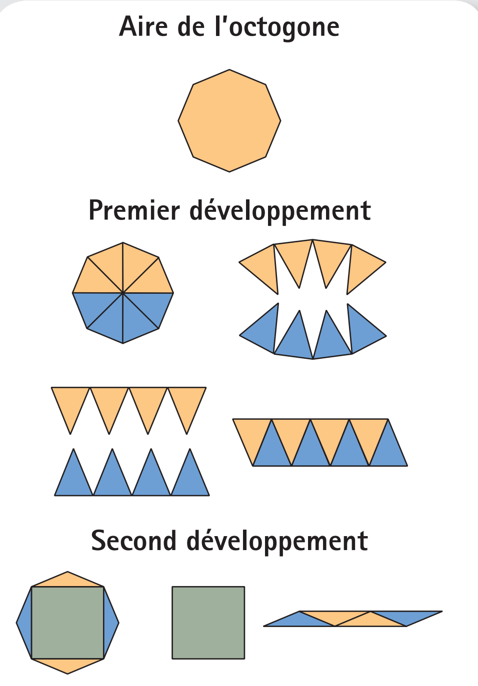
LA MÉTHODE D'EXHAUSTION

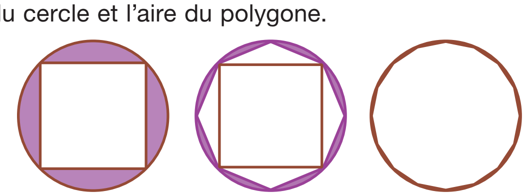
Dans leurs travaux sur la quadrature de figures géométriques à la règle et au compas, les géomètres grecs avaient facilement déterminé comment construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un triangle donné. C'était un résultat précieux parce que tous les polygones peuvent se décomposer en triangles. On peut donc exprimer l'aire d'un polygone comme somme des aires de carrés. L'illustration suivante présente deux façons de décomposer un octogone pour en déterminer l'aire. Le premier cas ramène le problème à la construction d'un carré de même aire qu'un parallélogramme. Dans le deuxième cas, on doit ajouter l'aire de deux parallélogrammes congruents à celle du carré inscrit dans l'octogone.



Peut-on espérer déterminer l'aire d'un cercle en procédant de cette façon ? Antiphon semble en avoir été convaincu puisqu'il a énoncé le postulat suivant.

Postulat d'Antiphon

En doublant le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle et en répétant successivement l'opération, on peut rendre nulle la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone.



À l'époque, le postulat d'Antiphon fut critiqué car il statue sur le résultat d'un processus infini. Les géomètres grecs ne pouvaient concevoir qu'un processus infini puisse donner un résultat fini. Puisqu'une aire est infiniment divisible, l'aire du polygone ne peut jamais égaler celle du cercle, il y a toujours une différence non nulle. Les Grecs se butaient au même problème que celui des paradoxes de Zénon. Puisqu'une longueur est infiniment divisible, la flèche d'Achille ne peut jamais atteindre la cible car il reste toujours une demi-longueur à parcourir.

Eudoxe de Cnide (NH Eudoxe01) a modifié le postulat d'Antiphon de la façon suivante :

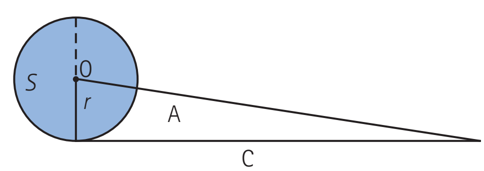
Postulat d'Eudoxe

Si on soustrait d'une grandeur donnée une partie supérieure ou égale à sa moitié, et que du reste, on soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié et ainsi de suite, à la longue, la grandeur restante peut être rendue plus petite que n'importe quelle grandeur prédéfinie de même nature.

C'est cette formulation que l'on retrouve dans le livre X, proposition 1 des *Éléments* d'Euclide (NH Euclide01). En se servant de ce postulat, Archimède (NH Archimède01) a développé une méthode de démonstration que l'on appelle maintenant **Méthode d'exhaustion**. Cette méthode lui a permis d'établir de beaux résultats dont l'un sur l'aire du cercle (NH Archimède03) et un autre sur l'aire d'un segment de parabole (NH Archimède05).

Aire du cercle

L'aire d'un cercle est égale à l'aire d'un triangle dont la hauteur est égale au rayon et la base est égale à la circonférence.



Aire du segment de parabole

L'aire d'un segment de parabole est égale à une fois et un tiers l'aire du triangle inscrit dans ce segment.