Résumés des chapitres et objets d'évaluation

A3

CHAPITRE 1
RELATIONS ET FONCTIONS

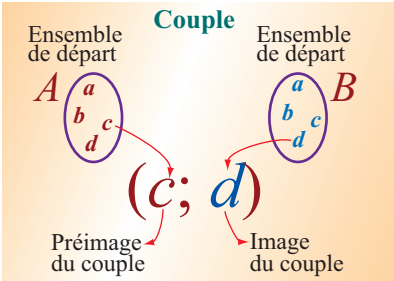
Élément de compétence

Utiliser la notion de fonction et le vocabulaire associé dans la résolution de problèmes divers.

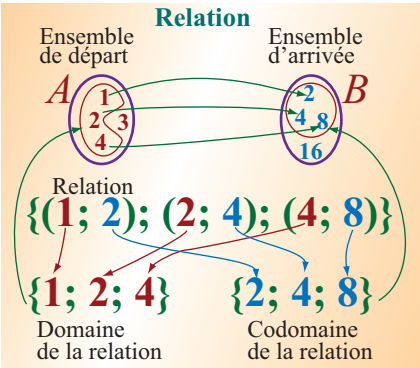
FONCTIONS POLYNOMIALES

Relation

Une relation est un ensemble de couples (c; d) tels que c est un élément d'un ensemble A, appelé *ensemble de départ* et d est un élément d'un ensemble B, appelé *ensemble d'arrivée*.



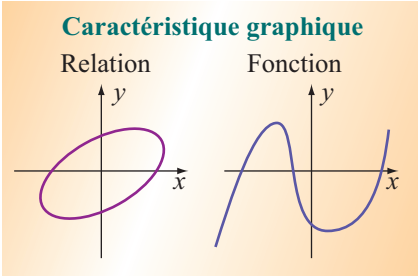
Le premier élément du couple est appelé la *préimage* et le deuxième élément du couple est l'*image* du couple. L'ensemble des éléments qui sont préimage dans au moins un couple est le *domaine* de la relation. L'ensemble des éléments qui sont image dans au moins un couple est le *codomaine* de la relation.



La relation formée de tous les couples réciproques d'une relation donnée est appelée *relation réciproque* de cette dernière.

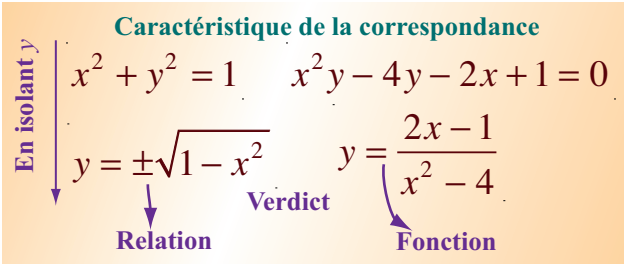
Fonction

Une *fonction* est une relation pour laquelle chaque élément du domaine est la préimage d'un seul couple de la relation. C'est un ensemble de couples formés par les valeurs de deux variables, une variable *indépendante* et une variable *dépendante*. Dans un graphique, la fonction est caractérisée par le fait qu'en élevant une perpendiculaire en n'importe quelle valeur du domaine, cette perpendiculaire coupe le graphique en un seul point.

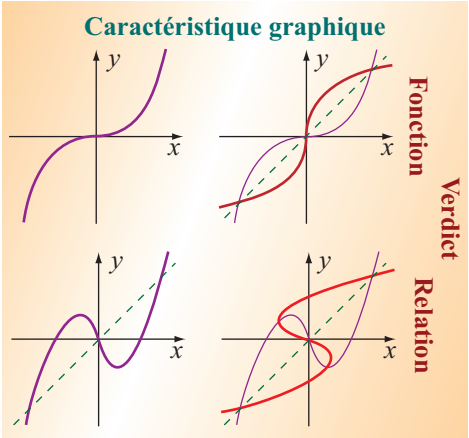


Règle de correspondance

Dans une relation ou une fonction, le lien entre les variables peut être donné par un tableau de valeurs, par un graphique ou par une *règle de correspondance*. La règle de correspondance permet, lorsqu'on substitue une valeur particulière à la variable indépendante, de calculer l'image correspondante. En isolant la variable dépendante dans une règle de correspondance, on peut déterminer si celle-ci représente une relation ou une fonction.

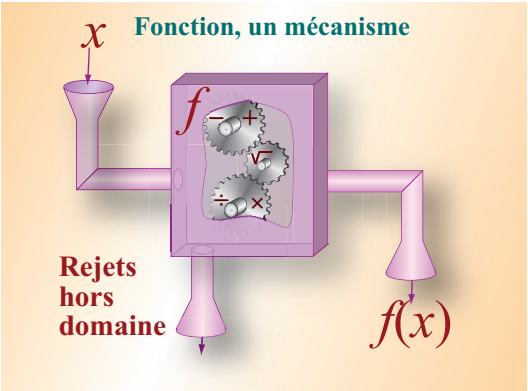


En prenant les couples réciproques d'une fonction ou d'une relation, on en obtient la *relation réciproque*. Une fonction est dite *inversible* si sa relation réciproque est également une fonction. Le graphique d'une relation réciproque ou d'une fonction inverse est symétrique à celui de la relation ou de la fonction par rapport à la droite $y = x$. On peut donc détecter graphiquement les fonctions inversibles.



Pour détecter une fonction inversible à partir de la règle de correspondance, on isole la variable x. Si à chaque valeur de y on ne peut associer qu'une seule valeur pour x, la fonction est inversible.

On compare parfois une fonction à un mécanisme. On y introduit une valeur de la variable indépendante et il en ressort l'image de la valeur introduite. Les valeurs pour lesquelles le mécanisme n'est pas défini sont rejetées.



Fonction polynomiale

Une fonction est dite *polynomiale*, lorsque la correspondance entre les variables est décrite par un polynôme. Symboliquement, c'est une fonction de la forme :

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$,

où n est un entier positif appelé le *degré du polynôme*, a_n, a_{n-1}, ... a_2, a_1 sont des constantes réelles appelées *coefficients*, a_0 est la *constante* et x est la variable indépendante.

FONCTION POLYNOMIALE

Variable indépendante — Degré du polynôme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Coefficients — Constante

Fonction :	
constante	$f(x) = a_0$
affine	$f(x) = a_1x + a_0$
quadratique	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
cubique	$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Une fonction polynomiale de degré 0 est appelée *fonction constante*, celle de degré 1 est une *fonction affine*, celle de degré 2 est une *fonction quadratique* et celle de degré 3 est une *fonction cubique*.

Domaine d'une fonction

Le *domaine* d'une fonction est l'ensemble des valeurs de sa variable indépendante pour lesquelles la fonction est définie. Les opérations de la règle de correspondance sont définies pour toutes les valeurs du domaine.

- **Le domaine d'une fonction polynomiale est l'ensemble des nombres réels.**
- **Lorsque la variable indépendante d'une fonction est présente dans un dénominateur, les valeurs qui annulent le dénominateur ne font pas partie du domaine de la fonction.**
- **Lorsque la variable indépendante d'une fonction est présente sous un radical d'ordre pair, les valeurs pour lesquelles l'expression sous le radical est négative ne font pas partie du domaine de la fonction.**

Zéros et ordonnée à l'origine

Les correspondances pour lesquelles l'une des deux variables est nulle sont particulièrement intéressantes. Les valeurs dont l'image est nulle sont appelés les *zéros* de la fonction. Graphiquement, les zéros sont les abscisses des points d'intersection avec l'axe horizontal. L'image de 0 est appelée l'*ordonnée à l'origine*, c'est l'ordonnée du point d'intersection du graphique et de l'axe vertical.

Modélisation

La *modélisation* est la démarche visant à décrire le lien entre les variables d'un phénomène par une règle de correspondance que l'on appelle *modèle mathématique*. Le *domaine* de validité du modèle est l'intervalle pour

lequel le modèle est valide compte tenu de la situation qu'il décrit.

FONCTIONS ALGÉBRIQUES DIVERSES

Une *fonction rationnelle* est une fonction dont la règle de correspondance comporte un quotient de polynômes.
Une fonction est dite *irrationnelle* si la variable indépendante est sous un radical dans la règle de correspondance.
Une fonction *définie par parties* est une fonction qui comporte plusieurs règles de correspondance, chacune n'étant valide que sur un intervalle particulier ou pour une valeur particulière.

Opérations sur les fonctions

Les opérations sur les fonctions permettent de considérer une fonction complexe comme une combinaison de fonctions plus simples. Il suffit alors de déterminer les procédures sur les fonctions simples et sur les opérations pour pouvoir déterminer leur effet sur une fonction complexe.
Considérons, par exemple, les deux fonctions

$g(x) = (x + 2)^2$ et $h(x) = (x^3 - 3)$.

On peut définir la somme de ces deux fonctions, ce qui donne :

$f_1(x) = g(x) + h(x) = (x + 2)^2 + (x^3 - 3)$

et, en développant :

$f_1(x) = g(x) + h(x) = x^3 + x^2 + 4x + 1$.

On peut définir la différence. On obtient alors :

$f_2(x) = g(x) - h(x) = (x + 2)^2 - (x^3 - 3)$

$= -x^3 + x^2 + 4x + 7$.

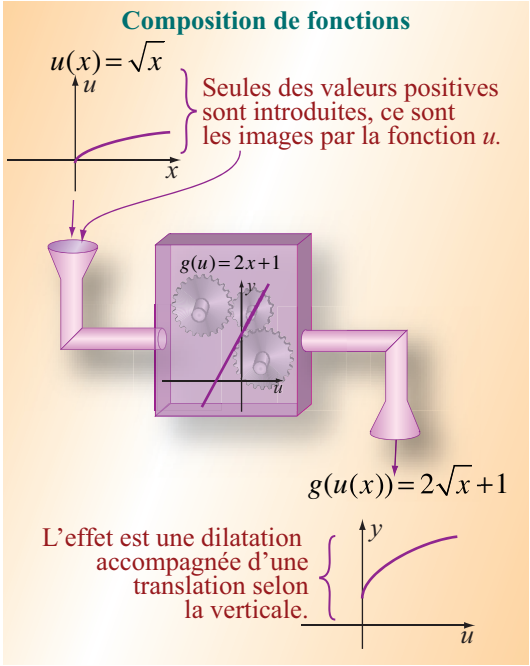
On peut également en définir le produit :

$f_3(x) = (x + 2)^2(x^3 - 3)$

ou le quotient :

$$f_4(x) = \frac{(x+2)^2}{x^3-3} \text{ ou } f_5(x) = \frac{x^3-3}{(x+2)^2}.$$

L'opération sur les fonctions qui est la moins familière au lecteur mais qui est très importante pour la suite de cette étude est la *composition de fonctions*.



ÉVALUATION DU CHAPITRE 1

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Utiliser la notion de fonction et le vocabulaire associé dans la résolution de problèmes divers.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Utilisation correcte du vocabulaire et du symbolisme des relations et des fonctions.**
- **Détermination correcte du domaine, des zéros et de l'ordonnée à l'origine d'une fonction algébrique.**
- **Représentation graphique correcte de fonctions algébriques simples.**
- **Description symbolique correcte d'une situation à l'aide d'un modèle mathématique.**

Composantes susceptibles d'être évaluées.

- Appliquer une procédure de résolution d'équation du premier ou du second degré pour déterminer les zéros d'une fonction.
- Déterminer le domaine de fonctions algébriques et de fonctions définie par parties.
- Calculer la pente d'une droite et déterminer son équation.
- Représenter graphiquement des fonctions polynomiales de degré plus petit ou égal à 2 en déterminant les points remarquables (zéros et ordonnée à l'origine).
- Déterminer la définition d'une fonction composée.
- À partir d'une description verbale, construire un modèle mathématique pour décrire le lien entre les variables d'un problème.

CHAPITRE 2
TAUX DE VARIATION

Élément de compétence

Analyser des phénomènes divers à l'aide du taux de variation des variables en cause.

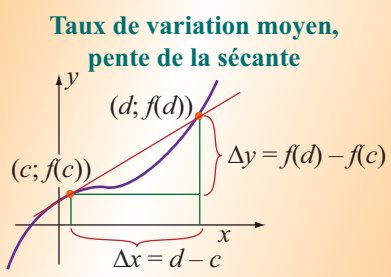
TAUX DE VARIATION MOYEN

Le taux de variation moyen est une mesure de la variation conjointe de deux variables dans un intervalle.
Le taux de variation moyen de y par rapport à x sur un intervalle $[c; d]$ est noté :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;d]}$$

Le taux de variation moyen sur un intervalle est le rapport de la variation de y sur la variation de x.

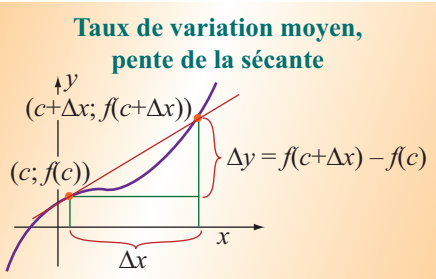
On a donc $\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;d]} = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$.

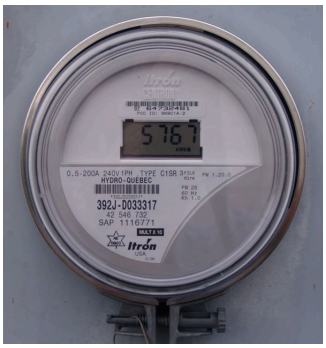


Graphiquement, le taux de variation moyen est la pente du segment de droite passant par les points $(c; f(c))$ et $(d; f(d))$.

Il est parfois plus simple de représenter les points d'intersection de la sécante et de la courbe par $(c; f(c))$ et $(c+\Delta x; f(c+\Delta x)$. Dans cette notation, le taux de variation moyen est :

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;c+\Delta x]} = \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$





On peut avoir à estimer ce rapport à partir d'une représentation graphique ou à le calculer à partir de données observées ou à partir de la règle de correspondance décrivant le lien entre les variables.

Dans les applications, le taux de variation moyen s'exprime toujours à l'aide d'unités de mesure qui aident à interpréter correctement les résultats selon le contexte.

L'accélération moyenne, la vitesse moyenne et le débit moyen sont des exemples de taux de variation moyen.

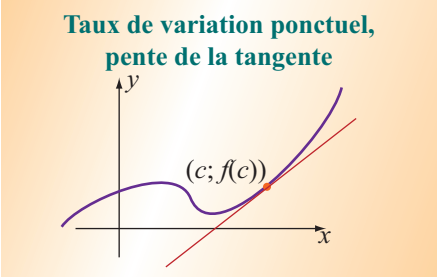
TAUX DE VARIATION PONCTUEL

Pour obtenir une information plus précise sur la variation conjointe de deux variables, on a recours au taux de variation ponctuel. Ce taux est la mesure de la variation réelle de deux variables l'une par rapport à l'autre pour une valeur c de la variable indépendante.

Le taux de variation ponctuel d'une variable y par rapport à une variable x, pour une valeur c de la variable indépendante, est noté :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_c$$

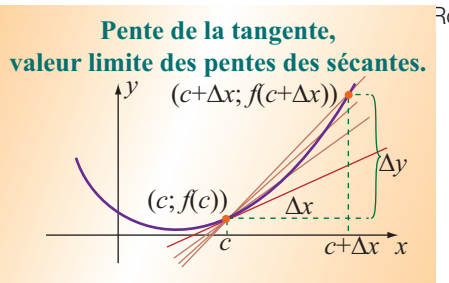
Graphiquement, le taux de variation ponctuel est la pente de la tangente au point d'abscisse c, soit le point $(c; f(c))$.



Il est impossible de calculer directement le taux de variation ponctuel car pour calculer la pente d'un segment de droite, il faut en connaître deux points et on ne connaît que le point de tangence.

Il est obtenu en prenant la limite des pentes des sécantes sur un intervalle de largeur Δx au voisinage de c, lorsque Δx tend vers 0. On a donc :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_c = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$



Les valeurs calculées pour les pentes des sécantes en considérant une suite d'intervalles emboîtés à gauche et à droite de c tendent vers une valeur limite qui est la pente de la tangente à la courbe, c'est-à-dire le taux de variation ponctuel au point d'abscisse c.

On peut avoir à estimer ce taux à partir d'une représentation graphique ou à partir de la règle de correspondance décrivant le lien entre les variables en calculant le taux de variation moyen sur des intervalles emboîtés.

La puissance consommée dans un circuit en fonction d'une résistance variable est un taux de variation ponctuel. Le taux de variation de la charge que peut supporter une poutre en fonction de son épaisseur est un taux de variation ponctuel.

TAUX DE VARIATION INSTANTANÉ

Lorsque la variable indépendante est le temps, le taux de variation ponctuel est appelé *taux de variation instantané*. La vitesse, l'accélération, le débit, la puissance, le courant et la vitesse d'une réaction chimique sont des taux de variation instantanés.

ÉVALUATION DU CHAPITRE 2

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Analyser des phénomènes divers à l'aide du taux de variation des variables en cause.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Détermination correcte du taux de variation moyen, à partir d'un ensemble de valeurs, d'une représentation graphique ou de la règle de correspondance entre les variables.**
- **Estimation correcte du taux de variation ponctuel à partir d'une représentation graphique ou de la règle de correspondance entre les variables.**

Composantes susceptibles d'être évaluées.

- Estimer le taux de variation moyen sur un intervalle à partir d'une représentation graphique.
- Calculer le taux de variation moyen sur un intervalle à partir d'un tableau de valeurs.
- Calculer le taux de variation moyen sur un intervalle à partir de la règle de correspondance d'une fonction.
- Estimer graphiquement un taux de variation ponctuel.
- Estimer un taux de variation ponctuel par approximations successives sur des intervalles emboîtés.
- Utilisation correcte des unités de mesure dans le calcul et l'interprétation d'un taux de variation.

CHAPITRE 3
LIMITES ET TAUX PONCTUEL

Élément de compétence

Utiliser le calcul algébrique des limites pour déterminer un taux de variation ponctuel.

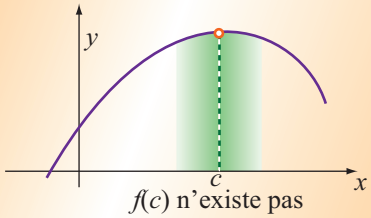
ÉVALUATION DES LIMITES

Approche numérique

Grâce au langage des limites, on peut décrire symboliquement le comportement d'une fonction au voisinage d'une valeur particulière.

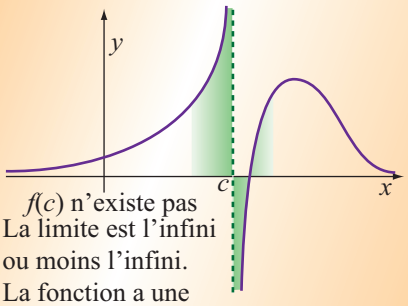
Notre première approche d'évaluation d'une limite fut une approche numérique. Nos calculs nous ont permis d'associer des comportements graphiques selon le type d'indétermination que l'on rencontrait dans l'évaluation d'une limite.

Limite de la forme 0/0 à $x = c$



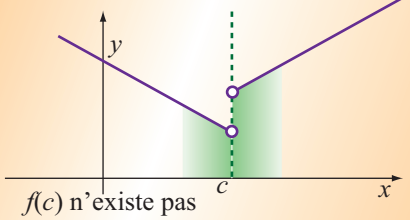
$f(c)$ n'existe pas
La limite à gauche de c est égale à la limite à droite de c. La discontinuité est non-essentielle.

Limite de la forme $k/0$ à $x = c$



$f(c)$ n'existe pas
La limite est l'infini ou moins l'infini.
La fonction a une asymptote verticale à $x = c$.

Limite et valeur absolue



$f(c)$ n'existe pas
La limite à gauche de c est un nombre réel, mais cette limite est différente de limite à droite de c.

Propriétés des limites

Notre deuxième approche a consisté à déterminer les propriétés des limites pour les appliquer dans l'évaluation d'une limite en lien avec certains cas particuliers.

PROPRIÉTÉS DES LIMITES

Si L, M, c et k sont des nombres réels et que :

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ et } \lim_{x\to c} g(x) = M,$$

alors on a les propriétés suivantes :

- $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L + M,$
- $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L - M,$
- $\lim\limits_{x\to c}\left[kf(x)\right] = k\lim\limits_{x\to c} f(x) = kL,$
- $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)g(x)\right] = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right) = LM,$
- $\lim\limits_{x\to c}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)}{\left(\lim\limits_{x\to c} g(x)\right)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$,
- $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\right]^{r/s} = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^{r/s} = L^{r/s}.$

En utilisant ces propriétés pour évaluer des limites, on a constaté rapidement que dans la plupart des cas, on peut évaluer la limite en calculant l'image par la fonction.

FONCTION CONTINUE

Lorsqu'une fonction est continue en $x = c$, la limite de la fonction lorsque x tend vers c est l'image $f(c)$. On peut donc évaluer directement la limite en calculant l'image de c par la fonction.

$$\lim_{x\to -1} = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{-1-8}{-1-2} = 3.$$

Notre premier réflexe pour évaluer la limite lorsque x tend vers c est de substituer dans l'expression algébrique. Si on est en mesure d'effectuer les opérations, on effectue les calculs et la limite est trouvée.

En substituant c à x, on peut obtenir une forme indéterminée, soit la forme 0/0 ou la forme k/0.

FONCTIONS DISCONTINUE

FORME 0/0

Lorsque le numérateur et le dénominateur s'annulent pour une même valeur c de la variable indépendante, la fonction n'a pas d'image pour cette valeur, cependant la limite à gauche est égale à la limite à droite. On dit que la fonction présente une *discontinuité non-essentielle*. Graphiquement, on dit que la fonction a une *discontinuité par trou*. Dans le cas des fonctions algébriques, on peut évaluer la limite en appliquant l'une des procédures suivantes :

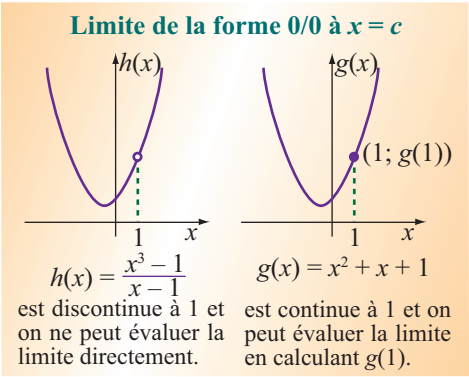
- Dans le cas d'un quotient de polynômes, on décompose en facteurs et on simplifie pour obtenir une nouvelle expression qui a la même limite lorsque x tend vers c. On évalue alors par substitution. (Voir *factorisation par division de polynômes* dans le rappel de notions d'algèbre).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3.$$

Pour pouvoir évaluer cette limite, on a déterminé une fonction continue $g(x)=x^2+x+1$ ayant le même comportement et la même limite que :

$$h(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$$

et on a évalué la limite en calculant $g(c)$, l'image de c par la fonction g.



- Dans le cas d'un quotient de fonctions qui comporte un radical au numérateur ou au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du numérateur ou du dénominateur pour pouvoir simplifier et obtenir une nouvelle expression qui a la même limite lorsque x tend vers c. On évalue alors par substitution. (Voir *rationalisation* dans le rappel de notions d'algèbre).

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x-3}-1)(\sqrt{2x-3}+1)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-3-1)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(\sqrt{2x-3}+1)}=1.$$

- Lorsque le numérateur est une différence de quotients, on met au même dénominateur pour pouvoir factoriser et simplifier. On évalue la limite par substitution dans l'expression obtenue.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{3x(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{3x}=\frac{-1}{9}.$$

FORME k/0

Lorsque le numérateur est seul à s'annuler pour une valeur c de la variable indépendante, les valeurs de la variable dépendante tendent vers l'infini ou vers moins l'infini lorsque x tend vers c. La fonction a une discontinuité essentielle qui est une discontinuité infinie. Graphiquement, cette discontinuité se traduit par une *asymptote verticale* à $x = c$.

On doit alors déterminer la comportement de la fonction à gauche et à droite de c. Pour ce faire, on a recours aux règles de l'algèbre de l'infini :

Lorsque x s'approche de c, si l'expression s'approche de :

$$\frac{k}{0^+},\begin{cases}\text{la limite est } \infty \text{ si } k>0.\\ \text{la limite est } -\infty \text{ si } k<0.\end{cases}$$

$$\frac{k}{0^-},\begin{cases}\text{la limite est } -\infty \text{ si } k>0.\\ \text{la limite est } \infty \text{ si } k<0.\end{cases}$$

LIMITES ET TAUX DE VARIATION PONCTUEL

Le taux de variation ponctuel d'une fonction en un point d'abscisse c est défini par :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_c = \lim_{\Delta x \to 0} \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[c;c+\Delta x]} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

En voulant évaluer une telle limite, on obtient toujours une indétermination de la forme 0/0. Ainsi, pour déterminer la pente de la tangente (ou taux de variation ponctuel) à la courbe de $f(x) = x^3$ au point d'abscisse 2, on doit évaluer :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{[2;x]} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$$

Dans le cas des fonctions algébriques, il est possible de lever l'indétermination pour pouvoir évaluer la limite en effectuant les manipulations algébriques requises par la forme de l'expression.

ÉQUATION DE LA TANGENTE

Puisque le taux ponctuel est représenté graphiquement par la pente de la tangente à la courbe au point considéré, on peut utiliser cette information pour trouver l'équation de cette tangente ainsi que celle de la normale.

L'équation d'une droite dont on connaît un point $(x_1; y_1)$ et la pente a est donnée par :

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

Dans le cas de la tangente à une courbe le point connu est le point de tangence $(c; f(c))$ et la pente est :

$$a_T = \left.\frac{dy}{dx}\right|_c = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

La normale à la courbe passe également par le point de tangence $(c; f(c))$ et sa pente est donnée par :

$$a_T \cdot a_N = -1 \text{ ou } a_N = \frac{-1}{a_T}.$$

ÉVALUATION DU CHAPITRE 3

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Utiliser le calcul algébrique des limites pour déterminer un taux de variation ponctuel.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Évaluation exacte de la limite d'une expression algébrique lorsque sa variable indépendante s'approche d'une valeur particulière.**
- **Identification exacte des types de discontinuités d'une fonction et de leurs caractéristiques.**
- **Analyse globale exacte de la continuité d'une fonction.**
- **Évaluation et interprétation correcte du taux de variation ponctuel selon un contexte d'application.**

Composantes susceptibles d'être évaluées :

- Connaître la définition de limite d'une fonction en un point.
- Saisir intuitivement la notion de limite et être capable de traduire le comportement graphique d'une fonction à l'aide du langage symbolique des limites et réciproquement traduire graphiquement un comportement décrit à l'aide des limites.
- Évaluer intuitivement une limite en calculant une suite d'images appropriées.
- Évaluer intuitivement une limite en analysant le comportement graphique d'une fonction au voisinage d'un point donné.
- Évaluer une limite à l'aide des propriétés.
- Évaluer une limite de la forme 0/0, k/0 ou $|k|$/0.
- Évaluer une limite d'une fonction définie par parties.
- Calculer un taux de variation ponctuel à l'aide des limites.
- Décrire les types de discontinuités à l'aide des limites.
- Calculer un taux de variation ponctuel dans un contexte d'application.
- Interpréter un taux de variation ponctuel selon un contexte d'application.

CHAPITRE 4
DÉRIVÉE : FONCTIONS ALGÉBRIQUES

Élément de compétence

Utiliser l'opérateur de dérivation et ses propriétés dans la résolution de problèmes nécessitant le recours à la dérivée de fonctions algébriques.

FONCTION DÉRIVÉE

On peut généraliser la démarche visant à évaluer le taux de variation ponctuel en un point d'abscisse c en considérant plutôt un point variable d'abscisse x. Plutôt qu'une valeur numérique, on obtient alors une fonction de x qui est appelée *fonction dérivée* de f et est notée f'.

- La dérivée f' d'une fonction f est la fonction qui décrit le comportement du taux de variation ponctuel de la fonction f au point d'abscisse x. Elle est définie par l'une ou l'autre des expressions suivantes :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- Pour calculer le taux de variation d'une fonction f en un point d'abscisse c quelconque, on détermine d'abord sa fonction dérivée f', puis on calcule $f'(c)$.

- Le taux de variation étant représenté graphiquement par la tangente à la courbe, on peut déterminer l'équation de la tangente en un point $(c; f(c))$ puisque l'on peut calculer sa pente, $f'(c)$.

- Lorsque la dérivée est positive dans un intervalle, la fonction est croissante dans cet intervalle. Lorsque la dérivée est négative dans un intervalle, la fonction est décroissante dans cet intervalle. Les frontières des intervalles de croissance et de décroissance d'une fonction polynomiale sont les zéros de la fonction dérivée.

- Lorsque la fonction dérivée est croissante dans un intervalle, le graphique de la fonction est concave vers le haut dans cet intervalle.

DÉRIVÉE DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES

Les *fonctions algébriques* sont celles dont la règle de correspondance ne comporte que des opérations algébriques : addition, soustraction, multiplication division et extraction de racines carrées.

DÉRIVÉE D'UNE FONCTION PUISSANCE

Si $f(x) = x^n$, où n est un nombre rationnel, alors :

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

En notation de l'opérateur de dérivation, on écrit :

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Formes de fonctions

La règle de correspondance de plusieurs fonctions algébrique comporte des sommes, des différences, des produits, des quotients. En déterminant l'effet de l'opérateur de dérivation sur les formes de fonctions; somme, différence, produit et quotient, on peut établir des procédures permettant de dériver plusieurs fonctions algébriques. Dans le chapitre, on a établi la liste suivante.

DÉRIVATION DES FORMES

Si $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions dérivables et k une constante :

- **Produit d'une fonction par une constante k :**

$$(kv)' = kv' \text{ ou } \frac{d}{dx}(kv) = k\frac{d}{dx}(v).$$

- **Somme (ou différence) de fonctions :**

$$(u+v)' = u' + v' \text{ ou } \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v).$$

$$(u-v)' = u' - v' \text{ ou } \frac{d}{dx}(u-v) = \frac{d}{dx}(u) - \frac{d}{dx}(v).$$

- **Produit de fonctions :**

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ ou } \frac{d}{dx}(uv) = v\frac{d}{dx}(u) + u\frac{d}{dx}(v).$$

- **Quotient de fonctions :**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ ou } \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}.$$

Grâce à l'opérateur de dérivation et à ses propriétés, on peut donc déterminer la dérivée et par conséquent, le taux de variation en n'importe quel point sans avoir chaque fois à évaluer une limite.

Pour déterminer le taux de variation ponctuel de la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 1$ au point d'abscisse 3, nous avons d'abord constaté que ce taux était un limite, soit :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_3 = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}.$$

L'évaluation de cette limite donne :

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_3 &= \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x^2-2x-1)-2}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x^2-2x-1)-2}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+1) = 4.\end{aligned}$$

Nous avons alors exprimé le taux de variation sous une forme équivalente, soit :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_3 = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}.$$

En évaluant cette limite, on obtient :

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_3 &= \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-2(3+h)-1-2}{x-3}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-6-2h-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4.\end{aligned}$$

L'étape suivante de notre développement a été de faire la même démarche en considérant un point d'abscisse x. Cela donne :

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_x &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-2(x+h)-1-(x^2-2x-1)}{x-3}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-2x-2h-1-x^2+2x+1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2hx-2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x-2+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(2x-2+h) = 2x-2.\end{aligned}$$

La limite obtenue est une expression en x que l'on note $f'(x) = 2x - 2$ et que l'on appelle *fonction dérivée*. L'image de l'abscisse d'un point par cette fonction donne le taux de variation ponctuel (ou la pente de la tangente en ce point), dans le cas présent, on obtient :

$$f'(3) = 2\times 3 - 2 = 4.$$

En appliquant cette dernière procédure aux formes de fonctions plutôt qu'à une fonction particulière, on a démontré l'effet de l'opérateur de dérivation sur une forme de fonction. Ainsi, la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 1$ est considérée comme une somme de fonction puissance et en appliquant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2-2x-1) = 2x-2.$$

La difficulté première était de définir la notion de taux de variation puisqu'on obtient toujours une forme 0/0. Il a fallu de plus établir des fondements solides à notre procédure avec la notion de continuité. Une fois ces obstacles franchis, il a été possible de développer des procédures efficaces.

ÉVALUATION DU CHAPITRE 4

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Dériver des fonctions algébriques.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Détermination correcte d'une fonction dérivée en utilisant la définition.**
- **Détermination correcte d'une fonction dérivée en utilisant les propriétés de l'opérateur de dérivation.**
- **Détermination correcte des zéros de la dérivée d'une fonction algébrique simple.**

Composantes susceptibles d'être évaluées :

- À l'aide de la définition, déterminer la dérivée d'une fonction de l'une des formes suivantes :

$$f(x) = ax^n + b,\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ ou } f(x) = \sqrt{ax}$$

- Déterminer la dérivée de fonctions à l'aide des propriétés de l'opérateur de dérivation.
- Calculer un taux de variation, ponctuel ou instantané, à l'aide de la fonction dérivée.
- Déterminer les zéros d'une fonction dérivée.
- À l'aide de la fonction dérivée, calculer et interpréter un taux de variation ponctuel dans un contexte d'application.

CHAPITRE 5
APPLICATIONS DE LA DÉRIVÉE

Élément de compétence

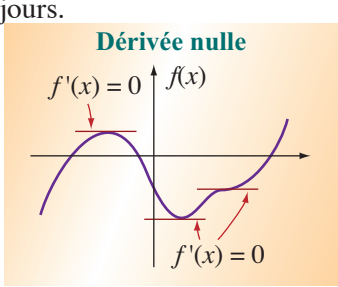
Résoudre des problèmes faisant appel à la dérivée de fonctions algébriques.

Lorsqu'une fonction décrit une situation, on peut interpréter sa dérivée selon ce contexte. Dans les applications, on rencontre les situations suivantes :

- Si la fonction décrit un volume total de vente, son taux de variation décrit le volume de vente par période, (unité par jours par semaine ou par mois).
- Si la fonction décrit le volume de vente par période, son taux de variation décrit l'accélération des ventes (unités par jour par jour, ...).
- Si la fonction décrit la position (m) en fonction du temps (s) d'un mobile par rapport à un point fixe, sa dérivée (en m/s) décrit la vitesse du mobile en fonction du temps et la dérivée seconde (en m/s^2) décrit l'accélération du mobile en fonction du temps. Si la vitesse est positive, l'objet s'éloigne du point de référence. Si elle est négative, l'objet s'approche du point de référence. Si l'accélération est positive, la vitesse est croissante et si l'accélération est négative, la vitesse est décroissante.
- Si la fonction décrit le volume de liquide dans un réservoir (en L ou en m^3) en fonction du temps (s ou min), sa dérivée (en L/s, ou en L/min, ou en m^3/s, ou en m^3/s) décrit le débit en fonction du temps.
  Si le débit est positif, le volume de liquide augmente et si le débit est négatif, le volume de liquide diminue.

DÉRIVÉE NULLE

Les points où la dérivée est nulle sont ceux dont la tangente est horizontale. Ce sont les points où s'effectuent les changements de signe de la dérivée. Un tel point peut être un maximum, un minimum de la fonction, mais pas toujours.



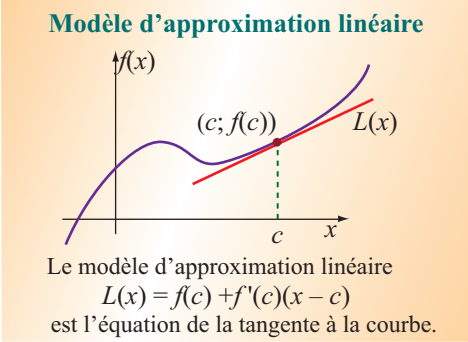
ÉQUATION DE LA TANGENTE

La tangente est une droite et pour trouver son équation on a besoin de deux informations, sa pente et un point de la droite. L'abscisse c du point étant connue, on peut en calculer l'ordonnée, $f(c)$. Pour en connaître la pente, on détermine d'abord la fonction dérivée $f'(x)$ et on calcule l'image de l'abscisse par la fonction dérivée, soit $f'(c)$. Cette image est la pente de la tangente dont l'équation est alors :

$$y = f(c) + f'(c)\,(x - c).$$

MODÈLE D'APPROXIMATION AFFINE

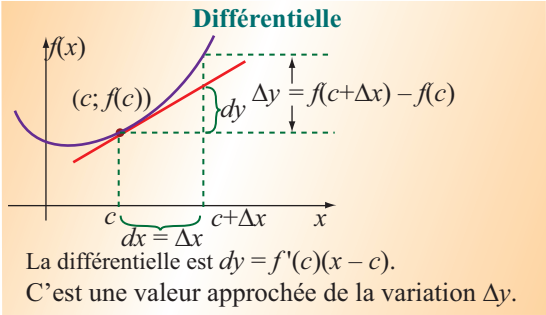
Le taux de variation étant représenté graphiquement par la tangente à la courbe, on peut déterminer l'équation de la tangente en un point $(c; f(c))$ puisqu'on peut calculer sa pente. Cette équation sert de modèle d'approximation affine de la fonction au voisinage du point $(c; f(c))$.



Le point $(c; f(c))$ est le centre d'approximation.

DIFFÉRENTIELLE

De plus, on peut calculer une approximation de la variation, la différentielle, à partir du même modèle. Le calcul de l'incertitude est une application importante de la différentielle.



Lorsque la fonction dérivée est croissante dans un intervalle, le graphique de la fonction est concave vers le haut dans cet intervalle et l'approximation par la différentielle est plus petite que la variation réelle. Lorsque la fonction dérivée est décroissante dans un intervalle, le graphique de la fonction est concave vers le bas dans cet intervalle et l'approximation par la différentielle est plus grande que la variation réelle.

ANALYSE MARGINALE

L'*analyse marginale* désigne l'étude d'un problème de gestion à l'aide du taux de variation ou de la dérivée des fonctions en cause.

- Coût marginal, le coût pour la production d'une unité supplémentaire.
- Profit marginal, le profit pour la production et la vente d'une unité supplémentaire.
- Revenu marginal, le revenu pour la vente d'une unité supplémentaire.

En fait la valeur marginale est la différentielle en un point d'abscisse x pour $dx = 1$. Mais, puisque :

$$dy = f'(x)\,dx,$$

en posant $dx = 1$, on obtient :

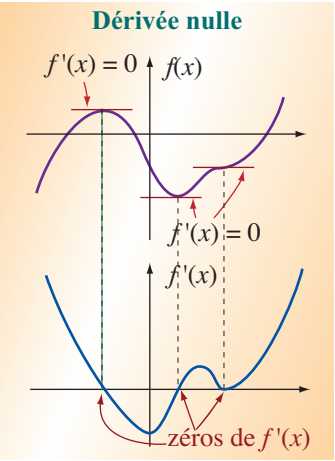
$$dy = f'(x).$$

Pour une valeur c de la variable indépendante, on estime alors :

$$dy|_c = f'(c).$$

GRAPHIQUE DE LA FONCTION DÉRIVÉE

À partir du graphique d'une fonction, on peut repérer les points remarquables de la fonction dérivée. Ainsi, l'abscisse des points où la tangente est horizontale, sont les zéros de la fonction dérivée. Lorsque la fonction est croissante sur un intervalle, sa dérivée est positive partout dans cet intervalle. Lorsque la fonction est décroissante sur un intervalle, sa dérivée est négative partout dans cet intervalle. De plus, Lorsque la fonction dérivée est croissante dans un intervalle, le graphique de la fonction est concave vers le haut dans cet intervalle et lorsque la fonction dérivée est décroissante dans un intervalle, le graphique de la fonction est concave vers le bas dans cet intervalle.



ÉVALUATION DU CHAPITRE 5

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Résoudre des problèmes faisant appel à la dérivée de fonctions algébriques.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Détermination correcte de la dérivée d'une fonction algébrique.**
- **Utilisation conforme aux règles de la dérivée d'une fonction algébrique pour résoudre des problèmes faisant appel au taux de variation ponctuel.**
- **Utilisation appropriée de la dérivée pour estimer une valeur par approximation linéaire ou pour calculer une différentielle.**
- **Analyse juste de l'évolution d'un phénomène en ayant recours aux dérivées première et seconde du modèle le décrivant.**

Composantes susceptibles d'être évaluées :

- Calculer un taux de variation, ponctuel ou instantané, à l'aide de la fonction dérivée.
- À l'aide de la fonction dérivée, déterminer la pente et l'équation de la tangente, ou de la normale, à une courbe en un point d'abscisse c.
- Calculer une approximation linéaire d'une fonction dérivable au voisinage d'un point d'abscisse c.
- Déterminer les zéros d'une fonction dérivée.
- À l'aide de la fonction dérivée, calculer et interpréter un taux de variation ponctuel dans un contexte d'application.
- Connaître la différentielle d'une fonction et son interprétation graphique.
- Utiliser la différentielle pour estimer l'erreur absolue et l'erreur relative produite dans un calcul.
- Faire l'analyse du déplacement d'un mobile, à partir de la fonction décrivant sa position au temps t.

CHAPITRE 6
DÉRIVÉE : EXPONENTIELLE ET LOGARITHMIQUE

Élément de compétence

Résoudre des problèmes faisant appel à la dérivée de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique de base *e*.

FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHMIQUE DE BASE *e*

En modélisant certains phénomènes de croissance ou de décroissance, on obtient des correspondances dans lesquelles la variable indépendante est à l'exposant. On dit que ce sont des *fonctions exponentielles*. En gestion, on rencontre ce type de fonctions, par exemple, lorsqu'on veut modéliser la croissance d'un capital ou la dépréciation d'un équipement. Un modèle exponentiel est une fonction de la forme :

$$f(x) = ab^x,$$

où b est la base de l'exponentielle et a, l'ordonnée à l'origine.

Dans l'étude d'un modèle exponentiel, on doit parfois déterminer la valeur de la variable indépendante. On doit donc résoudre une équation dont l'inconnue est en exposant qu'on appelle *équation exponentielle*.

ÉQUATIONS EXPONENTIELLES

Pour résoudre une équation exponentielle, il faut avoir recours aux logarithmes. Le *logarithme* d'un nombre dans une base donnée est l'exposant qu'il faut donner à la base pour obtenir ce nombre. Les propriétés des logarithmes qu'on utilise pour transformer une expression et résoudre une équation sont :

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b n, \quad \log_b N^p = p\log_b N,$$
$$\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b n, \quad \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Les bases de calcul courantes sont 10 et e, mais en calcul différentiel et intégral, on utilise surtout la base e.

Tout nombre positif peut s'exprimer en bas e de la façon suivante :

$$a = e^{\ln a}.$$

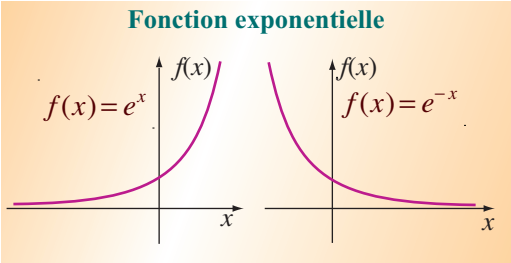
On peut donc considérer d'abord les fonction de base e.

FONCTIONS DE BASE *e*

Une fonction exponentielle de base e est une fonction de la forme :

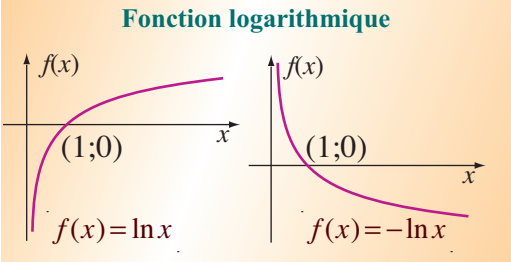
$$f(x) = e^x \text{ ou } f(x) = e^{-x},$$

La première est une fonction croissante et la seconde est décroissante.



FONCTION LOGARITHMIQUE

La fonction inverse d'une exponentielle est une logarithmique.



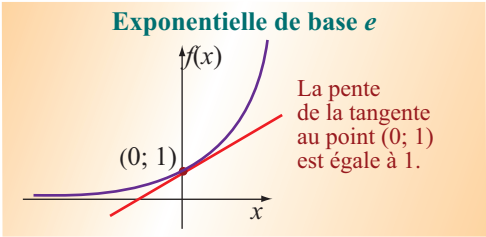
DÉRIVÉE DES FONCTIONS DE BASE *e*

Pour déterminer la dérivée d'une fonction algébrique, on pouvait effectuer des manipulations algébriques pour lever l'indétermination de la forme 0/0 que l'on rencontre inévitablement en cherchant une fonction dérivée à partir de la définition. Dans le cas des fonctions transcendantes, il nous faut inévitablement appliquer cette définition car on ne connaît pas l'effet de l'opérateur de dérivation sur ces fonctions.

Limites particulières

Il nous a fallu procéder autrement pour lever les indéterminations. On a déterminé certains limites particulières :

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1,$$ taux de variation ponctuel de $f(x) = e^x$ au point (0; 1).



$\lim_{z \to \pm\infty} \ln\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = 1$, que l'on a obtenue par approximations successives, la démonstration dépassant le niveau du cours.

En utilisant ces limites, on a été en mesure de déterminer la dérivée de l'exponentielle et de la logarithmique de base e.

DÉRIVÉES, FONCTIONS DE BASE *e*

Exponentielle de base *e*

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

Logarithmique de base *e*

$$\frac{d}{dx}\left(\ln x\right) = \frac{1}{x}$$

APPLICATIONS

Dans plusieurs situations, le modèle mathématique décrivant le phénomène est une fonction dont la règle de correspondance comporte une composante transcendante. Comme par exemple :

$$C(t) = 10t^2e^{-t} \text{ ou } P(t) = 400te^{-t}.$$

On rencontre avec ces fonctions, les mêmes applications qu'avec les fonctions algébriques.

Calcul du taux de variation, ponctuel ou instantané;
Calcul d'une approximation linéaire;
Calcul d'une différentielle;
Détection des intervalles de croissance et de décroissance.

ÉVALUATION DU CHAPITRE 6

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Résoudre des problèmes faisant appel à la dérivée de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique de base *e*.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Utilisation correcte des propriétés des exposants et des logarithmes dans la résolution d'équations.**
- **Application juste des règles de dérivation à des expressions comportant des fonctions exponentielles ou logarithmiques.**
- **Utilisation correcte de la dérivée d'une fonction exponentielle ou logarithmique dans le calcul d'un taux de variation ponctuel.**
- **Approximation linéaire correcte d'une fonction exponentielle ou logarithmique au voisinage d'un point.**
- **Utilisation correcte de la différentielle en un point d'une fonction exponentielle ou logarithmique dans le calcul d'erreur.**

Composantes susceptibles d'être évaluées :

- Déterminer la dérivée d'une fonction dont la règle de correspondance comporte une composante exponentielle ou logarithmique à l'aide des propriétés de l'opérateur de dérivation.
- À l'aide de la dérivée d'une fonction dont la règle de correspondance comporte une composante exponentielle ou logarithmique, déterminer la pente et l'équation de la tangente, ou de la normale, à une courbe en un point d'abscisse c.
- Calculer, au voisinage d'un point d'abscisse c, une approximation linéaire d'une fonction dont la règle de correspondance comporte une composante exponentielle ou logarithmique.
- Calculer, au voisinage d'un point d'abscisse c, la différentielle d'une fonction dont la règle de correspondance comporte une composante exponentielle ou logarithmique.
- Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance d'une fonction dont la règle de correspondance comporte une composante exponentielle ou logarithmique.
- Résoudre un problème d'application dont le modèle mathématique est une fonction dont la règle de correspondance comporte une composante exponentielle ou logarithmique.

CHAPITRE 7
DÉRIVÉE : FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

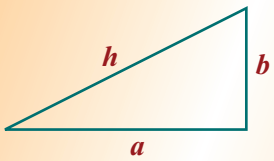
Élément de compétence

Résoudre des problèmes nécessitant le recours aux fonctions trigonométriques et à leur dérivée.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Les fonctions trigonométriques sont des généralisations des rapports de côtés dans un triangle rectangle, qu'on appelle *rapports trigonométriques*.

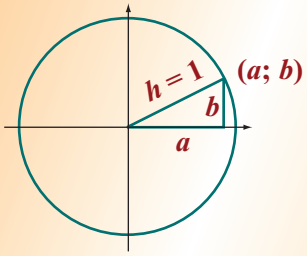
Rapports trigonométriques



$$\cos\theta = \frac{a}{h}, \quad \sin\theta = \frac{b}{h},$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a}, \quad \cot\theta = \frac{a}{b},$$
$$\sec\theta = \frac{h}{a}, \quad \csc\theta = \frac{h}{b}.$$

On généralise la notion de rapport trigonométrique en construisant un système d'axes dont l'origine est à l'un des sommets du triangle rectangle. Les coordonnées du sommet de l'autre angle aigu sont alors les longueurs des côtés de l'angle droit et on définit les fonctions en se servant des coordonnées du point d'intersection avec le cercle de rayon unitaire.

Fonctions trigonométriques



$$\cos\theta = a, \quad \sin\theta = b,$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a}, \quad \cot\theta = \frac{a}{b},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{a}, \quad \csc\theta = \frac{1}{b}.$$

ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Une *équation trigonométrique* est une équation qui comporte une ou des fonctions trigonométriques. Pour résoudre, on doit utiliser les identités trigonométriques et transformer l'équation pour qu'elle ne contienne qu'une seule forme de fonction.

MODÈLE SINUSOÏDAL

En gestion, comme en sciences, on rencontre des phénomènes cycliques. Pour modéliser des tels phénomènes, on a recours au *modèle sinusoïdal* qui est une fonction de la forme :

$$g(t) = A\sin(\omega t + \phi) + C,$$

où A est l'amplitude, C le paramètre de déplacement vertical, $f = \omega/2\pi$ est la *fréquence*, $T = 1/f$ est la *période* et ϕ est l'*angle de phase initial*.

Le modèle sinusoïdal est une fonction composée et pour la dériver, il faut avoir recours à la dérivée du sinus et à la dérivation en chaîne.

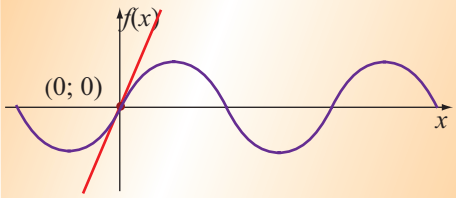
DÉRIVÉE DES FONCTIONS

Pour voir comment dériver les fonctions trigonométriques, il a fallu établir quelques limites particulières. Ce sont :

Limites particulières

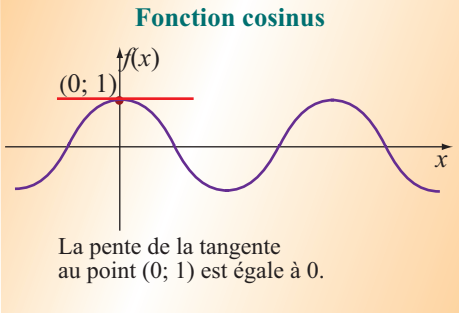
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1,$ taux de variation ponctuel de $f(x) = \sin x$ au point (0; 0).

Fonction sinus



La pente de la tangente au point (0; 0) est égale à 1.

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0,$ taux de variation ponctuel de $f(x) = \cos x$ au point (0; 1).



Grâce à ces deux limites particulières, on peut déterminer la dérivée de la fonction sinus et de la fonction cosinus.

Pour déterminer la dérivée des autres fonctions trigonométriques, il suffit d'appliquer la règle du quotient de l'opérateur de dérivation, puisque les quatre autres fonctions peuvent s'exprimer en termes de sinus et de cosinus par les identités trigonométriques.

DÉRIVÉE DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Les règles d'utilisation de l'opérateur de dérivation, incluant la dérivation en chaîne, sont toujours valides avec les fonctions trigonométriques.

Dans les problèmes d'optimisation et de taux de variation liés, la description du problème fait appel au triangle rectangle.

ÉVALUATION DU CHAPITRE 7

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Résoudre des problèmes nécessitant le recours aux fonctions trigonométriques et à leur dérivée.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Résolution exacte d'équations trigonométriques en utilisant les valeurs des angles remarquables.**
- **Utilisation correcte des identités trigonométriques.**
- **Application juste des règles de dérivation à des expressions comportant des fonctions trigonométriques.**
- **Utilisation correcte de la dérivée des fonctions trigonométriques dans le calcul d'un taux de variation ponctuel.**

Composantes susceptibles d'être évaluées :

- Résoudre une équation trigonométrique en ayant recours au cercle trigonométrique ou à la calculatrice.
- Décrire la relation entre une longueur et un angle dans un triangle rectangle.
- Décrire un phénomène périodique à l'aide d'un modèle sinusoïdal.
- Démontrer l'effet de l'opérateur de dérivation sur une fonction trigonométrique.
- Dériver des fonctions comportant des composantes trigonométriques.
- Résoudre des problèmes d'optimisation nécessitant le recours à la dérivée de fonctions trigonométriques.
- Résoudre des problèmes de taux de variation liés nécessitant le recours à la dérivée de fonctions trigonométriques.

CHAPITRE 8
FONCTIONS COMPOSÉES

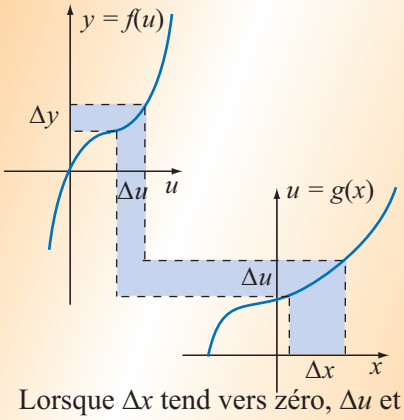
Élément de compétence

Résoudre des problèmes faisant appel à la dérivée d'une fonction composée.

DÉRIVATION DE FONCTIONS COMPOSÉES

Les fonctions que l'on doit utiliser pour modéliser des situations ne sont pas toujours des modèles simples comme $f(x) = \sin x$ ou $f(x) = e^x$. On rencontre plus souvent des fonctions comme $f(t) = \sin(2t - 3)$ ou $f(x) = e^{2x}$. Ces fonctions sont dites *composées*. L'illustration suivante rappelle la démarche permettant de déterminer une procédure pour dériver une fonction composée.

Fonction composée



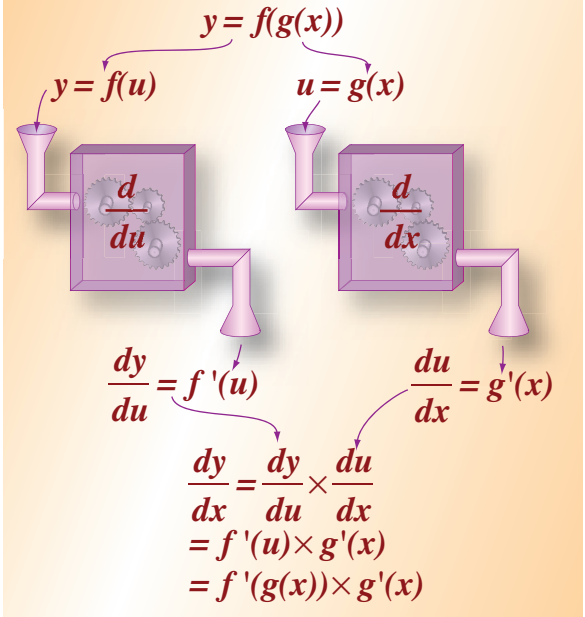
Lorsque Δx tend vers zéro, Δu et Δy tendent vers 0 et :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

La procédure de dérivation d'une fonction composée consiste donc à scinder la fonction, à dériver chacune des parties, puis à recomposer en appliquant la procédure :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

Dérivation de fonctions composées



DÉRIVATION EN CHAÎNE

La dérivation en chaîne est une procédure pour dériver les fonctions composées sans avoir à traiter séparément chacune des composantes. Elle consiste à appliquer l'opérateur de dérivation sur les formes de fonctions, en partant de la forme la plus extérieure et en enchaînant avec la forme intérieure suivante. En procédant ainsi, de proche en proche, on obtient la dérivée de la fonction composée.

C'est en appliquant la procédure de dérivation des fonctions composées que l'on a obtenu l'effet de l'opérateur de dérivation sur chacune des formes de fonctions.

OPÉRATEUR DE DÉRIVATION ET FORMES DE FONCTIONS

$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$\frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u\frac{du}{dx}$	$(e^u)' = e^u u'$
$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u}u'$
$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dx}$	$(\sin u)' = u'\cos u$
$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\frac{du}{dx}$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$	$(\tan u)' = u'\sec^2 u$
$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u\tan u\frac{du}{dx}$	$(\sec u)' = u'\sec u\tan u$
$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$	$(\cot u)' = -u'\csc^2 u$
$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u\cot u\frac{du}{dx}$	$(\csc u)' = -u'\csc u\cot u$

Ainsi, pour dériver la fonction définie par :

$$v(x) = e^{(2x^2-3)^3},$$

on applique directement l'opérateur de dérivation à partir de l'extérieur jusqu'à la fonction la plus intérieure. Cela donne :

$$\begin{aligned}
v'(x) = \frac{dv}{dx} &= \overbrace{\frac{d}{dx}\left(e^{(2x^2-3)^3}\right)}^{\frac{d}{dx}\left(e^u\right)} \\
&= \overbrace{e^{(2x^2-3)^3}\frac{d}{dx}\left((2x^2-3)^3\right)}^{e^u\frac{du}{dx}} \\
&= e^{(2x^2-3)^3}\overbrace{\frac{d}{dx}\left((2x^2-3)^3\right)}^{\frac{d}{du}\left(u^n\right)} \\
&= e^{(2x^2-3)^3}\times\overbrace{3(2x^2-3)^2\frac{d}{dx}\left((2x^2-3)\right)}^{nu^{n-1}\frac{du}{dx}} \\
&= e^{(2x^2-3)^3}\times 3(2x^2-3)^2\overbrace{\frac{d}{dx}\left((2x^2-3)\right)}^{\frac{d}{dx}(u)} \\
&= e^{(2x^2-3)^3}\times 3(2x^2-3)^2\times\overbrace{4x}^{\frac{du}{dx}} \\
&= 12x(2x^2-3)^2e^{(2x^2-3)^3}.
\end{aligned}$$

Dans la pratique, on ne reproduit pas les parties colorées, elles représentent le raisonnement que l'on tient en appliquant la procédure.

ÉVALUATION DU CHAPITRE 8

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Résoudre des problèmes faisant appel à la dérivée d'une fonction composée.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Application correcte de la procédure de dérivation en chaîne.**
- **Analyse correcte de situations modélisées par une fonction composée.**
- **Détermination correcte d'un modèle d'approximation linéaire une fonction composée.**
- **Résolution correcte de problèmes mettant en cause des taux de variations liés.**

Composantes susceptibles d'être évaluées.

- Appliquer la procédure de dérivation des fonctions composées.
- Appliquer la procédure de dérivation en chaîne.
- Calculer la dérivée de fonctions explicites ou implicites, algébriques ou transcendantes en utilisant les formules de dérivation appropriées.
- Calculer la dérivée de fonctions implicites, algébriques ou transcendantes en utilisant les formules de dérivation appropriées.
- Décrire le lien entre les variables d'une situation d'application de taux liés.
- Résoudre des problèmes de taux de variation liés en appliquant la démarche présentée dans le cours.

CHAPITRE 9
DÉRIVÉES ET ESQUISSES GRAPHIQUES

Élément de compétence

Faire l'analyse complète d'une fonction et construire sa représentation graphique.

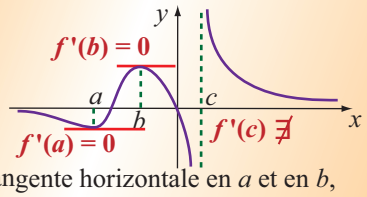
VALEURS CRITIQUES

Les valeurs critiques d'une fonction sont les valeurs pour lesquelles il peut y avoir un changement important dans le comportement d'une fonction, changement qui se reflète dans le graphique de celle-ci.

VALEURS CRITIQUES, DÉRIVÉE PREMIÈRE

C'est une valeur a telle que $f'(a) = 0$ ou $f'(a)$ n'existe pas.
Si $f'(a) = 0$, la tangente est horizontale à $x = a$. Le point $(a; f(a))$ est alors appelé *point critique*.
Si $f'(a)$, n'existe pas, la fonction peut avoir une asymptote verticale, un point anguleux ou de rebroussement à $x = a$.

Valeurs critiques, dérivée première

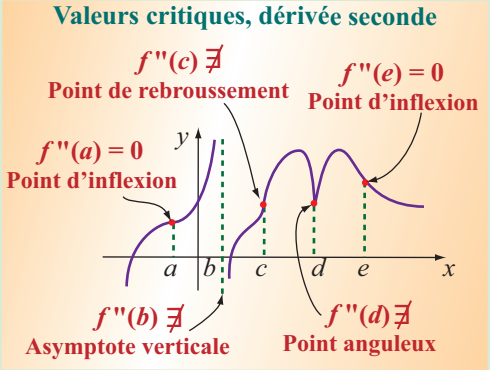


Tangente horizontale en a et en b, asymptote verticale en c.

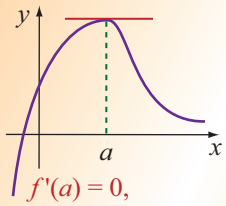
VALEURS CRITIQUES, DÉRIVÉE SECONDE

C'est une valeur a telle que $f''(a) = 0$ ou $f''(a)$ n'existe pas.
Si $f''(a) = 0$, la fonction f peut avoir un maximum, un minimum ou un point d'inflexion à $x = a$. Le point $(a; f(a))$ est appelé *point critique*.
Si $f''(a)$, n'existe pas, la dérivée première a une asymptote verticale à $x = a$. La fonction peut avoir une asymptote verticale, un point anguleux ou un point de rebroussement.

Valeurs critiques, dérivée seconde



Maximum relatif

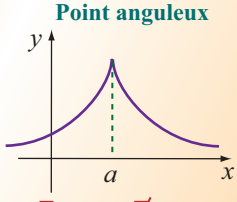


$f'(a) = 0$,

Dérivée première
$f'(x) > 0$ si $x < a$
$f'(x) < 0$ si $x > a$

Dérivée seconde
$f'(a) = 0$,
$f''(a) < 0$.

Point anguleux

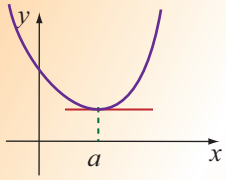


$f(a)$ ∃, $f'(a)$ ∄, $f''(a)$ ∄

Dérivée première
$f'(x) > 0$ si $x < a$
$f'(x) < 0$ si $x > a$

Dérivée seconde
$f''(x) > 0$ si $x < a$
$f''(x) > 0$ si $x > a$

Minimum relatif

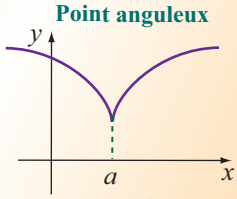


$f'(a) = 0$,

Dérivée première
$f'(x) < 0$ si $x < a$
$f'(x) > 0$ si $x > a$

Dérivée seconde
$f'(a) = 0$,
$f''(a) > 0$.

Point anguleux

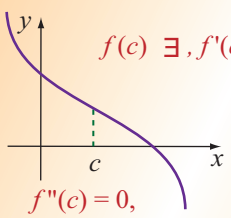


$f(a)$ ∃, $f'(a)$ ∄, $f''(a)$ ∄

Dérivée première
$f'(x) < 0$ si $x < a$
$f'(x) > 0$ si $x > a$

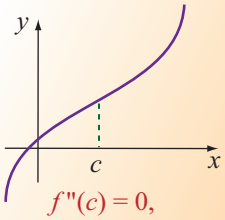
Dérivée seconde
$f''(x) < 0$ si $x < a$
$f''(x) < 0$ si $x > a$

Point d'inflexion



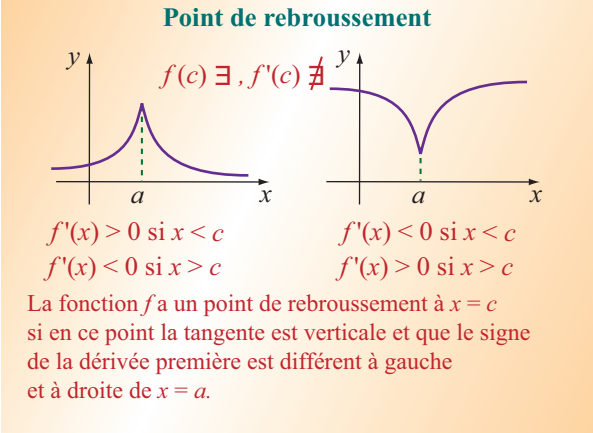
$f(c)$ ∃, $f'(c)$ ∃

$f''(c) = 0$,
$f''(x) > 0$ si $x < c$
$f''(x) < 0$ si $x > c$



$f''(c) = 0$,
$f''(x) < 0$ si $x < c$
$f''(x) > 0$ si $x > c$

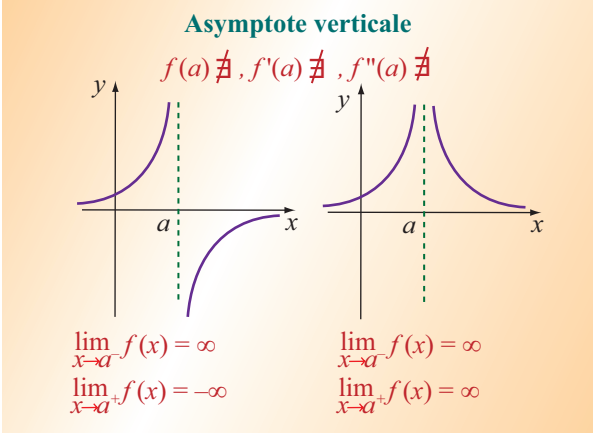
La fonction f a un point d'inflexion à $x = c$ si $f''(c) = 0$ et que la dérivée seconde a un changement de signe à $x = c$.



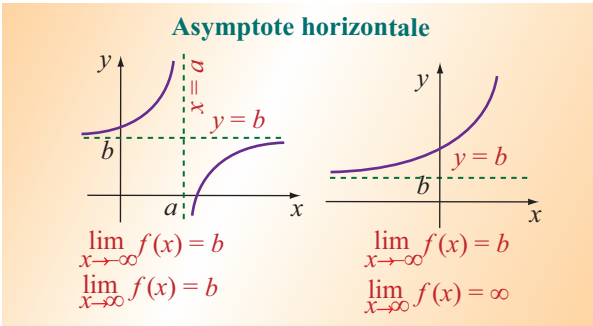
La dérivée première et la dérivée seconde d'une fonction peuvent avoir un changement de signe de part et d'autre de leurs valeurs critiques.

ASYMPTOTES

Une asymptote verticale d'une fonction $f(x)$ est une droite de la forme $x = a$, vers laquelle tend la courbe lorsque la variable indépendante s'approche de la valeur a. Les asymptotes verticales d'une fonction rationnelle sont obtenues en déterminant les valeurs de sa variable indépendante pour lesquelles le dénominateur s'annule alors que le numérateur est non nul.



Une asymptote horizontale est une droite de la forme $y = b$ vers laquelle tend la courbe lorsque la variable indépendante tend vers l'infini. La limite à l'infini de la fonction, si elle existe, est une asymptote horizontale.



ÉVALUATION DU CHAPITRE 9

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Faire l'analyse complète d'une fonction et construire sa représentation graphique.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Détermination correcte des valeurs critiques d'une fonction.**
- **Analyse correcte du comportement d'une fonction à partir du signe de ses dérivées première et seconde.**
- **Détermination correcte des comportements asymptotiques d'une fonction.**
- **Construction correcte du tableau synthèse des données obtenues dans l'analyse d'une fonction.**
- **Représentation graphique conforme aux informations données par les dérivées première et seconde et aux comportements asymptotiques de la fonction.**

Composantes susceptibles d'être évaluées :

- Déterminer les extremum d'une fonction algébrique ou transcendante.
- Déterminer les points critiques d'une fonction algébrique ou transcendante.
- Déterminer les points d'inflexion d'une fonction algébrique ou transcendante.
- Déterminer les points où la tangente à une courbe est horizontale.
- Déterminer les intervalles de croissance et de décroissance d'une fonction algébrique ou transcendante.
- Déterminer les intervalles de concavité vers le haut et vers le bas d'une fonction algébrique ou transcendante.
- Étant donné un tableau donnant les signes de f, f' et f'', tracer le graphique de f.
- Faire l'analyse complète d'une fonction algébrique ou transcendante et en esquisser le graphique.

CHAPITRE 10
OPTIMISATION

Élément de compétence

Trouver les valeurs optimales d'une situation modélisable par une fonction algébrique ou transcendante.

OBJET DE L'OPTIMISATION

En optimisation, on doit rechercher les valeurs optimales d'un modèle décrivant une situation ou un phénomène.

PROCÉDURE D'OPTIMISATION

- **Identifier correctement les variables du problème.**
- **Identifier la variable à optimiser et celle qui sera traitée comme variable indépendante.**
- **Établir la relation entre les variables sur lesquelles portent les contraintes du problème.**
- **Établir la relation entre la variable à optimiser et les autres variables.**
- **Utiliser les relations entre les variables pour exprimer la variable à optimiser en fonction de la variable indépendante et déterminer l'intervalle des valeurs correspondant au problème (domaine de validité).**
- **Dériver la variable à optimiser, trouver ses zéros et appliquer un test pour trouver, parmi ces zéros, celle pour laquelle la fonction atteint la valeur optimale cherchée.**
- **Rédiger la conclusion en interprétant le résultat selon le contexte.**

Dans l'application de cette procédure, les relations entre les variables sont parfois données, mais il faut parfois les déterminer à partir des données. Ce sont la plupart du temps des relations obtenues géométriquement comme l'aire d'une surface plane ou l'aire latérale et le volume d'un solide. Dans certains cas, on a recours au théorème de Pythagore ou à la proportionnalité des côtés de figures semblables.

Aire d'une surface plane

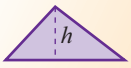
Cercle

Aire : $A = \pi r^2$
Circonférence : $C = 2\pi r$

Rectangle

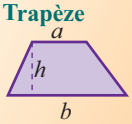
Aire : $A = ah$
Périmètre : $P = 2a + 2h$

Triangle



Aire : $A = ah/2$

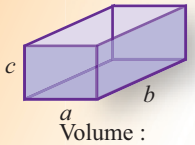
Trapèze



Aire : $A = h(a + b)/2$

Volume d'un solide

Parallélépipède

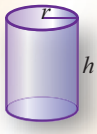


Volume : $V = abc$
Surface (avec dessus) : $S = 2(ac + ab + bc)$

Sphère

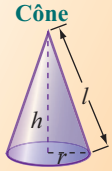
Volume : $V = 4\pi r^3/3$
Surface : $S = 4\pi r^2$

Cylindre



Volume : $V = \pi r^2 h$
Surface (avec dessus) : $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Cône



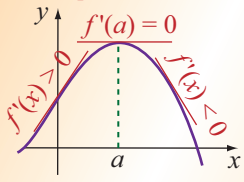
Volume : $V = \pi r^2 h/3$
Surface latérale : $S = \pi rl$

TESTS À APPLIQUER

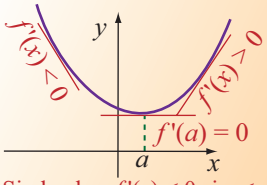
Dans la procédure d'optimisation, il faut appliquer un test pour déterminer parmi les zéros de la fonction dérivée les valeurs pour lesquelles la fonction atteint la valeur optimale cherchée. On applique de préférence le test de la dérivée seconde. Si la dérivée seconde est trop complexe à obtenir, on utilise le test de la dérivée première qui demande un peu plus de calculs pour déterminer le signe de la dérivée première à gauche et à droite de ses zéros.

Test de la dérivée première

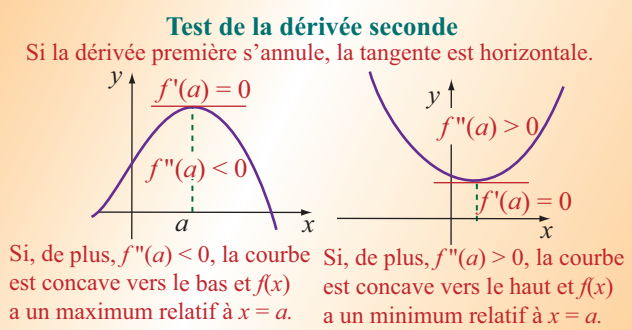
Si la dérivée première s'annule, la tangente est horizontale.



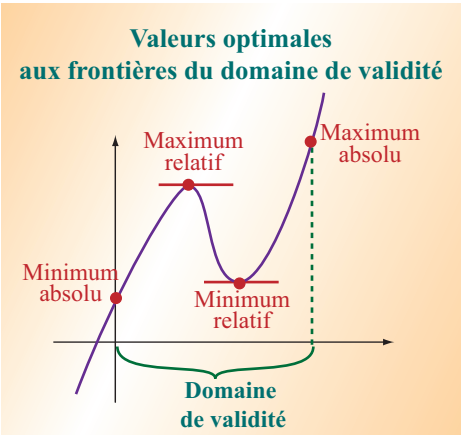
Si, de plus, $f'(x) > 0$ si $x < a$ et $f'(x) < 0$ si $x > a$ $f(x)$ a un maximum relatif à $x = a$.



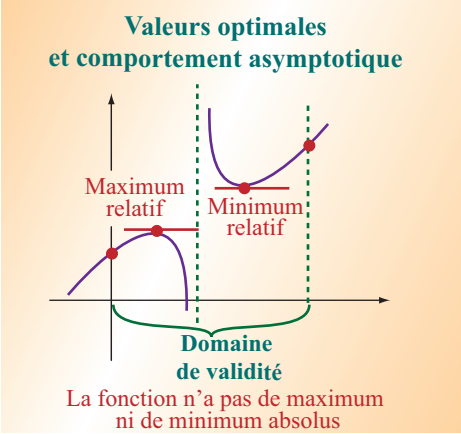
Si, de plus, $f'(x) < 0$ si $x < a$ et $f'(x) > 0$ si $x > a$ $f(x)$ a un minimum relatif à $x = a$.



Lorsque certaines contraintes se traduisent par une restriction sur le domaine de la fonction, il faut en plus évaluer la fonction aux frontières de cet intervalle car la valeur optimale peut être atteinte à l'une des frontières de l'intervalle de validité.



Lorsque le modèle a des comportements asymptotiques à l'intérieur de l'intervalle de validité, il faut tenir compte de ces comportements dans la réflexion sur l'existence de valeurs optimales selon que l'on cherche une valeur relative ou absolue.



Lorsque la résolution du problème nécessite le recours à des fonctions exponentielle ou logarithmique, le modèle sera donné. L'utilisation de relations trigonométriques dans un triangle est considérée comme acquise et les étudiants doivent être capables d'écrire les équations du problème.

ÉVALUATION DU CHAPITRE 10

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Trouver les valeurs optimales d'une situation modélisable par une fonction algébrique ou transcendante.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Description adéquate de la situation par un modèle mathématique.**
- **Utilisation correcte de la procédure pour déterminer les valeurs critiques.**
- **Détermination exacte des valeurs critiques à considérer.**
- **Application correcte d'un test pour déterminer la valeur cherchée.**

Composantes susceptibles d'être évaluées :

- Identifier les variables dans une situation d'application.
- Établir la relation entre les variables sur lesquelles portent les contraintes du problème.
- Déterminer la relation entre la variable à optimiser et les autres variables.
- Utiliser les relations entre les variables, pour exprimer la variable à optimiser en fonction d'une seule variable et déterminer l'intervalle correspondant au problème à l'étude (domaine de validité).
- Dériver la variable à optimiser et appliquer un test pour trouver la valeur optimale cherchée.
- Tirer les conclusions qui s'imposent et interpréter les résultats.

CHAPITRE 11
DÉRIVATION IMPLICITE ET TAUX DE VARIATION LIÉS

Élément de compétence

Utiliser la dérivation implicite pour déterminer la relation entre des taux de variation.

DÉRIVATION IMPLICITE

La dérivation implicite consiste à appliquer l'opérateur de dérivation aux deux membres d'une équation sans avoir à isoler une variable pour l'exprimer explicitement comme fonction de la variable par rapport à laquelle on dérive. Après avoir appliqué l'opérateur de dérivation, on peut isoler le taux de variation cherché, la procédure pour isoler est plus simple après avoir dérivé qu'avant.

Dans la plupart des cas, le taux de variation obtenu par dérivation implicite est exprimé en fonction des deux variables. Pour calculer ce taux en un point, il faut donc connaître les deux coordonnées du point et non seulement l'abscisse de celui-ci comme dans la dérivation explicite.

La dérivation implicite par rapport à x de l'équation :

$$x^2 + y^2 = 25,$$

donne :

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}(25),$$

d'où :

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \text{ et } \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}.$$

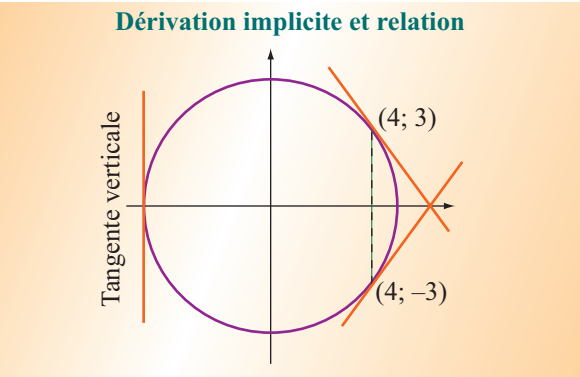
Dans cette expression, on voit clairement que le taux de variation dépend à la fois de x et de y.

Grâce à la dérivation implicite, on peut appliquer les procédures de dérivation non seulement à des fonctions, mais également à des relations. Dans une relation, il est possible d'avoir plus d'une correspondance pour une valeur de x donnée, d'où l'intérêt d'exprimer le taux de variation en fonction des deux coordonnées du point. Ainsi, la relation :

$$x^2 + y^2 = 25$$

est l'équation d'un cercle de rayon 5, centré à l'origine.

Sur ce cercle, il y a deux points dont l'abscisse est 4 et la pente de la tangente n'est pas la même en ces deux points.



On remarque également qu'en certains points de la courbe, la tangente peut être verticale. On repère ces points en déterminant les coordonnées des points pour lesquels le dénominateur du taux de variation s'annule. Dans le cas du cercle ci-haut, le taux de variation est donné par :

$$\cos\theta = a,$$

$$\tan\theta = \frac{b}{\ }$$

Le dénominateur s'annule lorsque $y = 0$ et en substituant dans la relation

$$x^2 + y^2 = 25,$$

on trouve $x = \pm 5$. La tangente est donc verticale en $(-5; 0)$ et $(5; 0)$.

L'erreur la plus fréquente en dérivation implicite est le non respect de la règle du produit. Ainsi, dans la relation :

$$x^3 + 2x^2y^3 = 4,$$

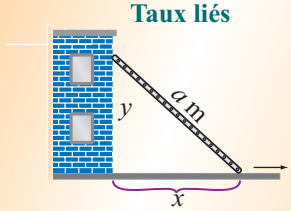
Le terme $2x^2y^3$ doit être considéré comme un produit de deux fonctions lorsqu'on dérive.

TAUX DE VARIATION LIÉS

Lorsque des variables évoluant dans le temps sont liées par une relation, il existe également une relation entre leurs taux de variation instantané. On obtient cette relation en dérivant implicitement par rapport au temps t la relation entre les variables. Dans ce genre de situations, il faut souvent établir d'abord la relation entre les variables à partir de la description verbale du problème. En modélisant la situation, il faut éviter de substituer les données avant de dériver car cela revient à remplacer des variables par des constantes.

Un problème classique et celui de l'échelle dont le pied glisse à un taux donné.

Taux liés



Lorsque le pied de l'échelle glisse, les longueurs x et y varient. Ces longueurs sont liées par :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

La relation entre les taux de variation est obtenue en dérivant implicitement par rapport au temps t *l*es deux membres de l'équation reliant les variables x et y.

Pour déterminer le taux de variation de la hauteur du point d'appui sur le mur par rapport au sol, il faut établir la relation entre les longueurs, ce qui donne, en appliquant le théorème de Pythagore :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

La dérivation implicite par rapport à t de l'équation $x^2 + y^2 = a^2$, où a est une constante donne :

$$\frac{d}{dt}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dt}\left(a^2\right), \text{ d'où } 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

et :

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-x}{y}\frac{dx}{dt}.$$

ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES

Dans la description de la trajectoire curviligne d'un point mobile par des équations paramétriques, le taux de variation de chacune des variables par rapport au paramètre donne les vitesses horizontale et verticale du point mobile. Le quotient de ces taux donne la pente de la tangente à la trajectoire, soit la direction instantanée du mouvement. On détermine la grandeur de la vitesse tangentielle du point mobile en appliquant la relation de Pythagore. Cette grandeur est la diagonale du rectangle formé par les vecteurs décrivant les vitesses horizontale et verticale du point mobile. Le sens du déplacement dépend du sens des vecteurs horizontal et vertical.

La dérivée seconde des équations paramétriques donne les composantes horizontale et verticale de l'accélération du point mobile. On applique la relation de Pythagore pour calculer la grandeur de l'accélération subie par le point mobile.

ÉVALUATION DU CHAPITRE 11

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Analyser le comportement d'un phénomène à partir de son taux de variation.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Description juste du lien entre les variables**
- **Application correcte de la procédure de dérivation implicite pour déterminer le lien entre les taux de variation.**
- **Utilisation juste du lien entre les taux de variation dans l'analyse de la situation.**
- **Application correcte des procédures de dérivation à une situation décrite par des équations paramétriques.**
- **Utilisation juste des taux de variation dans l'analyse d'une situation décrite par des équations paramétriques.**

Composantes susceptibles d'être évaluées :

- Appliquer la procédure de dérivation implicite.
- Déterminer l'expression décrivant un taux de variation dans une relation en utilisant les formules de dérivation appropriées.
- Déterminer les points d'une relation dont la tangente est verticale.
- Décrire le lien entre les variables dans des situations d'application de taux de variation liés.
- Déterminer la relation entre les taux de variation par dérivation implicite.
- Résoudre des problèmes de taux de variation liés en appliquant la démarche présentée dans le cours.
- Déterminer la dérivée d'équations paramétriques.

CHAPITRE 12
DÉRIVÉE : FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES INVERSES

Élément de compétence

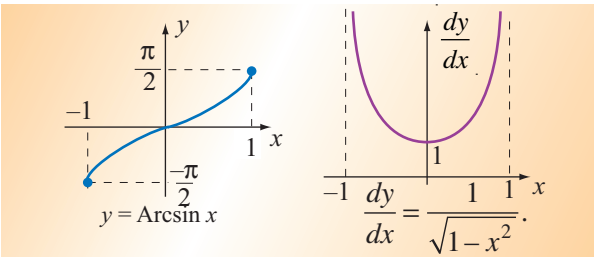
Résoudre des problèmes faisant appel aux fonctions trigonométriques inverses et à leur dérivée.

Fonction Arcsinus

La fonction inverse de la fonction sinus est appelée *Arcsinus* et est définie de la façon suivante :

$y = \text{Arcsin } x$ si et seulement si $x = \sin y$,

où $\text{dom}_{\text{Arcsin}} = [-1; 1]$ et $\text{codom}_{\text{Arcsin}} = [-\pi/2; \pi/2]$.

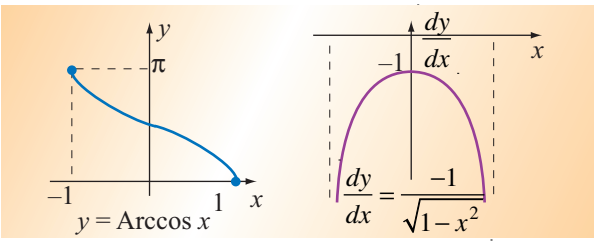


Fonction Arccosinus

La fonction inverse de la fonction cosinus est appelée *Arccosinus* et est définie de la façon suivante :

$y = \text{Arccos } x$ si et seulement si $x = \cos y$,

où $\text{dom}_{\text{Arccos}} = [-1; 1]$ et $\text{codom}_{\text{Arccos}} = [0; \pi]$.

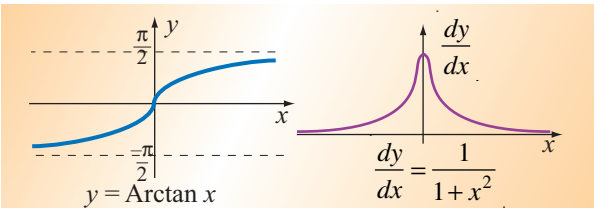


Fonction Arctangente

La fonction inverse de la fonction tangente est appelée *Arctangente* et est définie de la façon suivante :

$y = \text{Arctan } x$ si et seulement si $x = \tan y$,

où $\text{dom}_{\text{Arctan}} = \mathbf{R}$ et $\text{codom}_{\text{Arctan}} =]-\pi/2; \pi/2[$.

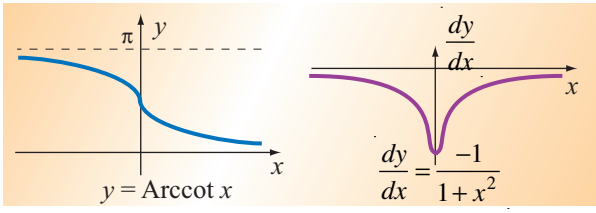


Fonction Arccotangente

La fonction inverse de la fonction cotangente est appelée *Arccotangente* et est définie de la façon suivante :

$y = \text{Arccot } x$ si et seulement si $x = \cot y$,

où $\text{dom}_{\text{Arccot}} = \mathbf{R}$ et $\text{codom}_{\text{Arccot}} =]0; \pi[$.



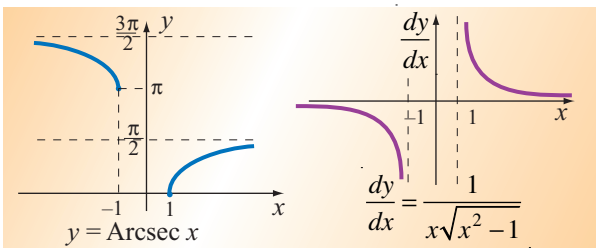
Fonction Arcsécante

La fonction inverse de la fonction sécante est appelée *Arcsécante* et est définie de la façon suivante :

$y = \text{Arcsec } x$ si et seulement si $x = \sec y$,

où $\text{dom}_{\text{Arcsec}} =]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$

et $\text{codom}_{\text{Arcsec}} = [0; \pi/2[\cup [\pi; 3\pi/2[$.



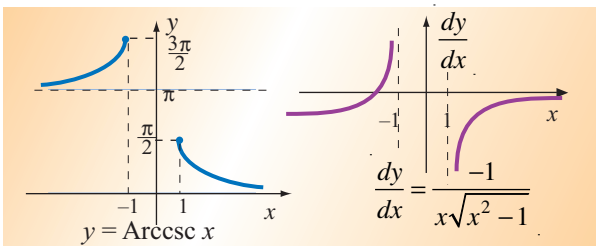
Fonction Arccosécante

La fonction inverse de la fonction cosécante est appelée *Arccosécante* et est définie de la façon suivante :

$y = \text{Arccsc } x$ si et seulement si $x = \csc y$,

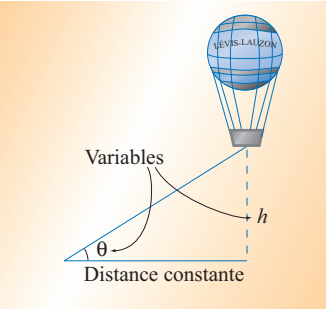
où $\text{dom}_{\text{Arccsc}} =]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$

et $\text{codom}_{\text{Arccsc}} =]0; \pi/2] \cup]\pi; 3\pi/2]$.



À cause de la périodicité des fonctions trigonométriques, on doit imposer une restriction à leur domaine pour définir les fonctions inverses. Cette restriction est choisie de telles sorte que toutes les valeurs possibles soient prises en compte.

En utilisant les fonctions trigonométriques inverses, on peut décrire un angle en fonction d'une longueur dans un triangle ou en fonction d'un rapport de longueurs dans un cercle.



Les applications sont les mêmes que pour toutes les autres formes de fonctions et leur dérivée : calcul d'une différentielle, modèle d'approximation linéaire, analyse de fonctions, optimisation et taux de variation liés.

En établissant la relation entre un angle et une longueur et en dérivant implicitement cette relation, on établit celle entre le taux de variation de l'angle et le taux de variation de la longueur.

DÉRIVATION DES FONCTIONS COMPOSÉES

$$\frac{d}{dx}(\text{Arc}\sin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arc}\cos u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arc}\tan u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arccot } u) = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arcsec } u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arccsc } u) = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

ÉVALUATION DU CHAPITRE 12

L'élément de compétence visé par ce chapitre est :

Résoudre des problèmes faisant appel aux fonctions trigonométriques inverses et à leur dérivée.

Les critères de performance démontrant l'acquisition de cet élément de compétence sont :

- **Application correcte des procédures de dérivation.**
- **Analyse correcte de situations modélisées par une fonction trigonométrique inverse.**
- **Détermination correcte d'un modèle d'approximation linéaire d'une fonction trigonométrique inverse.**
- **Résolution correcte de problèmes d'optimisation et de taux liés mettant en cause des fonctions trigonométriques inverses.**

Composantes susceptibles d'être évaluées :

- Déterminer l'image de valeurs remarquables par les fonctions trigonométriques inverses.
- Appliquer les procédures de dérivation implicite pour établir la dérivée de chacune des fonctions trigonométriques inverses.
- Dériver des fonctions dont certaines composantes élémentaires sont des fonctions trigonométriques inverses.
- Déterminer un modèle d'approximation linéaire d'une fonction trigonométrique inverse.
- Résoudre des problèmes d'optimisation ou de taux reliés mettant en cause des fonctions trigonométriques inverses.