Rappels

LES SYSTÈMES *d'*ÉQUATIONS

par

ANDRÉ ROSS

Déterminer le point d'intersection de deux droites.
Déterminer les points d'intersection d'une droite et d'un cercle.

OBJECTIFS

- Résoudre un système d'équation à deux inconnues par la méthode de réduction..
- Résoudre un système d'équations à deux inconnues par la méthode de substitution.
- Résoudre un système d'équations à deux inconnues par la méthode de comparaison.

VIDÉOS

Les vidéos qui accompagnent ce texte sont disponibles à l'adresse : prodafor.com

1.9 Les systèmes d'équations

Dans cette partie, nous ne considérons que les systèmes d'équations à deux inconnues. Un système d'équations à deux inconnues est formé d'au moins deux équations portant sur ces inconnues. On rencontrera uniquement des équations du premier et du second degré. Les méthode de résolution proposées sont la *résolution par réduction*, la *méthode par susbtitution* et la *méthode de comparaison.*

Systèmes d'équations du premier degré

Lorsque les deux équations sont du premier degré, elles sont représentées graphiquement par des droites et, si celles-ci ont des pentes différentes, elles sont concourantes. En résolvant un système de deux équations à deux inconnues, on détermine les coordonnées du point d'intersection de leurs graphiques.

Résolution par réduction

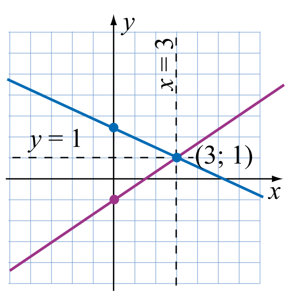
La méthode de résolution par réduction consiste à construire un système d'équations équivalent au système donné en éliminant des inconnues.

SystEquations01

EXEMPLE 1.9.1

Représenter graphiquement les droites L_1 et L_2 et résoudre par réduction le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$$



Solution

On peut construire un système équivalent dans lequel le coefficient de la variable x dans la deuxième équation sera nul en ajoutant –2 fois la première équation à la deuxième.

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \end{array} \begin{cases} x+2y=5 \\ 0x-7y=-7 \end{cases}$$

On isole y dans la deuxième équation en divisant chaque membre par –7

$$\begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \to L_2/(-7) \end{array} \begin{cases} x+2y=5 \\ 0x+y=1 \end{cases}$$

On annule le coefficient de y dans la première équation en ajoutant –2 fois la deuxième équation à la première

$$\begin{array}{r} L_1 \to L_1 - 2L_2 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} x+0y=3 \\ 0x+y=1 \end{cases}$$

La solution est donc (3; 1).

Résolution par comparaison

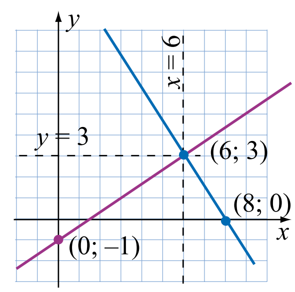
La méthode de résolution par comparaison repose sur la comparaison des valeurs des deux expressions d'une même variable. On procède en isolant cette variable dans chacune des équations et en posant l'égalité entre les deux expressions obtenues. Il suffit alors de résoudre l'équation résultante et de substituer la valeur obtenue dans l'une des équations initiales. Il est à noter que cette méthode est utilisable seulement s'il est possible d'isoler une variable dans les deux équations.

EXEMPLE 1.9.2

Résoudre par comparaison des ordonnées le système d'équations linéaires suivant.

$$2x - 3y = 3$$
$$3x + 2y = 24$$

SystEquations02



Solution

En isolant y dans chacune des équations, on obtient

$$y = \frac{3-2x}{-3} \quad \text{et} \quad y = \frac{24-3x}{2}$$

Les deux droites se rencontrent lorsque les deux expressions algébriques ont la même valeur numérique, c'est-à-dire si

$$\frac{3-2x}{-3} = \frac{24-3x}{2}.$$

En effectuant le produit des extrêmes et des moyens, on a

$$6 - 4x = -72 + 9x.$$

En isolant x dans cette équation, on obtient

$$-13x = -78; \text{ donc } x = 6.$$

On peut alors substituer la valeur de x dans l'une des équations initiales et isoler la valeur de y correspondante. On trouve ainsi $y = 3$. La solution est donc le couple (6; 3).

Systèmes d'équations du second degré

Un système d'équation du second degré est un système d'équations comportant au moins une équation du second degré. L'objectif est le même, soit déterminer le ou les points d'intersection des deux courbes.

Méthode par substitution

Dans un système d'équations du second degré, la méthode par réduction n'est pas applicable. On applique alors la méthode par substitution ou par comparaison, soit des ordonnées ou des abscisses.

EXEMPLE 1.9.3

Résoudre le système d'équations suivant.

$$x - y - 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$$

Solution

En isolant la variable y dans la première équation, on obtient :

$$y = x - 2.$$

En substituant cette expression à y dans l'équation du second degré, on a :

$$x^2 + (x - 2)^2 - 4x + 2y - 20 = 0.$$

On développe l'expression,

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 + 2x - 4 - 20 = 0$$

et on regroupe les termes semblables,

$$2x^2 - 6x - 20 = 0.$$

On simplifie l'équation,

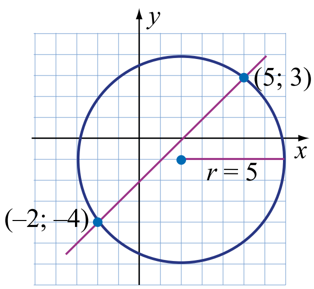
$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

On factorise pour obtenir

$$(x - 5)(x + 2) = 0, \text{ d'où } x = 5 \text{ et } x = -2.$$

En substituant dans l'une des équations, on trouve :

$$\text{si } x = 5,\ y = 5 - 2 = 3 \text{ et si } x = -2\ y = -2 - 2 = -4.$$



Les points d'intersection sont donc (5; 3) et (–2; –4). En complétant le carré de l'équation quadratique, on constate que ce sont les points de rencontre de la droite $x - y - 2 = 0$ et du cercle de rayon 5 centré en (2; –1).

La méthode appropriée dépend des équations à résoudre. Ainsi, il n'est pas possible de résoudre le système de l'exemple précédent par la méthode de réduction ou par la méthode de comparaison. On a donc eu recours à la méthode par substitution.

SystEquations03

EXEMPLE 1.9.4

Résoudre le système d'équations suivant.

$$2x + 3y + 6 = 0$$
$$4x^2 + 9y^2 - 180 = 0$$

Solution

La méthode par substitution est indiquée dans ce cas. On isole la variable y dans l'équation du premier degré, ce qui donne :

$$y = \frac{-2x - 6}{3}.$$

On substitue cette expression à y dans l'équation du second degré,

$$4x^2 + 9\left(\frac{-2x - 6}{3}\right)^2 = 180$$

et on simplifie

$$4x^2 + (-2x - 6)^2 = 180$$
$$4x^2 + 4x^2 + 24x + 36 = 180$$
$$8x^2 + 24x - 144 = 0$$
$$x^2 + 3x - 18 = 0.$$

En factorisant, on a

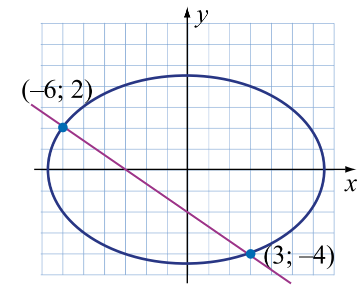
$(x + 6)(x - 3) = 0$, d'où l'on tire $x = -6$ et $x = 3$.

En substituant dans l'une des équations – les calculs sont plus simples dans l'équation du premier degré.

Si $x = -6$, on a $-12 + 3y + 6 = 0$, d'où $x = 2$ et

Si $x = 3$, on a $6 + 3y + 6 = 0$, d'où $x = -4$.

Les points d'intersection sont $(-6; 2)$ et $(3; -4)$.



REMARQUE
On a déterminé les points d'intersection d'une droite et d'une ellipse. Il n'est pas important pour le moment de savoir représenter graphiquement une ellipse.

Comparaison des carrés

Lorsque les deux équations sont du second degré, on peut parfois procéder par comparaison des carrés. On peut selon les équations, comparer les abscisses ou les ordonnées.

SystEquations04

EXEMPLE 1.9.5

Résoudre le système d'équations suivant.

$$x^2 + 3y^2 = 48$$
$$x^2 + y^2 = 40$$

Solution

Dans cette situation le coefficient de x^2 est 1 dans les deux équations. Il est donc plus avantageux de comparer les carrés de cette variable. En isolant celle-ci, on a

$$x^2 = 48 - 3y^2 \text{ et } x^2 = 40 - y^2.$$

Par comparaison, et en simplifiant, on obtient :

$$40 - y^2 = 48 - 3y^2$$
$$2y^2 - 8 = 0$$
$$y^2 - 4 = 0.$$

On factorise cette expression pour obtenir

$(y + 2)(y - 2) = 0$, d'où l'on tire $y = -2$ et $y = 2$.

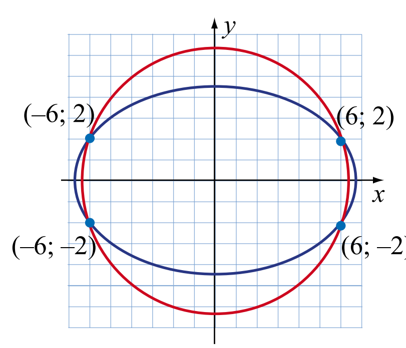
En substituant dans l'une des équations, on obtient :.

Si $y = -2$, on a $x^2 + 4 = 40$, d'où $x^2 = 36$. On en tire $x = -6$ et $x = 6$.

Si $y = 2$, on a $x^2 + 4 = 40$, d'où $x^2 = 36$. On en tire $x = -6$ et $x = 6$.

Les points d'intersection sont $(-6; -2)$, $(-6; 2)$, $(6; -2)$ et $(6; 2)$.

Ce sont les points d'intersection d'un cercle et d'une ellipse.



EXEMPLE 1.9.6

Résoudre le système d'équations suivant.

$$3x^2 + y^2 = 12$$
$$y^2 - 9x = 0$$

Solution

Dans cette situation le coefficient de y^2 est 1 dans les deux équations. Il est donc plus avantageux de comparer cette variable. En isolant celle-ci, on a

$$y^2 = 12 - 3x^2 \text{ et } y^2 = 9x.$$

Par comparaison, et en simplifiant, on obtient :

$$9x = 12 - 3x^2$$
$$3x^2 + 9x - 12 = 0$$
$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

On factorise cette expression pour obtenir

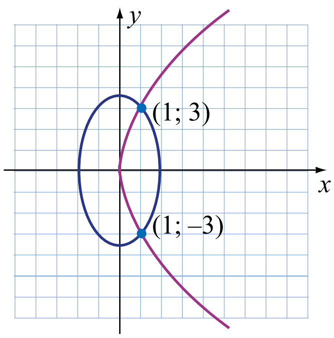
$$(x + 4)(x - 1) = 0, \text{ d'où l'on tire } x = -4 \text{ et } x = 1.$$

En substituant dans l'une des équations., on obtient :

Si $x = 1$, on a $y^2 - 9 = 0$, d'où $y^2 = 9$. On en tire $y = -3$ et $y = 3$.

Si $x = -4$, on a $y^2 + 36 = 0$, qui n'admet aucune solution.

Les points d'intersection sont $(1; -3)$ et $(1; 3)$.



REMARQUE

Ce sont les points d'intersection d'une ellipse et d'une parabole.

NOTE HISTORIQUE

John Wallis
1616-1703

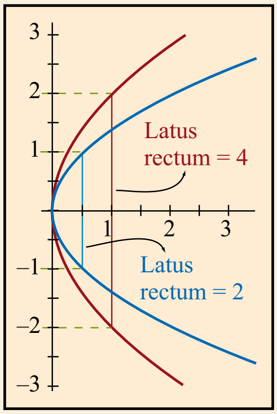
John Wallis est un mathématicien anglais. Il cherche à remplacer de façon systématique les concepts géométriques par des concepts numériques et algébriques, ce qui l'amène à définir les coniques comme courbes du second degré et non plus comme intersection d'un cône et d'un plan.

Il décrit algébriquement la forme générale des coniques à l'aide de paramètres.

Ainsi, Pour décrire la parabole, il considère que le sommet de celle-ci est à l'origine d'un système d'axes et utilise la largeur focale, ou latus rectum, comme paramètre. Il en donne comme équation

$$p^2 = ld$$

où p est l'ordonnée, d l'abscisse et l le latus rectum.



Notes historiques :

Wallis

http://www.prodafor.com

1.10 Exercices

1 Résoudre par réduction les systèmes d'équations linéaires suivants et représenter graphiquement.

a) $2x - 3y - 13 = 0$
$3x + 5y + 9 = 0$

b) $3x - y = 18$
$4x + 2y = 14$

c) $2x + 3y = 11$
$4x + 5y = 17$

d) $2x - 7y = -9$
$5x + 8y = 54$

2. Résoudre par comparaison les systèmes d'équations linéaires suivants.

a) $3x - 2y = -5$
$2x - 5y = 4$

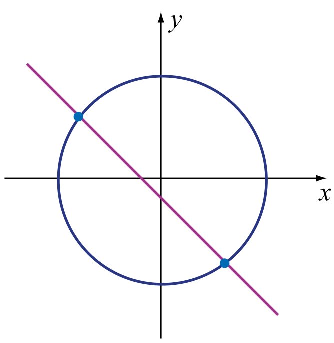
b) $3x - 2y = 7$
$4x + 2y = 28$

c) $7x + y = 40$
$x + 8y = -10$

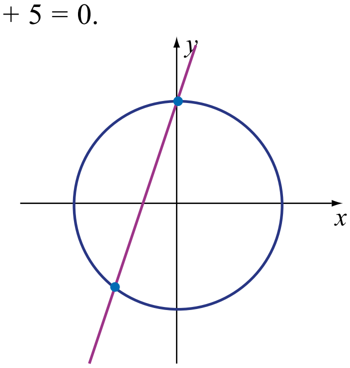
d) $3x - 7y = 7$
$x - 2y = 3$

3. Trouver les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ et de la droite d'équation :

a) $x + y + 1 = 0$.

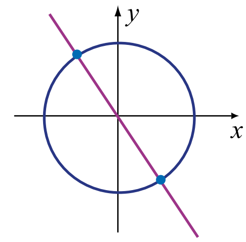


b) $3x - y + 5 = 0$.

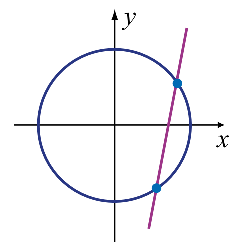


4. Trouver les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 13$ et de la droite d'équation :

a) $x + y - 1 = 0$.

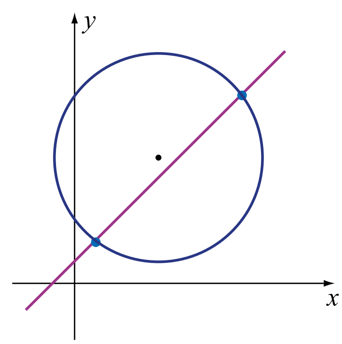


b) $5x - y - 13 = 0$.

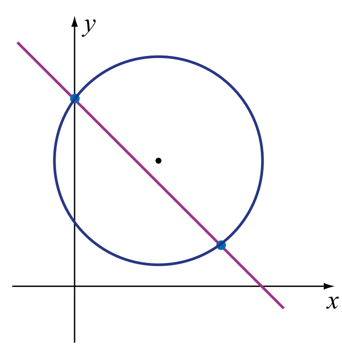


5. Trouver les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$ et de la droite d'équation :

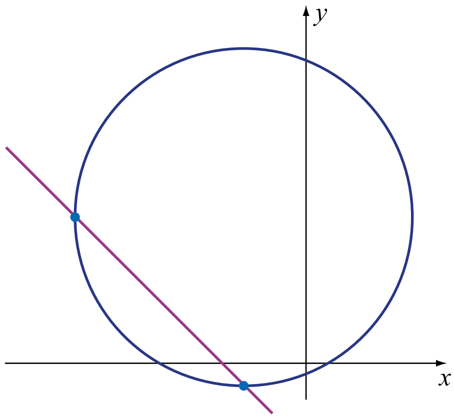
a) $x - y + 1 = 0$.



b) $x + y - 9 = 0$

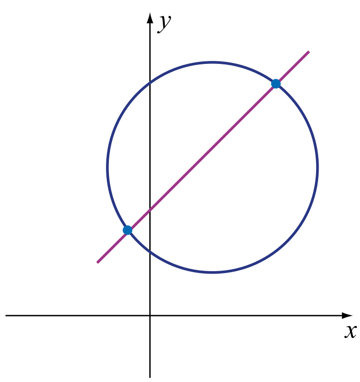


6. Déterminer les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 + 6x - 14y - 6 = 0$ et de la droite d'équation $x + y + 4 = 0$

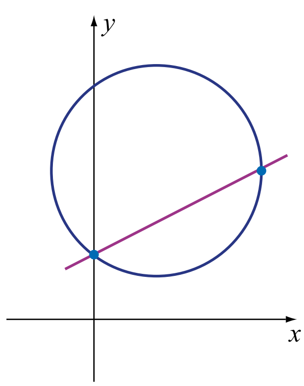


7. Déterminer les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 14y + 33 = 0$ et de la droite d'équation :

a) $x - y + 5 = 0$

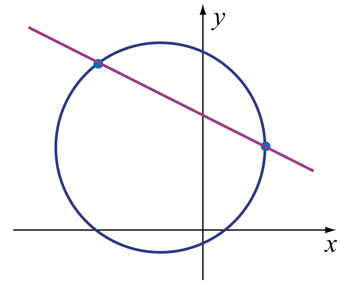


b) $x - 2y + 6 = 0$

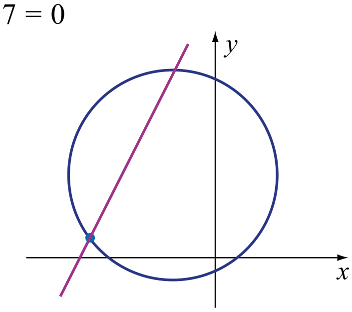


8. Déterminer les points d'intersection du cercle d'équation $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$ et de la droite d'équation :

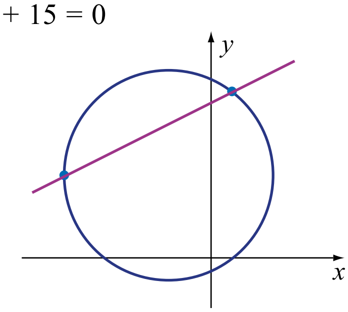
a) $x + 2y - 11 = 0$



b) $x + y - 7 = 0$



c) $x - 2y + 15 = 0$



Réponses

1. a) (2; –3) c) (–2; 5)
   b) (5; –3) d) (6; 3)
2. a) (–3; –2) c) (6; –2)
   b) (5; 4) d) (7; 2)
3. (–4; 3) et (3; –4)
4. (–2; 3) et (3; –2)
5. a) (1; 2) et (8; 9) b) (0; 9) et (7; 2)
6. a) (–3; –1) et (–11; 7)
7. a) (–1; 4) et (6; 11) b) (0; 3) et (8; 7)
8. a) (–5; 8) et (3;4) c) (–7; 0) et (1; 8)
   b) (–6; 1) et (2; 9)