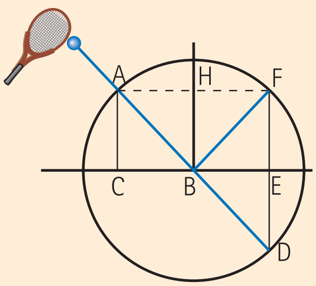
Pierre de Fermat
1601-1665

Descartes et Fermat ont connu quelques controverses dont l'une portait sur les phénomènes de réflexion et de réfraction de la lumière. La controverse a débuté en 1637, à l'époque de la parution de *La dioptrique* de Descartes. Le débat fut relancé en 1657 lorsque Claude Clerselier a voulu éditer la correspondance de Descartes décédé en 1650, mais ce n'est qu'en 1662 que Fermat a communiqué sa solution à Marin Cureau de la Chambre dans *Synthèse pour les réfractions.*

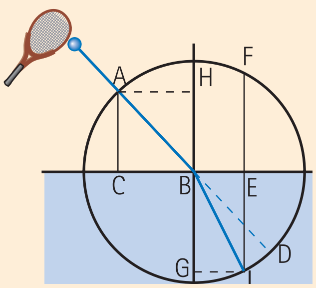
Pierre de Fermat
Réflexion et réfraction

Réflexion selon Descartes



En frappant le sol, la composante horizontale du mouvement est inchangée et la composante verticale change de direction.

Réfraction selon Descartes



Tout comme une bille roule plus facilement sur une surface dure que sur un tapis, la vitesse de la lumière augmente en pénétrant dans un milieu plus dense.

Pour Descartes, la lumière est un « mouvement ou une action reçue en une matière très subtile qui remplit les pores des autres corps ... ». Descartes adhère à la théorie corpusculaire de la lumière et le mouvement de ces corpuscules est soumis aux lois du mouvement des corps. C'est pourquoi il considère normal de décrire la réflexion par une analogie avec le mouvement d'une balle.

Pour expliquer la réfraction, Descartes considère que la vitesse de la lumière est plus grande dans un milieu dense. Ainsi, la lumière voyage plus vite dans le verre que dans l'eau et plus vite dans l'eau que dans l'air.

Fermat n'est pas impressionné à la lecture de *La dioptrique* de Descartes éditée en 1637. L'explication de la réflexion de la lumière par une analogie avec une balle qui rebondit sur une « surface plate et dure » lui semble peu convaincante, il indique à Mersenne que pour lui, c'est un paralogisme[1]. Fermat formule diverses critiques, mais ne peut, à cette époque, donner une autre explication de ces phénomènes et il laisse la question en suspens.

1. Un paralogisme est un raisonnement qui semble rigoureux mais qui est faux quoique le raisonnement soit tenu par quelqu'un qui est de bonne foi.

Fermat revient sur ce sujet vingt ans plus tard. En 1657, Marin Cureau de la Chambre (1594-1669) envoie à Fermat une copie de son traité intitulé *La lumière*. Ce dernier reçoit aussi une demande de Claude Clerselier (1614-1684) qui veut publier la correspondance de Descartes, décédé en 1650 et souhaite des éclaircissements sur les critiques formulées par Fermat sur *La dioptrique* de Descartes.

Dans son ouvrage, de la Chambre revient sur la réflexion de la lumière en se fondant sur un principe utilisé déjà par Héron d'Alexandrie vers le IIe siècle :

> *La nature agit toujours par les voies les plus courtes.*

Dans sa réponse à de la Chambre, Fermat indique qu'il faudrait voir si ce principe, pourrait être utilisé dans le cas de la réfraction. De la Chambre doute que cela soit possible, car le chemin emprunté par la lumière dans la réfraction n'est manifestement pas le plus court chemin. Fermat pense qu'il faut reformuler le principe en tenant compte de la « résistance des milieux ». En approfondissant la question, il modifie l'énoncé et obtient :

> *La nature agit toujours par les voies les plus simples.*

Cet énoncé signifie qu'il faut tenir compte de la résistance des milieux. Dans le

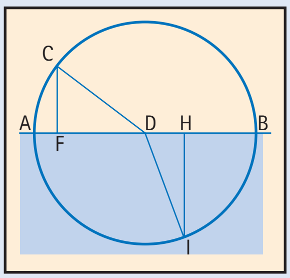
© 2019, Prodafor Inc

cas de la réflexion, la résistance du milieu ne change pas et la voie la plus simple est également la plus courte.

Pour expliquer la réfraction, il n'est pas suffisant de faire cet énoncé, il faut démontrer qu'en se basant sur ce principe, on obtient le même résultat que celui obtenu par Descartes qui, bien que basé sur un principe faux, a été vérifié expérimentalement à diverses reprises.

En appliquant ce principe, le chemin que doit prendre la lumière n'est plus seulement une somme de longueurs géométriques comme dans le cas de la réflexion, mais une somme de deux longueurs multipliées par un coefficient qui dépend du milieu dans lequel se trouve cette longueur.

Fermat applique d'abord une démarche géométrique. En considérant un rayon incident CD, il trace un cercle centré en D et les rayons CD et DI où I est le point de la circonférence par où passe le rayon après la réfraction. Il abaisse alors les perpendiculaires au diamètre CF et IH et interprète en termes de longueurs le rapport de la résistance du milieu le plus dense à celle du milieu le moins dense. Dans ce rapport, on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de telle sorte que le numérateur soit égal à la longueur du segment $\overline{DF}$. Le dénominateur est alors une longueur m d'un autre segment de droite à déterminer. De plus, $m < \overline{DF}$, puisque m représente la résistance du milieu moins dense. Le rapport des résistances est donc



$$\frac{\overline{DF}}{m}$$

La somme des résistances le long du parcours CDI peut s'exprimer par la somme

$$\overline{CD}\times m+\overline{DI}\times\overline{DF}$$

Il faut montrer que cette somme est minimale, c'est-à-dire plus petite que toutes les sommes de la forme

$$\overline{CO}\times m+\overline{OI}\times\overline{DF}$$

où O est un point quelconque du diamètre ADB. Fermat considère un point O à une petite distance e du point D et pose

$$n=\overline{CD}=\overline{DI},\ a=\overline{DH} \text{ et } b=\overline{DF},$$

d'où $\overline{CD}\times m+\overline{DI}\times\overline{DF}=nm+nb.$

Il applique la version euclidienne de la relationque nous appelons maintenant « loi des cosinus » et obtient :

$$\overline{CO}^2=n^2+e^2-2be$$

$$\text{et } \overline{OI}^2=n^2+e^2+2ae.$$

Cela donne :

$$\overline{CO}\times m=\sqrt{m^2n^2+m^2e^2-2m^2be}$$

$$\text{et } \overline{OI}\times b=\sqrt{b^2n^2+b^2e^2+2b^2ae}.$$

Pour appliquer sa méthode des valeurs extrêmes, il pose

$$\overline{CD}\times m+\overline{DI}\times\overline{DF}=\overline{CO}\times m+\overline{OI}\times b.$$

En élevant au carré deux fois, il fait disparaître tous les radicaux du membre de droite. Il divise alors par e les deux membres de l'équation et néglige tous les termes qui contiennent encore comme facteur e ou une puissance de e. Il reste

$$-ab^3m+b^2m^3-ab^2m^2+b^3m^2=0.$$

En divisant chacun des termes par b^2m, l'équation simplifiée devient :

$$-ab+m^2-am+bm=0$$

$$m^2+bm=am+ab$$

$$m(m+b)=a(m+b)$$

d'où $$m=a.$$

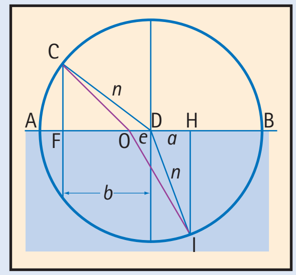
Puisque $m=a=\overline{DH}$, le rapport des résistances s'écrit

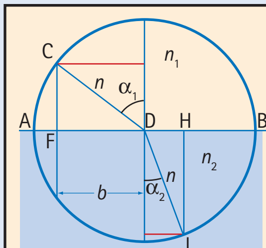
$$\frac{\overline{DF}}{m}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DH}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{DC}}{\overline{DH}}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DC}}\times\frac{\overline{DI}}{\overline{DH}}$$

$$=\frac{\overline{DF}/\overline{DC}}{\overline{DH}/\overline{DI}}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}.$$

Le rapport du sinus de l'angle d'incidence sur le sinus de l'angle de réfraction est égal au rapport inverse des résistances des milieux.

Fermat parvient au même résultat que Descartes, mais en adoptant une approche opposée. Pour Descartes, la vitesse de la lumière est plus grande dans l'eau que dans l'air alors que pour Fermat, c'est le contraire, la vitesse de la lumière est inversement proportionnelle à la résistance du milieu.





Le rapport des résistances est égal au rapport inverse du sinus des angles :

$$\frac{\overline{DF}}{m}=\frac{\overline{DF}}{\overline{DH}}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{n_2}{n_1}.$$

Il est à noter que le rapport des résistances des milieux est l'inverse du rapport des vitesses dans ces milieux, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

où c_i est la vitesse de la lumière dans le milieu i.

© 2019, Prodafor Inc