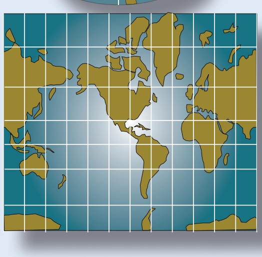
Illustration : Alain Ross

Gérard Mercator
1512-1594

Avec les grandes explorations, il a fallu repenser la façon de construire les cartes géographiques. Les portulans du XIVe siècle étaient conçus pour la navigation à vue en longeant les côtes. Pour traverser l'océan, les cartes devaient permettre au marin de déterminer le cap à suivre pour arriver à bon port.

Gérard Mercator



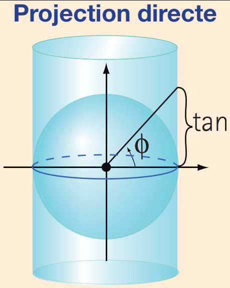
Le mathématicien et géographe d'ascendance allemande ou flamande Gérard Kremer, est né à Rupelmonde en Belgique. Il fait ses études à l'Université de Louvain sous la direction de l'astronome Gemma Frisius (1508-1555) qui l'initie à la construction et la représentation du globe terrestre. Comme il est d'usage à l'époque dans les cercles savants, il latinise son nom en Gerardus Mercatorus[1].

En 1538, il fait paraître sa première carte du monde après celle de la Terre Sainte, sortie l'année précédente. À partir de 1552, il accepte la chaire de cosmographie à l'université de Duisburg et travaille à l'élaboration d'une projection de la Terre qui le conduit à publier en 1569, les 18 feuilles de *La projection de Mercator* qui fournit enfin aux navigateurs une réelle description des contours des terres et une façon simple de naviguer à cap constant.

Une projection de Mercator est une projection cylindrique en ce sens que chaque point de la sphère est projeté sur un cylindre qui une fois déroulé donne une carte de la Terre. Ce n'est cependant pas une projection directe à partir du Centre de la Terre.

1. En allemand, Kremer signifie marchand et pour latiniser son nom, il a choisi la racine des mots anglais merchant et mercantile.
2. Frisius enseigne les mathématiques et la médecine à Louvain à partir de 1629. Son traité *De Locorum describendorum ratione* publié à Anvers en 1533 contient le plus ancien exposé des principes de la triangulation et la méthode de détermination des longitudes à l'aide d'une horloge marquant l'heure au méridien de référence.

Projection directe



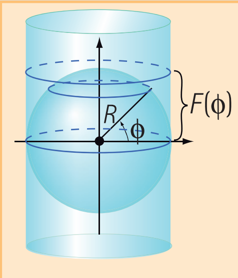
En projetant directement sur le cylindre, l'abscisse d'un point sur la carte est la différence entre sa longitude et la longitude que l'on choisit comme centre de la carte et l'ordonnée du point est la tangente de sa latitude.

Le marin devait pouvoir mesurer le cap sur la carte et, à l'aide du compas magnétique ou boussole, s'assurer qu'il ne dévie pas de sa route. En effet, avant la fabrication de l'horloge marine de John Harrison, en 1741, le marin ne pouvait mesurer sa longitude en mer en appliquant la méthode imaginée par Frisius[2].

Le mathématicien et géographe portugais Pedro Nunes (1502-1578) a montré que le trajet suivi avec un cap constant n'est pas un arc de grand cercle, mais un segment de spirale qu'il appelle loxodromie. Nunes savait que pour représenter un trajet à cap constant sur une carte, il fallait que les longitudes et latitudes soient des droites parallèles. Il n'était cependant pas capable de déterminer l'espacement entre les différentes lignes de latitude sur la carte. En traçant ses cartes, Mercator a résolu cet aspect du problème mais il garde le secret sur la façon dont il détermine cet espacement.

C'est le mathématicien anglais Edward Wright (1558-1615) qui, en 1599, a donné la première explication théorique du calcul de cet espacement.

Considérons une sphère de rayon R représentant la Terre, figure en haut de la page suivante. La circonférence à l'équateur est $2\pi R$. Considérons également le parallèle de latitude ϕ sur la sphère. La circonférence de ce cercle est $2\pi R \cos\phi$. Cependant sur la carte, tous les parallèles de latitude ont la même longueur que l'équateur. Par conséquent, sur le cylindre et sur la carte, la circonférence du cercle de latitude ϕ est

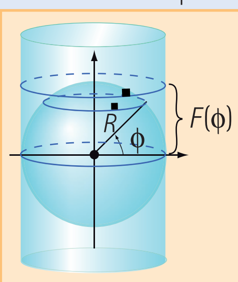


$$2\pi R = 2\pi R\cos\phi \times \frac{1}{\cos\phi},$$

elle est étirée d'un facteur

$$\frac{1}{\cos\phi} = \sec\phi.$$

Sur une carte, les méridiens sont des droites parallèles alors que sur la sphère la distance entre les méridiens diminue avec la latitude. Pour que le trajet à cap constant soit une droite sur la carte, il faut que l'espacement entre les parallèles augmente avec la latitude. Notons $F(\phi)$ la fonction dont l'image est, sur la carte, la distance du parallèle de latitude ϕ à l'équateur.

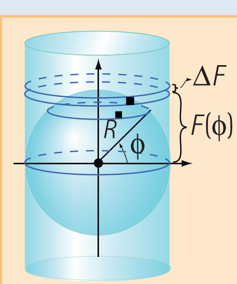


Considérons maintenant à la latitude ϕ un petit carré dont le côté inférieur est sur le parallèle. Puisque le côté du carré est un arc de cercle, sa longueur est αR où α est un angle au centre de la sphère. Pour aller du coin nord-est au coin sud-ouest de ce carré, il faut suivre la direction sud-ouest. Pour que la projection de Mercator soit correcte, le trajet doit faire le même angle sur la carte. L'image du carré sur le cylindre et sur la carte de Mercator doit donc être également un carré.

Sur la sphère, le côté du carré représente une fraction du cercle de latitude ϕ, soit

$$\frac{\alpha R}{2\pi R\cos\phi}$$

Sur la carte, le côté du carré représente la même fraction de la longueur du parallèle de latitude. Le produit de cette fraction par 2π donne la base du carré sur la carte. Après simplification, on obtient que la longueur de la base du carré sur la carte est $\alpha\sec\phi$ et la hauteur également.



Les côtés horizontaux du carré ne sont pas tous deux à la même latitude. Le plus éloigné de l'équateur est à la latitude $\phi + \Delta\phi$. Le côté vertical du carré sur la sphère est alors $\Delta\phi R = \alpha R$. On en tire $\alpha = \Delta\phi$. On a donc

$$\Delta F \approx \sec\phi\,\Delta\phi.$$

En utilisant ce résultat, Wright a construit des tables donnant la distance à l'équateur pour des valeurs de 0° à 75° par intervalles de 1/60 de degré. Ce qui revient à calculer la somme des aires de rectangles de largeur 1/60. Pour tracer, par exemple, la position des points dont la latitude est de 1°, il faut faire la somme des aires de 60 rectangles.

En 1614, John Napier, qui voulait alléger les calculs nécessaires à la navigation et à l'astronomie, a publié sa méthode pour construire des tables de logarithmes.

En 1620, les premières tables des logarithmes de la fonction tangente ont été publiées. Un dénommé Henry Bond en comparant les tables de Wright et celles des logarithmes des tangentes a constaté une concordance entre les valeurs de $F(\phi)$ et celles des logarithmes des tangentes. En 1645, il publie cette observation comme conjecture. En notation moderne, sa conjecture s'écrit :

$$F(\phi) = \ln\left(\tan\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

L'avènement du calcul différentiel et intégral a permis de concevoir cette conjecture selon une autre approche.

On peut écrire :

$$\frac{\Delta F}{\Delta\phi} = \sec\phi.$$

La limite lorsque $\Delta\phi$ tend vers 0 donne

$$\frac{dF}{d\phi} = \sec\phi.$$

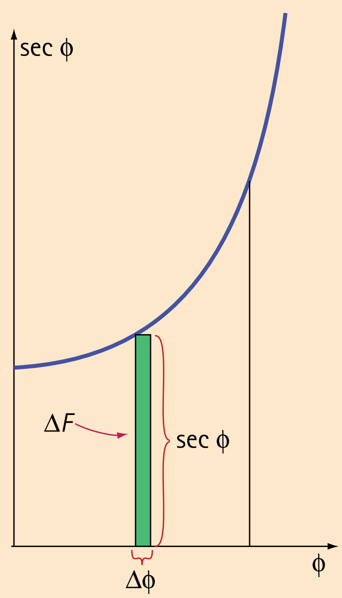
Par conséquent, la dérivée de la fonction décrivant l'espacement est $\sec\phi$.

On peut alors appliquer le théorème fondamental du calcul en considérant que $F(0) = 0$. La fonction décrivant sur la carte la distance d'une latitude ϕ à l'équateur est alors :

$$F(\phi) = \int_0^{\phi} \sec t\; dt = \ln\left(\tan\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Pour démontrer cette conjecture, on peut effectuer l'intégrale pour obtenir le membre de droite. On peut aussi choisir de dériver le membre de droite et montrer que l'on obtient $\sec\phi$.

Calcul de $F(\phi)$



ΔF est l'aire d'un rectangle de base $\Delta\phi$ et de hauteur $\sec\phi$. Pour déterminer la position $F(\phi)$ du parallèle de latitude ϕ sur la carte, il faut faire la somme de tous les rectangles dans l'intervalle $[0; \phi]$.