Cahier d’exercices

Calcul différentiel,

applications en sciences humaines

André Ross

À France, Magali, Noémie et Jean-Christian
Solène, Damien
Alice. Maëlle, Philémon

Infographie
André Ross
Prodafor Inc.

© 2019 Prodafor Inc
17 rue Sainte-Thérèse
Lévis (Québec) G6V 5K6
1-418-833-4391
Fax: 1-418-833-8364
prodafor@videotron.ca

Cahier d'exercices
Calcul différentiel applications en sciences humaines
ISBN 978-2-923330-52-5
Dépôt légal - Bibliothèque nationale du Québec, 2019
Dépôt légal - Bibliothèque nationale du Canada, 2019

Table des matières

Calcul différentiel,

applications en sciences humaines

Avant-propos

Ce cahier d'exercices a été conçu pour être utilisé en classe afin d'encadrer l'étudiant dans ses premières tentatives de résolution d'exercices.
Chaque numéro d'exercice sur un thème particulier de la table des matières réfère à une vidéo dont le lien est donné sur la page du professeur. Celui-ci peut présenter chaque problème à l'aide de la vidéo correspondante et mettre sur pause pour laisser l'étudiant le résoudre. En remettant la vidéo en marche, le professeur présente alors la solution que l'étudiant peut comparer à la sienne pour détecter d'éventuelles erreurs et les corriger.
La solution des exercices de chacun des thèmes est également accessible sur la page du professeur sous format pdf.
Il est à noter qu'il ne suffit pas de faire les exercices de ce cahier pour réussir le cours, l'étudiant doit aussi résoudre les exercices du livre recommandés par le professeur. Les exercices de ce cahier ne sont pas dans le livre.

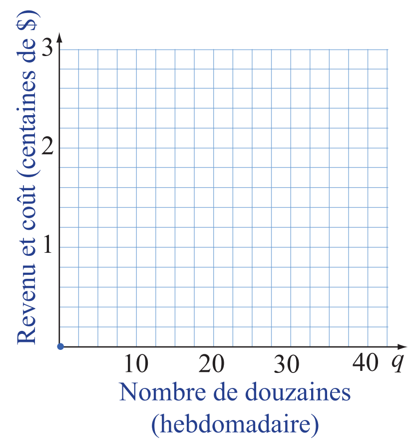
Fonctions et modélisation

Exercice 01a: données du problème

Une boulangère produit des beignes dont la fabrication nécessite des frais variables de 2,50$ la douzaine et des frais fixes de 100 $ par semaine. Elle vend ces beignes 7,50 $ $ la douzaine.

Décrire mathématiquement la fonction coût de production hebdomadaire et la fonction revenu hebdomadaire. Représenter graphiquement ces fonctions et déterminer le seuil de rentabilité.

Solution

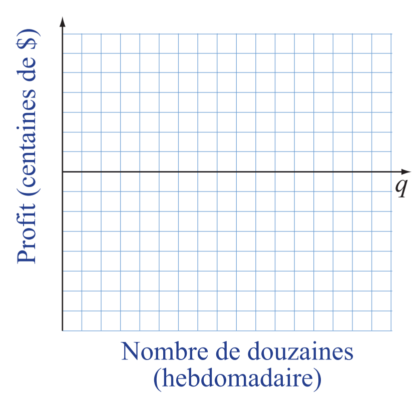


Exercice 01b: fonction profit

Déterminer la fonction profit hebdomadaire et représenter graphiquement.

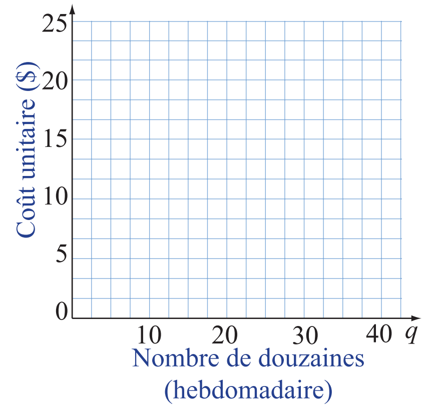
Calculer le seuil de rentabilité. Interpréter ce seuil dans les divers graphiques.

Solution



Exercice 01c: coût unitaire

Décrire mathématiquement la fonction donnant le coût unitaire pour fabriquer q douzaines de beignes. Représenter graphiquement.



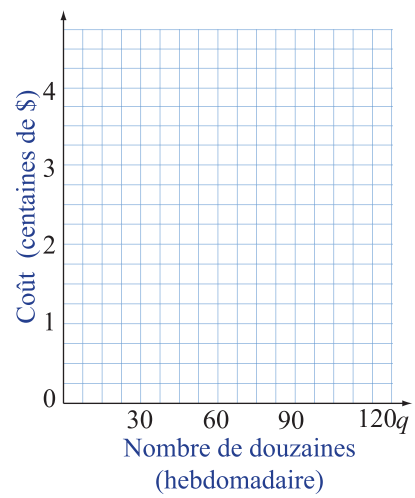
Solution

q	5	10	15	20	25	30	35	40
$C(q)$								

Exercice 01d: niveau d'indifférence

La boulangère a la possibilité de modifier le procédé de fabrication et cette modification aurait pour effet de diminuer les frais variables à 2,10 $ la douzaine et d'augmenter les frais fixes à 135 $ par semaine.

Déterminer combien elle doit vendre de douzaines par semaine pour qu'il soit avantageux de modifier son procédé de fabrication.



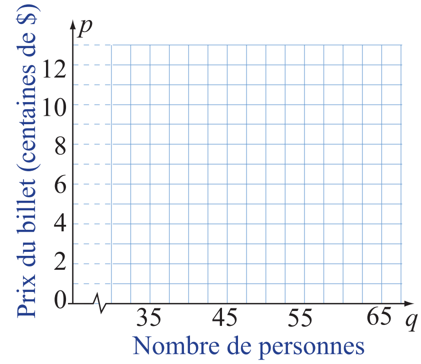
Solution

Exercice 02a: fonction par parties

Une compagnie d'autobus nolisés offre des prix spéciaux pour les voyages de groupe. Pour l'une des destinations, le prix est de 1 170 $ si le groupe comprend entre 35 et 45 personnes. Si le groupe est formé de plus de 45 personnes, la compagnie offre un rabais de 18 $ sur le prix individuel pour chacune des personnes du groupe. De plus, l'autobus ne peut contenir que 65 personnes.

Décrire le prix du billet en fonction du nombre de personnes dans le groupe à l'aide d'une fonction par parties.

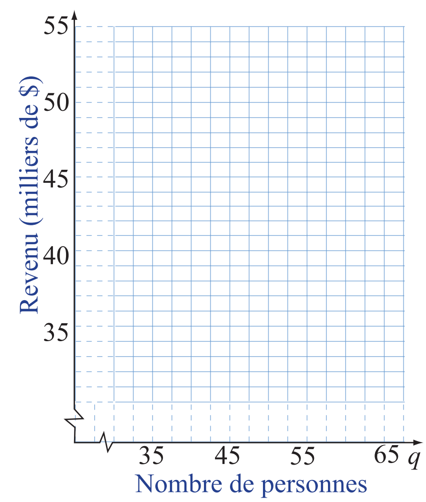
Solution



Exercice 02b: fonction revenu et revenu maximal

Déterminer la fonction revenu et calculer le nombre de personnes pour lequel le revenu de la compagnie est maximal.

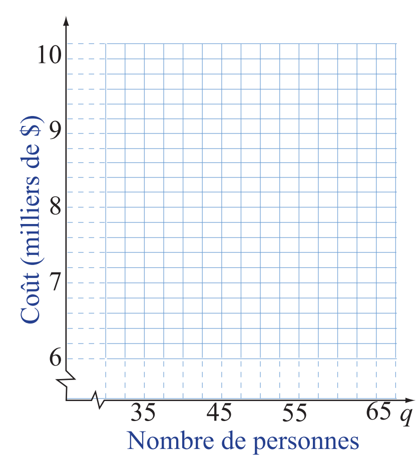
Solution

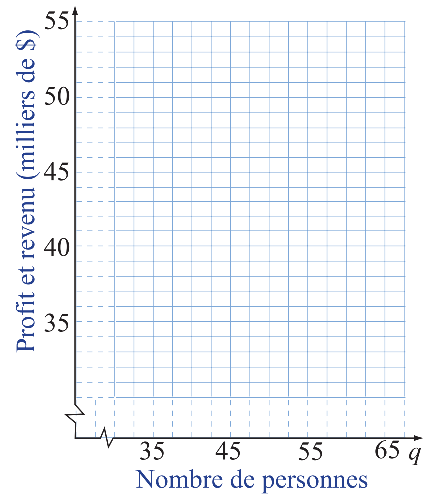


Exercice 02c: coût et profit

La compagnie doit défrayer le salaire du conducteur, au montant de 3 500 $ et des frais de 100$ pour les rafraîchissements et les goûters servis durant le voyage. Déterminer la fonction coût et la fonction profit. Représenter graphiquement. Déterminer le nombre de passagers pour lequel le profit est maximal et calculer ce profit.

Solution





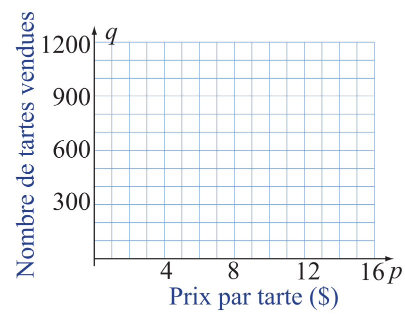
Exercice 03a : données du problème

Une boulangère fabrique des tartes aux petits fruits et cherche à accroître son profit mensuel pour cette production. Elle a récemment augmenté le prix de ses tartes à 9,20 $ et constaté qu'elle ne vend plus que 342 tartes par mois pour un revenu de 3 146,40 $ alors qu'avant elle en écoulait 433 au coût de 7,80 $ pour un revenu de 3 377,40 $.

Constatant que son revenu à diminué en augmentant le prix, la boulangère fait appel à vous pour analyser le problème.

Décrire le revenu mensuel en fonction du prix des tartes et représenter graphiquement cette fonction

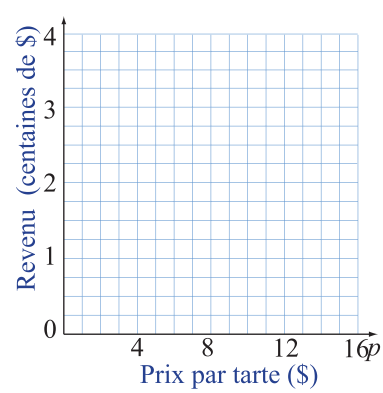
Solution



Exercice 03b : graphique de la fonction revenu

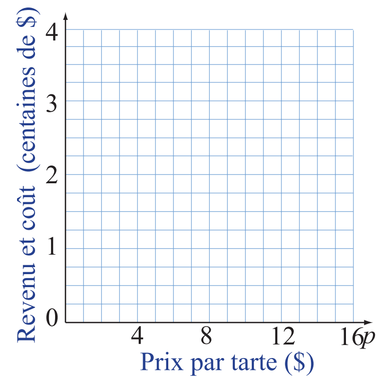
Représenter graphiquement la fonction revenu.

Solution



Exercice 03c : coût de production

Les frais fixes mensuels sont de 560 $ et les frais variables de 1,80 $ par tarte. Déterminer le coût de fabrication mensuel en fonction du nombre de tartes et en fonction du prix. Représenter graphiquement cette dernière.

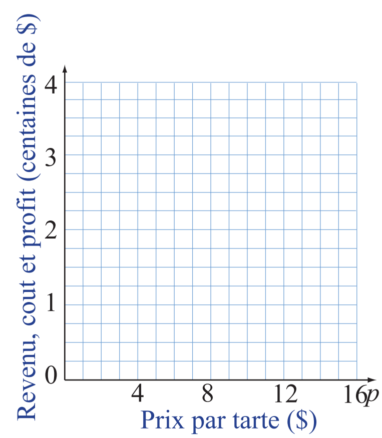


Solution

Exercice 03d: profit mensuel

Décrire le profit mensuel en fonction du prix et déterminer à quel prix il faut vendre les tartes pour maximiser le profit.

Solution



Dérivée de fonctions composées

Exercice 01A: Énoncé du problème et calcul de valeurs

Une compagnie estime que la demande mensuelle pour un article est inversement proportionnelle au prix.

$$V(p) = \frac{6\ 000}{p} \text{ unités/mois}$$

L'augmentation du coût de production force la compagnie à modifier le prix de vente de cet article. Pour minimiser l'impact sur le volume de vente, la compagnie prévoit augmenter graduellement le prix au cours des six prochains mois de telle sorte que le prix soit donné par le modèle :

$$p(t) = 36 + 6\sqrt{t}\ \$$$

où t est le temps en mois et p le prix.

Calculer le prix actuel et la demande actuelle ainsi que le prix et la demande dans 6 mois.

Solution

Exercice 01B: Fonction dérivée

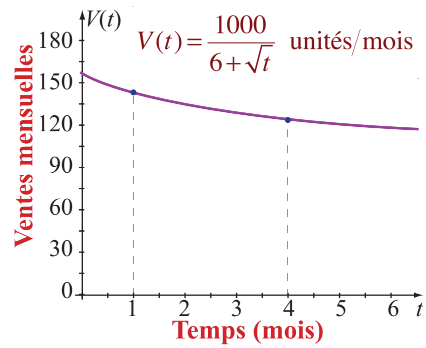
Déterminer la fonction décrivant le taux de variation de la demande en fonction du temps.

Solution

Exercice 01C: Calcul du taux de variation

Calculer le taux de variation de la demande dans un mois et dans quatre mois.

Solution



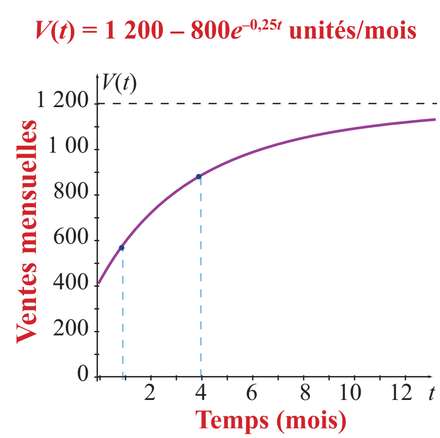
Exercice 02A: Énoncé du problème et fonction dérivée

Une compagnie désirant accroître sa part de marché pour un de ses produits entreprend une campagne publicitaire. Grâce à cette campagne, le volume de vente pour ce produit, t mois après le début de la campagne devrait être décrit par la fonction

$$V(t) = 1\,200 - 800e^{-0,25t} \text{ unités/mois}$$

Calculer le taux de variation du volume de vente après un mois de campagne, après quatre mois de campagne

Solution



Exercice 02B: Durée de la campagne

Sachant que la vente d'une unité de ce produit génère un profit de 160$ et que la campagne publicitaire coûte 4 000$ par mois, déterminer combien de temps devrait durer cette campagne.

Solution

.

Exercice 03A: Énoncé du problème et fonction dérivée

Le directeur d'une succursale a établi la relation entre la demande hebdomadaire pour un article de consommation courante et le prix.

$$D(p) = \frac{800}{\sqrt{8+5p}} \text{ unités/semaine}$$

Déterminer la fonction décrivant le taux de variation de la demande par rapport au prix.

Solution

Exercice 03B: Différentielle

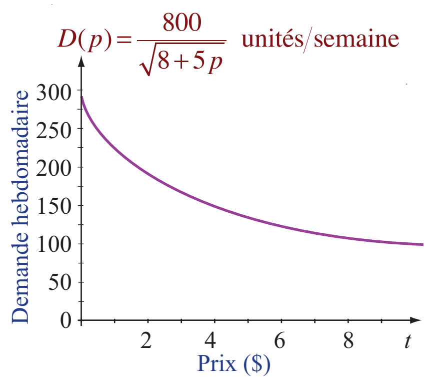
À l'aide de la différentielle, déterminer l'impact sur les ventes si le prix est porté de 2,00 $ à 2,50 $.

Solution

Exercice 03C: Modèle d'approximation linéaire

En utilisant un modèle d'approximation linéaire centré à p = 2,00 $, estimer la demande si le prix est augmenté à 3,50 $.

Solution



Exercice 04A: Énoncé du problème et fonction dérivée

Le gérant d'un magasin d'appareils et de jeux vidéo estime que les ventes totales d'un nouveau jeu vidéo à partir de sa mise en marché sont décrites par la fonction à l'écran

$$V_T(t) = 100t + 500e^{-0,4t} \text{ unités}$$

Déterminer la fonction décrivant le taux de variation des ventes totales. Calculer le taux de variation des ventes totales après 1 mois et après deux mois.

Solution

Exercice 04B: Modèle d'approximation linéaire

Définir un modèle d'approximation linéaire en choisissant le quatrième mois comme centre d'approximation. À l'aide de ce modèle, estimer les ventes totales après six mois.

Solution

Exercice 04C: Dérivée seconde

Déterminer la fonction décrivant le taux de variation des ventes mensuelles. Calculer le taux de variation des ventes mensuelles après 1 mois, après deux mois.

Solution

Exercice 04D: Modèle d'approximation linéaire

Définir un modèle d'approximation linéaire des ventes mensuelles en choisissant le deuxième mois comme centre d'approximation. À l'aide de ce modèle, estimer les ventes mensuelles au quatrième mois.

Solution

