Illustration : Alain Ross

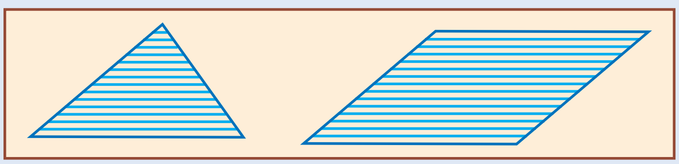
John Wallis
1616-1703

Dans sa recherche de solution au problème du calcul de l'aire sous une courbe, John Wallis a d'abord exploité une approche géométrique, celle des indivisibles. Puis, il abandonne le support géométrique en associant des valeurs numériques aux indivisibles.

Wallis
Calcul de l'aire

Rapport des indivisibles

Wallis considère d'abord que les figures planes sont constituées d'un nombre infini de lignes représentant des parallélogrammes de largeur infinitésimale.



Puis, il associe des valeurs numériques à chaque indivisible à l'aide desquelles il compare l'aire occupée par les indivisibles d'un triangle à celle occupée par les indivisibles du parallélogramme correspondant.

Il pose que la longueur du premier indivisible du triangle est zéro, celle du second indivisible est 1, celle du troisième est 2 et ainsi de suite.

Il détermine alors le rapport des aires d'un triangle ne comportant que deux indivisibles à celle du parallélogramme correspondant. Il obtient :

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

En comparant les aires du triangle et du parallélogramme comportant trois indivisibles,

$$\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Pour quatre indivisibles, le rapport est

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

En poursuivant à l'infini, l'aire du triangle est toujours la moitié de celle du parallélogramme associé. Pas de surprise !

Rapport des carrés des indivisibles

Que se passe-t-il si on compare le rapport des carrés des indivisibles ?

Pour deux indivisibles, le rapport est

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

En comparant les aires du triangle et du parallélogramme comportant trois indivisibles,

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2}=\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times 2}.$$

Pour quatre indivisibles, le rapport est

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2}=\frac{14}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times 3}.$$

Pour cinq indivisibles,

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2}{4^2+4^2+4^2+4^2+4^2}=\frac{30}{80}=\frac{3}{8}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6\times 4}.$$

Pour n indivisibles,

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}.$$

La somme au numérateur est celle des carrés des n premiers entiers, soit

$$0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$$

La somme des termes au dénominateur est $(n+1)n^2$. Le rapport est donc

$$\frac{\dfrac{n(n-1)(2n+1)}{6}}{(n+1)n^2}=\frac{n(n-1)(2n+1)}{6(n+1)n^2}$$
$$=\frac{2n+1}{6n}=\frac{2n}{6n}+\frac{1}{6n}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}.$$

Par conséquent, le rapport des carrés de n indivisibles est

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\ldots+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}.$$

Wallis explique qu'en augmentant le nombre de termes, l'excès sur 1/3 diminue de façon continue et à l'infini, l'excès disparaît. En termes modernes, la limite lorsque n tend vers l'infini est 1/3.

Rapport des cubes des indivisibles

Quel sera le rapport des cubes des indivisibles ?

Pour deux indivisibles, le rapport est

$$\frac{0^3+1^3}{1^3+1^3}=\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.$$

En comparant les aires du triangle et du parallélogramme comportant trois indivisibles,

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\times 2}.$$

Pour quatre indivisibles, le rapport est

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3}=\frac{36}{108}=\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\times 3}.$$

Pour cinq indivisibles,

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3+4^3}{4^3+4^3+4^3+4^3+4^3}=\frac{100}{320}=\frac{5}{16}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\times 4}.$$

Pour n indivisibles,

$$\frac{0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3+n^3+n^3+\ldots+n^3}$$

La somme au numérateur[1] est celle des cubes des n premiers entiers, soit

$$0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

La somme des termes au dénominateur est $(n+1)n^3$. Le rapport est donc

$$\frac{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}{(n+1)n^3}=\frac{n^2(n+1)^2}{4(n+1)n^3}$$
$$=\frac{n+1}{4n}=\frac{n}{4n}+\frac{1}{4n}$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}.$$

Dans ce cas aussi, en augmentant le nombre de termes, l'excès sur 1/4 diminue de façon continue et à l'infini, l'excès disparaît. En termes modernes, la limite lorsque n tend vers l'infini est 1/4.

En écriture moderne, la démarche de Wallis équivaut à dire que

$$\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2},\quad \int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$
$$\text{et}\quad \int_0^1 x^3\,dx=\frac{1}{4}.$$

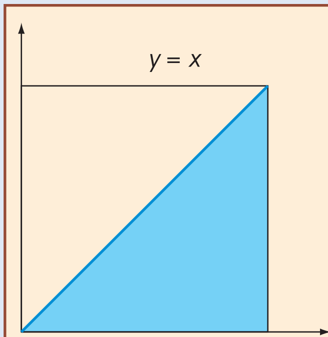
Wallis procède alors à une induction et conclut, en écriture moderne, que

$$\int_0^1 x^m\,dx=\frac{1}{m+1},\ \text{sauf si } m=-1.$$

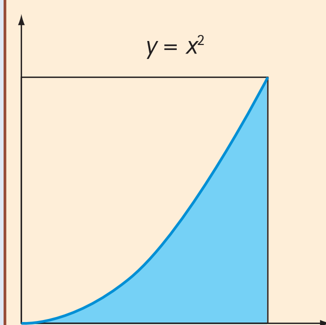
Conclusion

La démarche de Wallis donne des résultats qui sont en accord avec des résultats déjà connus par des prédécesseurs comme Cavalieri et Fermat. Cependant son association numérique avec les indivisibles semble très arbitraire. Sa généralisation par induction a été critiquées par Fermat.

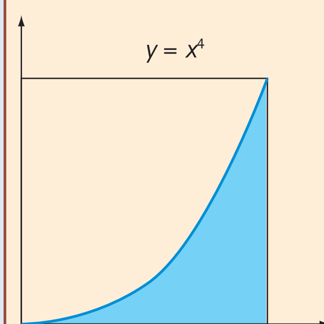
1. Wallis représentait cette somme par l'expression équivalente
$$0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{(n+1)}{4}n^3+\frac{(n+1)}{4n}n^3.$$



Rapport des aires, 1/2



Rapport des aires, 1/3



Rapport des aires, 1/4

Wallis et les exposants

Wallis a également développé la notation exponentielle pour les puissances d'expressions fractionnaires.