forme exponentielle la relation entre la valeur actuelle, la valeur future, le taux d'intérêt et la durée

À la fin du XVIe siècle, le moine et mathématicien allemand Michaël Stifel (1486-1567) (NH Stifel) observe l'intérêt de mettre en parallèle une progression arithmétique et une progression géométrique, ce qui constitue un premier pas dans l'invention des logarithmes. Cependant, Stifel n'a pas l'idée, ou le goût, de calculer les correspondances pour des valeurs intermédiaires dans ces progressions. Sans ces valeurs, l'usage de cette correspondance entre les progressions arithmétique et géométrique ne peut être très utile.

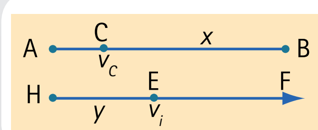
En 1582, le savant hollandais Simon Stevin (1548-1620) (NH Stevin01) met au point des tables de calculs d'intérêts composés intitulées *Tafelen van Interest* (*Table d'intérêt*). Il indique qu'il a été amené à composer ces tables « parce que le profit commun se doit préférer au particulier, et qu'auparavant il existait quelque chose de semblable, en usage chez quelques personnes aux Pays-Bas; mais on le tenait soigneusement caché comme un grand secret, et ensuite la composition de telles tables était connue à fort peu de personnes ». Le travail de Stevin est poursuivi par Jost Bürgi (1552-1632). Astronome de la cour du Landgrave de Hesse à Kassel, il répare et améliore les instruments et en construit de nouveaux. En 1588, il développe une table de correspondance qui constitue le premier système logarithmique connu. Cependant, il ne publie son *Aritmetische und geometrische Progress-tabulen* qu'en 1620 après la parution, en 1614, de l'ouvrage de Napier. En 1604, il entre au service de l'empereur Rudolf II à Prague où il rencontre Johannes Kepler, astronome de la cour. Ce dernier a publié, en 1624, des tables de logarithmes qu'il a utilisés dans ses calculs sur l'orbite de Mars.

Les premières tables de logarithmes éditées, en 1614, sont celles de John Napier (NH Napier01). L'ouvrage, intitulé *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Description de la règle admirable des logarithmes) décrit le système de logarithmes échafaudé par Napier.

John Napier

150-1617

Il y indique que deux considérations l'ont amené à l'invention des logarithmes. La relation entre une progression arithmétique et une progression géométrique, qui avait déjà été observée par Stifel, est la première de ces considérations. La deuxième considération ayant mené Napier aux logarithmes est celle des points mouvants. Il considère un segment de droite AB de longueur 10^7 et une demi-droite HF de longueur infinie. Un point C et un point E partent simultanément de A et H respectivement. La vitesse initiale de C est 10^7, mais elle diminue progressivement pour être en tout temps égale à la longueur CB. La vitesse du point E est constante et égale à 10^7. C'est par la relation entre y et x qu'il développe son système (NH Napier01).



Dès 1614, Henry Briggs, professeur de géométrie au Gresham College de Londres, se procure une copie du chef d'œuvre de Napier dont la lecture le bouleverse. En 1616, Briggs rend visite à John Napier à Édimbourg pour lui faire part de ses idées concernant la simplification de ses tables de logarithmes. Il fait une nouvelle visite l'année suivante pour les mêmes motifs, et à son retour, en 1617, il publie ses premières tables de logarithmes décimaux (1 000 valeurs avec quatorze décimales), *Logarithmorum Chilias prima*. En 1624, dans *Arithmetica logarithmica*, Briggs présente pour la première fois les concepts de *mantisse* et de *caractéristique*, qui permettent de simplifier la construction et l'utilisation des tables de logarithmes.

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

7.2 Exercices

1. Vous prêtez un montant de 8 000 $ remboursable dans 6 ans, en un seul versement incluant les intérêts, à un taux d'intérêt de 9 % par année capitalisé annuellement. Déterminer le montant total que vous recevrez en remboursement du prêt.

2. Vous placez un montant de 5 000 $ à un taux trimestriel de 1,2 % pour 10 ans.
   a) Décrire l'évolution de ce capital en fonction du temps.
   b) À quel moment le capital aura-t-il doublé ?
   c) Quel sera le montant à l'échéance ?

3. Vous prêtez un montant de 10 000 $ remboursable dans 10 ans, en un seul versement incluant les intérêts, à un taux de 12 % composé annuellement. Quel sera le remboursement total que vous recevrez ?

4. Vous venez de recevoir 6 000 $ et vous décidez de placer ce montant pendant 5 ans afin de constituer un capital pour vous acheter une maison. Le placement se fera à un taux nominal de 6 % composé mensuellement. Quel est le montant total que vous aurez accumulé ?

5. Déterminer quel montant il faudrait placer maintenant à un taux mensuel de 0,6 % pour constituer un capital de 10 000 $ en 15 ans.

6. Vous achetez une automobile au montant de 12 000 $ et le marchand vous donne la possibilité d'acquitter ce montant comptant ou de payer 16 000 $ dans 3 ans.
   a) Sachant que le taux d'intérêt est actuellement de 7 % capitalisé annuellement, déterminer la valeur actuelle du montant de 16 000 $ afin de voir laquelle des deux offres est la plus avantageuse pour vous.
   b) Si vous empruntiez un montant de 12 000 $ remboursable dans 3 ans à un taux de 7 % capitalisé annuellement, quel serait le paiement à effectuer à l'échéance?

7. Une femme désire donner 10 000 $ à chacun de ses 3 enfants le jour de leur dix-huitième anniversaire. Pour ce faire, elle veut placer un montant au nom de chacun de ses enfants qui sont actuellement âgés de 3, 6 et 9 ans. Le placement qu'elle envisage porte un intérêt de 7,5 % composé annuellement. Déterminer le montant qu'elle doit déposer au nom de chacun de ses enfants.

8. À quel taux composé annuellement faut-il placer un montant de 8 000 $ pour accumuler un capital de 14 000 $ en 7 ans ?

9. Quel est le taux composé annuellement permettant de doubler un capital en 10 ans ? en 7 ans ? en 5 ans ?

10. On place un montant de 5 000 $ à un taux de 0,8 % capitalisé mensuellement. Dans combien de temps le capital aura-t-il doublé ?

11. On place un montant à un taux trimestriel de 1,5 %. Dans combien de temps le capital aura-t-il doublé ? triplé ?

12. Pendant combien de temps doit-on placer un montant de 8 000 $ à un taux de 9 % capitalisé annuellement pour accumuler un capital de 12 000 $?

13. Quel est le taux réel équivalent à un taux mensuel de 1,2 % ?

14. Quel est le taux réel équivalent à un taux trimestriel de 3 % ?

15. Quel est le taux réel équivalent à un taux nominal de 8 % capitalisé trimestriellement ?

16. Quel est le taux réel équivalent à un taux nominal de 13 % capitalisé hebdomadairement ?

17. Quelle est la valeur définitive d'un capital de 5 000 $ placé pour 5 ans à un taux nominal de 9 % capitalisé mensuellement ?

18. Quelle est la valeur actuelle d'un placement qui rapportera 20 000 $ dans 10 ans, sachant que le taux nominal est de 12 % capitalisé mensuellement ?

7.3 Modélisations diverses

Dans cette section, nous allons présenter différentes situations descriptibles par des modèles exponentiels et nous allons accorder une attention spéciale à leur représentation graphique.

ModExpoGestion07

EXEMPLE 7.3.1

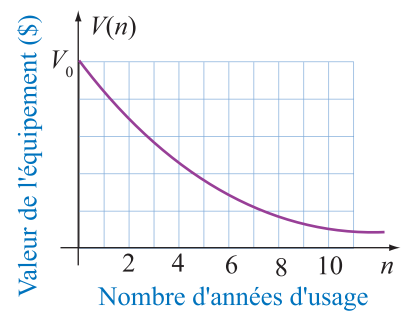
Un équipement électronique se déprécie de 18 % par année. Sa valeur d'achat est de 20 000 \$.

a) Déterminer un modèle mathématique décrivant la valeur de l'équipement n années après l'achat.
b) Esquisser le graphique de cette fonction.
c) Calculer la valeur de cet équipement 5 ans après l'achat.
d) Calculer combien de temps après l'achat cet équipement aura perdu plus la moitié de sa valeur.

Solution

a) La valeur initiale V_0 est 20 000 \$ et en notant $V(n)$ la valeur n années après l'achat. On a alors

$$V(n) = 20\,000(0{,}82)^n.$$



c) La valeur dans 5 ans sera

$$V(5) = 20\,000(0{,}82)^5 = 7\,414{,}80 \text{ \$}.$$

d) La valeur aura diminué de moitié lorsque

$$V(n) = 20\,000(0{,}82)^n = 10\,000 \text{ \$},$$

d'où

$$20\,000\,(0{,}82)^n = 10\,000$$
$$(0{,}82)^n = 0{,}5$$
$$n \ln(0{,}82) = \ln 0{,}5$$
$$n = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}82} = 3{,}49 \text{ ans}.$$

La dépréciation étant annuelle, l'équipement aura perdu plus de la moitié de sa valeur après 4 ans.

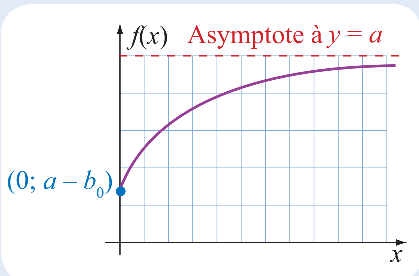
Croissances et décroissances limitées

Il existe plusieurs phénomènes de croissance ou de décroissance limitée qui sont quand même descriptibles par des modèles exponentiels. Ainsi, par une campagne publicitaire, on peut faire augmenter la demande pour un produit. Cependant, la demande ne croîtra pas indéfiniment, elle va se stabiliser. De la même façon, un travailleur en acquérant de l'expérience pourra accroître son rendement. Mais celui-ci ne croîtra pas indéfiniment: il va se stabiliser. La description de ces phénomènes et d'autres du même genre se fait grâce à des modèles exponentiels. Ces modèles sont de deux types: les modèles de croissance limitée et les modèles de décroissance limitée. Il faut toujours interpréter dans le contexte le résultat des calculs car ces modèles sont souvent utilisés pour analyser des situations pour les-

ModExpoGestion08

quelles la variable indépendante est un nombre entier alors que les calculs vont souvent donner un nombre ayant une partie décimale. Le contexte permet de décider si on doit arrondir ou compléter à l'entier le résultat des opérations.

Modèles de croissance limitée



Courbe d'apprentissage

Le modèle exponentiel défini par

$$f(x) = a - b_0 e^{-mx} \text{ où } m > 0$$

est un modèle exponentiel de croissance limitée. Ce modèle est parfois appelé **courbe d'apprentissage**.

Comme l'illustre la représentation graphique, l'ordonnée à l'origine est $a - b_0$ et l'asymptote horizontale est $y = a$ puisque

$$\lim_{x \to \infty} e^{-mx} = 0.$$

L'asymptote horizontale représente la valeur stable du phénomène.

EXEMPLE 7.3.2

Une compagnie désirant accroître sa part de marché pour un de ses produits entreprend une campagne publicitaire. Grâce à cette dernière, le volume des ventes pour ce produit, t mois après le début de la campagne, est décrit par

$$V(t) = 800 - 500\, e^{-0{,}2\, t}$$

a) Quel était le volume des ventes au début de la campagne ?
b) Au bout de combien de temps le volume des ventes aura-t-il doublé ?
c) Esquisser le graphique de cette fonction.

■ *Solution*

a) Le volume des ventes au début de la campagne était

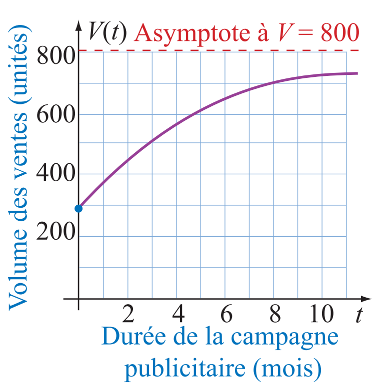
$$V(0) = 800 - 500\, e^{-0{,}2 \times 0} = 800 - 500 = 300$$

b) Le volume des ventes aura doublé lorsque

$$800 - 500\, e^{-0{,}2\, t} = 600,$$
$$500\, e^{-0{,}2t} = 200,$$
$$e^{-0{,}2\, t} = 0{,}4,$$
$$-0{,}2t = \ln 0{,}4,$$
$$t = \frac{\ln 0{,}4}{-0{,}2} = 4{,}581\ \ldots$$

Le volume des ventes aura donc doublé après cinq mois.

c) La représentation graphique est donnée ci-contre.

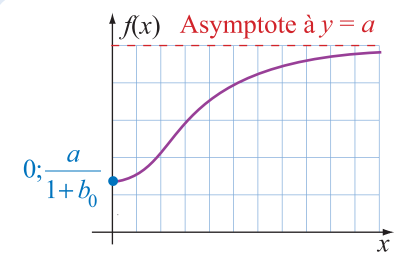


Modèle de Verhulst

Le biologiste et mathématicien hollandais Pierre-François Verhulst (1804-1849) a conçu, en 1837, un modèle pour décrire les phénomènes à croissance limitée comme la croissance d'une population de bactéries ou la propagation d'une épidémie ou d'une rumeur. Ce modèle est

$$f(x) = \frac{a}{1 + b_0 e^{-mx}}, \text{ où } b_0 > 0 \text{ et } m > 0.$$

L'ordonnée à l'origine de ce modèle est $a/(1 + b_0)$ et l'asymptote horizontale est $y = a$.

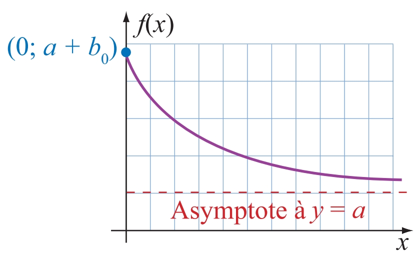


Ce modèle est plus apte que la courbe d'apprentissage à décrire la réaction des consommateurs à une campagne publicitaire. En effet, dans la pratique, la réaction n'est pas immédiate. Il s'écoule un certain temps avant qu'une campagne publicitaire porte ses fruits. On l'utilise également pour décrire la propagation d'une rumeur ou d'une épidémie. On utilise quand même la courbe d'apprentissage car les calculs sont moins compliqués

ModExpoGestion09

Modèles de décroissance limitée

Les modèles de décroissance limitée sont des modèles qui décrivent une décroissance asymptotique. Par exemple, si une compagnie cesse toute campagne publicitaire, son volume de vente va décroître, mais ne s'annulera pas complètement, certains consommateurs étant réticents au changement.



Le modèle exponentiel défini par

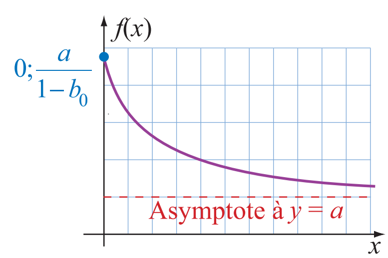
$$f(x) = a + b_0 e^{-mx} \text{ où } m > 0$$

est un modèle exponentiel de décroissance limitée.

Comme l'illustre la représentation graphique, l'ordonnée à l'origine est $a + b_0$ et l'asymptote horizontale est $y = a$.

Le modèle défini par

$$f(x) = \frac{a}{1 - b_0 e^{-mx}}, \text{ où } 0 < b_0 < 1 \text{ et } m > 0$$



est également un modèle de décroissance dont l'ordonnée à l'origine est $a/(1 - b_0)$ et l'asymptote horizontale est $y = a$. Dans la pratique, l'ordonnée à l'origine représente la valeur initiale, c'est-à-dire la valeur au temps 0 et cette valeur est normalement donnée dans l'énoncé du problème.

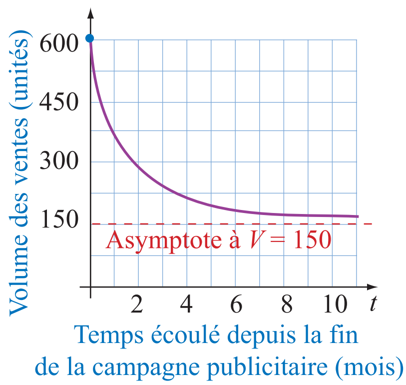
EXEMPLE 7.3.3

Une compagnie cesse toute campagne publicitaire pour un de ses produits. Le volume mensuel des ventes est alors décrit par

$$V(t) = \frac{150}{1 - 0{,}75e^{-0{,}25t}},$$

où t est le nombre de mois écoulés depuis la fin de la campagne publicitaire.

a) Quel était le volume des ventes à la fin de la campagne publicitaire ?
b) Quel sera le volume des ventes après un mois ? après deux mois ?
c) Quel sera le volume des ventes une fois le phénomène stabilisé ?
d) Au bout de combien de temps le volume des ventes aura-t-il diminué de moitié ?
e) Esquisser le graphique de ce modèle.



Solution

a) Le volume des ventes à la fin de la campagne publicitaire est le volume au temps 0, soit

$$V(0) = \frac{150}{1-0,75e^0} = 600.$$

b) $V(1) = \dfrac{150}{1-0,75e^{-0,25}} = 361$ et $V(2) = \dfrac{150}{1-0,75e^{-0,5}} = 275.$

c) Le volume des ventes se stabilisera à 150 puisque la fonction a une asymptote horizontale à 150. En effet, lorsque t devient très grand, $e^{-0,25t}$ devient pratiquement nul.

d) Le volume des ventes aura diminué de moitié lorsque

$$V(t) = \frac{150}{1-0,75e^{-0,25t}} = 300, \text{ d'où } \frac{1}{1-0,75e^{-0,25t}} = 2.$$

En isolant t, on a alors $1 = 2 - 1{,}5e^{-0,25t}$, d'où $-1 = -\,1{,}5e^{-0,25t}$ et

$$\frac{2}{3} = e^{-0,25t}, \text{ d'où } t = \frac{1}{-0,25}\ln(2/3) = 1,62 \text{ mois.}$$

Le volume des ventes aura donc diminué de moitié après deux mois.

e) La représentation graphique est donnée ci-contre.

Dans ces diverses situations de croissance et de décroissance exponentielle, nous avons utilisé des modèles dont les formes générales sont assez semblables. Si la dépréciation d'une machinerie est exprimée comme un pourcentage de la valeur initiale, le modèle décrivant sa valeur est de la forme

$$V = V_0\,(1 - i)^n,$$

où V_0 est la valeur initiale, i est le taux de dépréciation périodique, n est le nombre de périodes et V est la valeur après n périodes. On écrira souvent $V(n)$ pour préciser que V représente la valeur après n périodes. Ainsi, $V(5)$ représente la valeur après 5 périodes.

On remarque la similitude de ce modèle et de celui décrivant la croissance d'un capital

$$C = C_0\,(1 + i)^n \quad \text{et} \quad V = V_0\,(1 - i)^n.$$

Dans le modèle de croissance, la base de l'exponentielle est $1 + i$ et dans le modèle de décroissance la base de l'exponentielle est $1 - i$.

Dans les problèmes de croissance ou de décroissance exponentielle, on peut avoir à calculer l'un ou l'autre des paramètres.

PROCÉDURE

Calcul d'un paramètre inconnu

1. Identifier les données du problème.
2. Identifier la forme du modèle approprié:
   croissance, $C = C_0\,(1 + i)^n$ ou décroissance, $V = V_0\,(1 - i)^n$.
3. Identifier le paramètre inconnu (valeur initiale ou taux).
4. Substituer les données du problème dans le modèle.
5. Isoler le paramètre inconnu en utilisant les propriétés des exposants et des logarithmes.
6. Écrire la fonction décrivant la situation.

Dans les situations descriptibles par un modèle de croissance ou de décroissance limitée, nous donnerons toujours le modèle car les démarches mathématiques pour construire ces modèles sont trop avancées pour le présent cours. Les exercices proposés visent plutôt l'application de la fonction donnée pour analyser la situation.

PROCÉDURE

Analyse d'une situation décrite par un modèle exponentiel

1. À partir de l'équation donnée du modèle, calculer la valeur initiale.
2. Calculer la valeur limite (asymptote de la fonction).
3. Calculer l'image d'une valeur donnée de la variable indépendante.
4. Calculer la préimage d'une valeur donnée de la variable dépendante.
5. Interpréter le résultat des calculs dans le contexte.
6. Représenter graphiquement le modèle.
7. Interpréter les caractéristiques graphiques du modèle dans le contexte.

7.4 Exercices

1. Un équipement a été acheté au prix de 250 000 $.
   a) Quel est le taux de dépréciation sachant que la valeur 5 ans après l'achat est de 110 000 $?
   b) Représenter graphiquement la valeur de l'équipement en fonction du temps.

2. Une automobile se déprécie de 15 % par année. Représentons par V_0 la valeur à l'achat.
   a) Déterminer le modèle mathématique décrivant la valeur de l'automobile en fonction du temps n.
   b) Dans combien de temps après l'achat la valeur aura-t-elle diminué de moitié ?
   c) Esquisser le graphique de cette fonction.
   d) Si sa valeur initiale était de 10 000 $, combien vaudrait la voiture 8 ans après l'achat ? 10 ans après l'achat ?

3. La population d'une ville est de 20 000 habitants. En tenant compte des taux de mortalité et de natalité, on peut établir que dans t années elle sera donnée par
$$P(t) = 20\,000\, e^{0{,}05t}.$$
   a) Calculer la population dans 5 ans, dans 10 ans.
   b) Dans combien de temps la population aura-t-elle doublé ?
   c) Esquisser le graphique de cette fonction.

4. Une compagnie renouvelle sa machinerie au prix de 300 000 $. Cette dernière se déprécie au taux de 20 % par année.
   a) Trouver la règle de correspondance donnant la valeur de la machinerie en fonction du temps mesuré en années.
   b) Trouver la valeur de la machinerie 2 ans après l'achat, 3 ans après l'achat, 5 ans après l'achat.
   c) Exprimer le temps écoulé en fonction de la valeur actuelle de la machinerie (fonction inverse).
   d) Esquisser le graphique de cette fonction.
   e) Dans combien de temps la machinerie vaudra-t-elle la moitié de sa valeur d'achat ? le tiers ? le quart ? le cinquième ?

5. L'évaluation municipale de votre propriété est de 168 000 $. L'évaluation augmente de 8 % annuellement et le taux de taxation est de 1,25 $ pour chaque tranche de 100 $ d'évaluation.
   a) Déterminer le modèle mathématique décrivant la valeur de votre propriété dans n années.
   b) Déterminer le modèle mathématique décrivant le montant des taxes pour votre propriété dans n années.

6. Une enquête a révélé que la demande mensuelle pour un bien de consommation est décrite en fonction du prix x par le modèle
$$f(x) = 600\, e^{-0{,}15x}.$$
   a) Quelle sera la demande mensuelle si on fixe le prix à 5 $?
   b) Représenter graphiquement la demande en fonction du prix.

7. Une compagnie entreprend une campagne publicitaire pour mieux faire connaître son produit. Le volume des ventes s'accroît alors selon le modèle
$$V(t) = 800 - 650\, e^{-0{,}22t}.$$
   où t est le nombre de mois écoulés depuis le début de la campagne publicitaire.
   a) Quel était le volume des ventes juste avant le début de la campagne publicitaire?
   b) Quel sera le volume des ventes après un mois de campagne publicitaire? Après deux mois ?
   c) Esquisser le graphique de ce modèle.

8. On lance une campagne publicitaire pour mousser les ventes d'un produit. Les études préliminaires ont permis d'établir que, grâce à cette campagne publicitaire, le volume des ventes augmente selon le modèle

$$V(t) = 1\ 000 - 800\,e^{-t/3}.$$

où t est le nombre de mois écoulés depuis le début de la campagne.

a) Calculer le volume des ventes pour les douze premiers mois de la campagne.

b) Trouver la valeur stable du volume des ventes.

c) Esquisser le graphique de la fonction.

9. Les ventes mensuelles d'un produit durant une campagne publicitaire croissent suivant le modèle

$$V(t) = \frac{600}{1+3e^{-0,5t}},$$

où t est le nombre de mois écoulés depuis le début de la campagne publicitaire.

a) Quel était le volume des ventes juste avant le début de la campagne ?

b) Quelle est la valeur stable du volume des ventes ?

c) Dans combien de temps après le début de la campagne le volume des ventes aura-t-il doublé ? triplé ?

d) Esquisser le graphique de cette fonction.

10. Une compagnie ayant cessé toute campagne publicitaire pour un de ses produits voit ses ventes mensuelles diminuer suivant le modèle

$$V(t) = 200 + 600\,e^{-0,2t},$$

où t est le nombre de mois écoulés depuis la fin de la campagne publicitaire.

a) Quel était le volume des ventes à la fin de la campagne publicitaire ?

b) Quel sera le volume des ventes après un mois sans publicité ?

c) Après combien de temps le volume des ventes sera-t-il la moitié de sa valeur à la fin de la campagne ?

d) Calculer la valeur stable du volume des ventes.

e) Esquisser le graphique de cette fonction.

11. Une compagnie ayant cessé toute campagne publicitaire pour un de ses produits, les ventes mensuelles diminuent suivant le modèle

$$V(t) = \frac{200}{1-0,75e^{-0,2t}},$$

où t est le nombre de mois écoulés depuis la fin de la campagne publicitaire.

a) Quel était le volume des ventes à la fin de la campagne publicitaire ?

b) Quel sera le volume des ventes après un mois sans publicité ?

c) Après combien de temps le volume des ventes sera-t-il la moitié de sa valeur à la fin de la campagne ?

d) Déterminer la valeur stable du volume des ventes.

e) Esquisser le graphique de cette fonction.

Exercices récapitulatifs

1. En 2001, vous avez obtenu un poste au salaire annuel de 35 500 \$ et on vous a avisé que la convention collective prévoit une augmentation de salaire de 5 % par année.

a) Construire un modèle mathématique décrivant l'évolution de votre salaire au cours des années.

b) Calculer le salaire que vous ferez en 2008 et en 2013 si cette clause d'augmentation est reconduite dans la convention collective à l'occasion des prochaines négociations.

c) La convention collective est modifiée en 2004 et les parties conviennent de remplacer l'augmentation de 5 % par une clause de « vie chère » qui accorde une augmentation dont le taux est celui de l'inflation moins 2 %. Compte tenu que les économistes prévoient que le taux d'inflation sera de 3,5 % jusqu'en 2013, calculer le salaire que vous ferez en 2008 et en 2013 si ces prédictions s'avèrent réalistes.

d) Calculer le salaire que vous devriez faire en 2008 et en 2011 pour conserver votre niveau de vie de 2004 si les prédictions des économistes se réalisaient.

2. À l'aide des logarithmes, isoler la variable t dans la règle de correspondance suivante :

$$V = 12e^{-20t}.$$

3. À l'aide des logarithmes, isoler la variable t dans la règle de correspondance suivante:

$$V = 20(1 - e^{-12t}).$$

4. La compagnie qui vous emploie possède des équipements qu'elle désire remplacer, mais elle tient à vendre d'abord ses anciens équipements. Vous êtes chargé de déterminer la valeur de revente de ces équipements. Vous trouvez dans le dossier deux évaluations qui ont été faites l'une en 2008, qui attribuait à ces équipements une valeur de 345 000 $ et l'autre en 2013 qui leur attribuait une valeur de 200 000 $.
   a) Déterminer le taux de dépréciation annuel de ces équipements.
   b) Déterminer le modèle donnant la valeur en fonction du temps.
   c) Calculer la valeur de revente de ces équipements en 2015.
   d) Quelle sera la valeur de revente si la compagnie attend encore deux ans avant de se départir de ces équipements ?

5. La compagnie qui vous emploie a pour politique de conserver les équipements qu'elle achète le plus longtemps possible, mais de les revendre avant que ceux-ci aient perdu les deux tiers de leur valeur initiale. Les équipements ne se déprécient pas au même taux. Les appareils électroniques comme les ordinateurs se déprécient de 25 % annuellement, les équipements de l'atelier de production se déprécient de 12 % par année et les camions se déprécient de 18 % par année.
   a) Pendant combien de temps la compagnie garde-t-elle les appareils électroniques ?
   b) Pendant combien de temps la compagnie garde-t-elle les équipements d'atelier ?
   c) Pendant combien de temps la compagnie garde-t-elle les camions ?
   d) Un appareil électronique a été acheté il y a 2 ans au prix de 6 500 $. Quelle est sa valeur actuelle et quelle sera la valeur de revente de cet appareil lorsque la compagnie voudra s'en départir ?
   e) Un équipement d'atelier a été acheté il y a 3 ans au prix de 355 000 $. Quelle est sa valeur actuelle et quelle sera la valeur de revente de cet équipement lorsque la compagnie voudra s'en départir ?
   f) Un camion a été acheté il y a 3 ans au prix de 125 000 $. Quelle est sa valeur actuelle et quelle sera sa valeur de revente lorsque la compagnie voudra s'en départir ?

6. Pendant combien de temps faut-il placer un capital C_0 à un taux nominal de 8 % capitalisé trimestriellement pour doubler le capital ?

7. Pendant combien de temps faut-il placer un capital C_0 à un taux nominal de 9 % capitalisé mensuellement pour doubler le capital ?

8. Vous prévoyez changer de voiture dans 4 ans et pour ce faire, vous désirez effectuer un dépôt garanti qui vous rapportera 12 000 $ dans 4 ans. Le taux nominal offert est de 7,2 % capitalisé mensuellement. Quelle est la valeur actuelle de ce placement ?

9. Vous placez un montant de 10 000 $ pour 5 ans à un taux nominal de 7,8 %. On vous offre le choix entre une capitalisation annuelle, semestrielle, trimestrielle, mensuelle ou hebdomadaire. Déterminer le capital accumulé dans 5 ans dans chaque cas et discuter des résultats.

10. Pendant combien de temps faut-il placer un montant de 4 000 $ à un taux nominal de 6 % capitalisé mensuellement pour constituer un capital de 10 000 $?

Datation au carbone

Le principe de la datation au carbone 14 est le suivant. L'atmosphère terrestre contient du carbone 14 (^{14}C) et du carbone 12 (^{12}C). Le carbone 12 n'est pas radioactif mais le carbone 14 l'est et se désintègre donc. Cependant, la quantité de carbone 14 est relativement stable dans l'atmosphère depuis 500 siècles, car celui-ci est produit dans l'atmosphère par l'action des rayons cosmiques. Le carbone 12 est également constant puisqu'il n'est pas radioactif et ne se désintègre pas.

Le rapport $^{14}C/^{12}C$ est d'environ une partie de ^{14}C pour 10^{12} parties de ^{12}C dans l'atmosphère. Lors de la photosynthèse, les végétaux absorbent du carbone et contiennent donc le même rapport de $^{14}C/^{12}C$. Les animaux l'absorbent en se nourrissant de végétaux et le transmettent aux autres animaux lorsqu'ils sont dévorés ou dégustés selon le cas. Ainsi tous les organismes vivants contiennent le même rapport $^{14}C/^{12}C$.

Lorsqu'un organisme meurt, il cesse de se nourrir et cesse donc d'absorber du carbone. À partir de ce moment, le rapport $^{14}C/^{12}C$ diminue puisque le carbone 14 continue de se désintégrer. Ainsi, en mesurant le rapport $^{14}C/^{12}C$ d'un organisme mort, on peut déterminer depuis combien de temps il est mort, c'est-à-dire depuis combien de temps il a cessé d'absorber du carbone 14.

Le rapport $^{14}C/^{12}C$ varie selon le modèle

$$Q(t) = Q_0\, e^{-\lambda t},$$

où λ est la constante de désintégration du carbone 14, soit $\lambda = 0{,}00012$ et t est le temps en années.

11. On découvre des ossements qui révèlent un rapport $^{14}C/^{12}C$ dont la valeur représente les 7/10 du rapport normal.
    a) Depuis combien de temps l'organisme a-t-il cessé de vivre ?
    b) Quel sera le rapport dans 5 000 ans ?

12. On découvre un fossile dont le rapport $^{14}C/^{12}C$ est la moitié du rapport normal.
    a) Depuis combien de temps l'organisme est-il mort ?
    b) Trouver la fonction qui exprime le temps écoulé en fonction du rapport $^{14}C/^{12}C$ restant (fonction inverse).
    c) Sur un même site de fouilles, on trouve deux fossiles: l'un présente un rapport $^{14}C/^{12}C$ qui est les 3/10 du rapport normal et l'autre en présente les 4/10. Utilisant la fonction inverse obtenue en *b*, trouver le temps écoulé entre la mort de ces deux organismes.