CHAPITRE 10

SYSTÈMES *d'* ÉQUATIONS *et* MATRICES

Résoudre un système d'équations linéaires à l'aide de matrices.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :

- la représentation d'un problème comportant plusieurs inconnues par un système d'équations linéaires du premier degré;
- la représentation d'un système d'équations linéaires sous forme matricielle;
- la résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss ou la méthode de Gauss-Jordan;
- l'interprétation de la solution d'un système d'équations linéaires en fonction du contexte.

OBJECTIFS

10.1 Représenter un système d'équations linéaires par une matrice augmentée.

10.2 Résoudre un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss.

10.3 Résoudre un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan.

10.4 Utiliser les systèmes d'équations linéaires et les matrices pour résoudre des problèmes d'applications.

10.1 Systèmes d'équations et matrices

Dans la présente section, nous verrons comment représenter et résoudre un système d'équations linéaires à l'aide de matrice.

MatriceSysEQ01

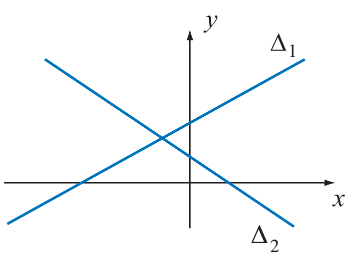
Équations linéaires à deux inconnues

Soit le système de deux équations du premier degré

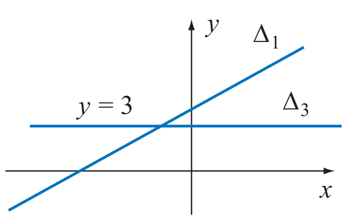
$$\begin{cases} x-2y=-8 \\ 3x+5y=9 \end{cases}$$

REMARQUE

Chacune des équations linéaires décrit une droite de $\mathbb{R}^2$. Si les droites sont concourantes, elles se rencontrent en un point dont les coordonnées constituent une solution de chacune des équations.



Les deux équations constituent un **système d'équations linéaires à deux inconnues**.



Le système obtenu par élimination est équivalent au système initial, c'est-à-dire qu'il a les mêmes solutions. En effet, il décrit toujours deux droites dont le point d'intersection est identique à celui des droites Δ_1 et Δ_2. La solution est (–2; 3), soit le point d'intersection des paires de droites.

Ces équations sont représentées respectivement par les droites que nous notons Δ_1 et Δ_2. Résoudre le système d'équations signifie déterminer les valeurs des variables qui vérifient les deux équations. Pour ce faire, on cherche l'équation d'une droite passant par le point d'intersection de Δ_1 et de Δ_2 parallèle à un des axes. On l'obtient en éliminant une inconnue dans l'une des équations. On représente le système d'équations par une matrice, appelée **matrice augmentée** du système d'équations formée uniquement des coefficients et des constantes du système d'équations.

Système d'équations	Représentation graphique	Matrice augmentée
$\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix}\begin{cases} x-2y=-8 \\ 3x+5y=9 \end{cases}$	$\begin{matrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 5 & 9 \end{array}\right)$

On résout le système d'équations en éliminant la variable x de la deuxième équation, comme suit. On multiplie la première équation par –3, puis on additionne le résultat à la deuxième équation. Cette transformation revient à additionner des valeurs égales aux deux membres de l'équation :

Étape d'élimination	Notation matricielle
$\begin{array}{rr} -3E_1: & -3x+6y=24 \\ E_2: & \underline{3x+5y=9} \\ E_3: & 11y=33 \end{array}$	$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} L_1 \\ L_2-3L_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 11 & 33 \end{array}\right)$

On obtient ainsi un nouveau système d'équations et une nouvelle matrice :

Système d'équations	Matrice augmentée
$\begin{cases} x-2y=-8 \\ 11y=33 \end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & -8 \\ 0 & 11 & 33 \end{array}\right)$

Dans la matrice augmentée, les éléments à gauche des traits verticaux correspondent aux coefficients du nouveau système d'équations tandis que les éléments à droite des traits correspondent aux constantes. Effectuer des opérations visant à annuler de plus en plus de coefficients, de ligne en ligne, puis de colonne en colonne, c'est ce qu'on appelle **échelonner** la matrice. Le système d'équations représenté par la dernière matrice, soit

$$\begin{cases} x-2y=-8 \\ \quad 11y=33 \end{cases}$$

est **équivalent** au système initial, c'est-à-dire qu'il admet les mêmes solutions. En isoler y dans l'équation $11y = 33$, on obtient $y = 3$ et, en substituant 3 à y dans la première équation, on obtient $x = -2$. La solution du système d'équations est donc $(-2; 3)$, qui est le point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_2.

MatriceSysEQ02

EXEMPLE 10.1.1

En construisant une matrice augmentée, déterminer l'intersection des droites dont les équations sont données et représenter graphiquement le système d'équations.

a) $\begin{cases} 2x-5y=-4 \\ 3x+4y=17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y=2 \\ 3x-9y=6 \end{cases}$

Solution

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & -4 \\ 3 & 4 & 17 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 2L_2-3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & -4 \\ 0 & 23 & 46 \end{array}\right)$

La deuxième ligne de la matrice de droite correspond à l'équation $23y = 46$, qui donne directement $y = 2$. En remplaçant y par sa valeur dans la première équation, puis en isolant x, on obtient $x = 3$. Le point d'intersection des deux droites est donc $(3; 2)$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 12 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$

La deuxième ligne de la matrice de droite correspond à l'équation $0x + 0y = 8$. Aucune valeur de x ni de y ne vérifie cette équation; on en conclut que le système n'admet aucune solution. Le système initial est représenté par deux droites parallèles qui ne se rencontrent pas.

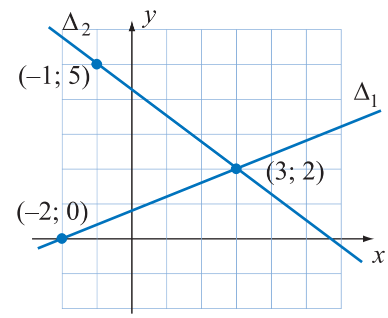
c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -9 & 6 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Toutes les valeurs de x et de y vérifient la deuxième équation. Ainsi, tous les points de la droite $x - 3y = 2$ sont des solutions du système d'équations. Cela signifie que les droites d'équations respectives $x - 3y = 2$ et $3x - 9y = 6$ sont confondues.

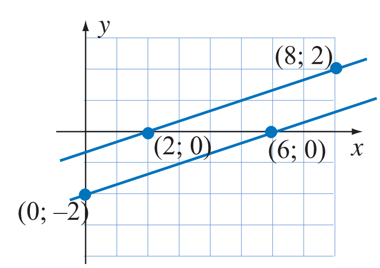
Dans ce cas, le système admet une infinité de solutions, que l'on décrit à l'aide d'un paramètre, en procédant comme suit. On considère comme **variables liées** les variables dont le coefficient correspond au premier terme non nul d'une des lignes de la matrice échelonnée et comme **variables libres** toutes les autres variables Dans le présent exemple, il y a donc une variable liée, x, et une variable libre, y. L'usage est d'utiliser un paramètre t pour la variable libre; dans le cas présent, $y = t$. En substituant t à y dans la première équation, puis en isolant

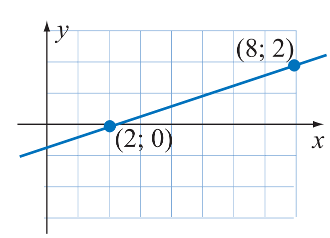
REMARQUE

On représente le système d'équations en utilisant le point solution et un autre point de chacune des droites.



On peut également construire un vecteur normal à chacune des droites, puis tracer les droites passant par le point d'intersection déterminé et respectivement perpendiculaire à l'un des vecteurs normaux.





x, on obtient $x = 2 + 3t$. L'ensemble solution est alors

$$\{(x;\, y) \mid x = 2 + 3t,\ y = t\} \text{ où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Cet ensemble est appelé **solution générale** du système d'équations linéaires.

Solutions particulières

En donnant une valeur particulière au paramètre t d'une solution générale, on obtient une **solution particulière** du système d'équations. Chaque solution particulière correspond à un point de la droite représentant chacune des équations. Par exemple, en posant $t = 0$, on obtient le point $(2; 0)$ et, en posant $t = 2$, le point $(8; 2)$.

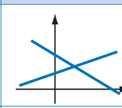
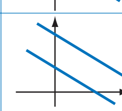
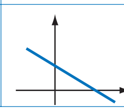
REMARQUE
L'ensemble solution

$\{(x;\, y) \mid x = 2 + 3t,\ y = t\}$, où $t \in \mathbb{R}$

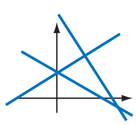
est la **description paramétrique** de la droite.

En résolvant un système de deux équations linéaires à deux inconnues, on peut rencontrer trois cas.

Système de deux équations à deux inconnues

Matrice échelonnée	Solutions	Graphique
$\left(\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ 0 & d & e \end{array}\right)$ où $a \neq 0$ et $d \neq 0$.	Solution unique	 Droites concourantes
$\left(\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ 0 & 0 & e \end{array}\right)$ où $e \neq 0$.	Aucune solution	 Droites parallèles
$\left(\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	Infinité de solutions	 Droites confondues

REMARQUE
Un système d'équations à deux inconnues peut comporter plus de deux équations. Si le système a une ou plusieurs solutions, certaines de ces équations seront complètement éliminées lors des transformations. Cependant, cela ne signifie pas que l'on peut éliminer n'importe laquelle équation arbitrairement. En effet, si un système comprend trois équations à deux inconnues, il est possible qu'il n'admette aucune solution, comme l'illustre la figure suivante.



Équations linéaires à trois inconnues

$$\text{Soit } \begin{cases} x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + y - 3z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 8 \end{cases} \text{ ou } \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & 4 & 8 \end{array}\right).$$

On cherche d'abord à transformer à partir de la première colonne : on annule l'élément de la deuxième ligne en effectuant la transformation

$$L_2 \to L_2 - 2L_1,$$

puis l'élément de la troisième ligne en effectuant la transformation

$$L_3 \to L_3 - 3L_1.$$

On obtient ainsi un système **équivalent** et, finalement, la forme échelonnée :

$$\left(\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & 4 & 8 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & 12 \\ 0 & -8 & 13 & 17 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/(-3) \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -4 \\ 0 & -8 & 13 & 17 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 8L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{array}\right)$$

REMARQUE
Afin d'obtenir des éléments nuls dans la première colonne, on se sert de l'élément de la première ligne de cette colonne, qu'on appelle **pivot**. On indique le pivot au moyen d'un carré ombré.

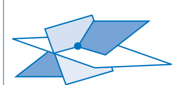
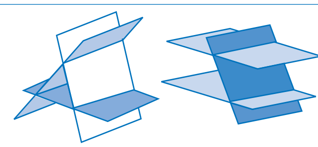
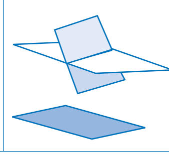
On obtient des éléments nuls dans la deuxième colonne, en se servant de l'élément de la deuxième ligne de cette colonne. S'il est nul, on interchange la deuxième ligne avec une des lignes suivantes ayant un élément non nul dans la deuxième colonne. Si tous les éléments de la deuxième colonne sous la deuxième ligne sont nuls, on passe à la colonne suivante.

De l'équation L_3 : $5z = -15$, on tire $z = -3$ et, en remplaçant z par sa valeur dans L_2 : $y - z = -4$, on obtient $y = -7$. Enfin, L_1 : $x + 2y - 3z = -3$, donne par substitution $x = 2$. Le système a donc une solution unique, soit

$$(x; y; z) = (2; -7; -3).$$

Une équation linéaire à trois inconnues définit un plan de $\mathbb{R}^3$. Quand on résout, un système de trois équations linéaires à trois inconnues, trois cas peuvent se présenter

Systèmes d'équations à trois inconnues

Matrice échelonnée	Solutions	Graphique
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h\neq 0 & i \end{array}\right)$	Solution unique	 Les trois plans passent par un même point.
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & i\neq 0 \end{array}\right)$	Aucune solution	
$\left(\begin{array}{ccc\|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	Infinité de solutions	 Les trois plans passent par une même droite ou ils sont confondus.

MatriceSysEQ03

REMARQUE
La matrice résultant des transformations sur les lignes nous donne toute l'information nécessaire pour déterminer les solutions du système.

Systèmes d'équations et matrices

Il n'est pas possible de représenter graphiquement une équation comportant plus de trois inconnues. On peut cependant résoudre un système formé de telles équations. Un système de m équations linéaires à n inconnues s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

et on le représente par l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

qui s'exprime aussi sous la forme $AX = B$ où $A = (a_{ij})_{m\times n}$ est la matrice des coefficients du système d'équations. On appelle cette dernière **matrice associée** au système d'équations; $B = (b_i)_{m\times 1}$ est la **matrice des constantes** du système et $X = (x_j)_{n\times 1}$, la **matrice des inconnues** du système. On dit que $AX = B$ est **l'équation matricielle associée au système d'équations**. On peut donc également représenter le système d'équations par la matrice

REMARQUE
Un système d'équations représente m contraintes sur n variables. À l'aide du produit matriciel, on peut vérifier que l'on a la bonne solution. Ainsi, pour le système de trois équations à trois inconnues de la page précédente, on a le produit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & a_{ij} & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

appelée **matrice augmentée** du système d'équations.

REMARQUE
La matrice :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

est une matrice échelonnée. Le pivot de la première ligne est 2, celui de la deuxième ligne, –3 et celui de la troisième ligne, –2.

Matrice échelonnée

Une **matrice échelonnée** est une matrice où le nombre de zéros précédant le premier élément non nul d'une ligne augmente de ligne en ligne et il est possible que la ou les dernières lignes soient nulles.

Pivot d'une ligne

Dans une matrice échelonnée, le premier élément non nul d'une ligne est appelé **pivot** de cette ligne.

Méthode de Gauss

MatriceSysEQ04

Pour résoudre un système d'équations linéaires, il faut l'écrire de manière que les variables identiques forment des colonnes et que le coefficient de la première variable de la première ligne soit différent de zéro; c'est ce qu'on appelle la forme initiale du système. À la première étape, on élimine les termes en x_1 depuis la deuxième ligne jusqu'à la dernière, puis les termes en x_2 à partir de la troisième ligne (on peut avoir à intervertir deux lignes pour réaliser cette étape), et ainsi de suite. Le système résultant est appelé **système échelonné**. On finit de résoudre le système par substitution. Cette méthode de résolution consiste donc à construire une suite de systèmes équivalents jusqu'à l'obtention du système échelonné : c'est la **méthode de Gauss**. En pratique, on effectue, sur la matrice augmentée, les transformations visant à créer une matrice échelonnée. Les transformations sont appelées **opérations élémentaires sur les lignes**.

Opérations élémentaires sur les lignes

Soit A, une matrice. On appelle **opération élémentaire sur les lignes** de A chacune des opérations suivantes :

1. Interchanger la ligne i et la ligne j
$$L_i \leftrightarrow L_j.$$
2. Multiplier la ligne i par un scalaire non nul
$$L_i \to aL_i \text{ où } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$
3. Substituer à la ligne i la somme d'un multiple non nul de la ligne i et d'un multiple de la ligne j
$$L_i \to aL_i + bL_j \text{ où } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

MatriceSysEQ05

Matrices équivalentes-lignes

On dit que deux matrices sont **équivalentes-lignes** si on peut les transformer l'une de l'autre en effectuant une série d'opérations élémentaires sur les lignes. L'équivalence de matrices est symbolisé par ≈.

Un peu *d'histoire*

CARL FRIEDRICH GAUSS

1777-1855

Carl Friedrich Gauss, astronome, mathématicien et physicien, naquit le 23 avril 1777 à Brunswick, en Allemagne, dans une famille très modeste. Au cours de ses études élémentaires, deux de ses professeurs, Büttner et Bartels, remarquèrent son talent pour les mathématiques et l'aidèrent à entrer à l'école secondaire. En 1791, Bartels le présenta au duc de Brunswick. La recommandation de Bartels et les réalisations de Gauss incitèrent le duc à accorder une bourse à Gauss, en 1792, ce qui lui permit d'entrer au Collegium Carolinum de Brunswick en 1872, puis à l'Université de Göttingen en 1795. Gauss quitta l'université en 1798 sans avoir obtenu de diplôme, mais il avait déjà fait une importante découverte, soit la construction à la règle et au compas du polygone régulier à dix-sept côtés. Il retourna à Brunswick où il reçut un diplôme. Le duc de Brunswick décida de continuer à subvenir aux besoins de Gauss mais exigea que celui-ci soutienne une thèse de doctorat à l'Université de Helmstedt. Cette thèse portait sur le théorème fondamental de l'algèbre, qui stipule que tout polynôme est le produit de binômes de degré 1 et de trinômes de degré 2, tous irréductibles.

Grâce au soutien du duc de Brunswick, Gauss n'eut pas à chercher d'emploi et il put se consacrer entièrement à la recherche. Il apporta des contributions originales en théorie des nombres, en astronomie, en géodésie, en cartographie et dans toutes les branches des mathématiques. Il s'intéressa beaucoup aux géométries euclidiennes et non euclidiennes et élabora la méthode d'approximation par les moindres carrés. Il s'en servit pour résoudre de façon brillante un problème de son époque. L'Italien Giuseppe Piazzi (1746-1826) venait de découvrir, soit le 1er janvier 1801, le plus gros astéroïde entre Mars et Jupiter, nommé Cérès. Il n'avait pu observer qu'une petite partie de son orbite, soit 9°, avant que l'astéroïde ne disparaisse derrière le Soleil. Plusieurs savants tentèrent de décrire la trajectoire de Cérès à l'aide des données recueillies par Piazzi afin de déterminer à quel endroit l'astéroïde serait à nouveau visible. La prédiction la plus précise fut celle de Gauss.

Ayant perdu son protecteur, tué dans une bataille avec l'armée prussienne, Gauss quitta Brunswick, en 1807 pour occuper le poste de directeur de l'observatoire de Göttingen. Il s'intéressa à l'astéroïde Pallas, découvert par l'astronome Olbers en mars 1802. Ses travaux sur cet astéroïde l'amenèrent à résoudre un système de six équations linéaires à six inconnues. Gauss a laissé son nom à la méthode qu'il employa, soit la construction d'un système d'équations équivalent à celui à résoudre, dans lequel la première équation contient les six inconnues, la seconde seulement cinq, la troisième quatre, et ainsi de suite. Un tel système se résout par substitution en commençant par la sixième équation.

Au début du XIXe siècle, s'imposa une loi fondamentale de la statistique, soit la **loi normale** (d'abord appelée **loi des possibilités**, puis renommée par Karl Pearson), issue de la méthode des moindres carrés. Employée comme critère d'optimisation, en **théorie des erreurs**, *c*ette loi fut élaborée indépendamment par Adrien Marie Legendre et Carl Friedrich Gauss.

Méthode des moindres carrés

Il est toujours délicat de tirer des conclusions de mesures. Le problème, c'est que toute mesure comporte une erreur. L'effet de la température sur les instruments, l'imprécision des lectures et des visées ne sont que quelques sources d'erreurs, et celles-ci sont d'autant plus nombreuses que le nombre de mesures est grand. Le fait de ne prendre que quelques mesures ne règle pas le problème, car il est alors difficile d'estimer l'ordre de grandeur des erreurs. Par ailleurs, lorsque le nombre de mesures est élevé, la manipulation de celles-ci pose un autre problème : « comment utiliser toutes ces mesures de façon à minimiser l'effet des erreurs sur le résultat final ». Le problème fut étudié par Legendre (Adrien Marie, 1752-1833) au début du XIXe siècle. Legendre voulait déterminer l'orbite d'une comète à l'aide de mesures de sa position. Son objectif était de combiner plusieurs mesures pour calculer la meilleure estimation de l'orbite. Ce type de problème est également relié à la découverte d'éventuelles planètes inconnues grâce aux perturbations de la trajectoire d'une planète ou d'une comète qu'elle provoquent. À l'époque, le problème des mesures s'est aussi posé dans les opérations de triangulation visant à mesurer un méridien (définition du mètre) ou à déterminer la forme de la Terre (aplatissement aux pôles). C'est en 1805 que Legendre publia sa méthode de minimalisation de la somme des carrés des écarts. Gauss avait déjà élaboré cette méthode en 1794 et l'utilisa, en 1801, pour calculer l'orbite de l'astéroïde Cérès, mais il ne la publia qu'en 1809. Gauss établit de plus des liens entre cette méthode et les lois de probabilité, ce que Legendre ne fit pas. Plus précisément, Gauss montra, en utilisant la méthode des moindres carrés, que les facteurs aléatoires indépendants entraînent des erreurs de mesure qui se répartissent selon la loi normale, et que la moyenne arithmétique des mesures donne l'estimation qui minimise la somme des carrés des erreurs.

Gauss fut l'un des savants éminents de l'histoire. Il est considéré par plusieurs historiens des sciences comme l'un des trois plus grands mathématiciens de tous les temps, avec Archimède et Newton.

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & 0 \end{matrix}$$

Système d'équations linéaires homogène

Un système d'équations linéaires est dit **homogène** si toutes les constantes b_i sont nulles. Un système homogène admet toujours au moins une solution, soit (0; 0; ...; 0), qu'on appelle **solution triviale**.

Variable liée et variable libre

Dans un système d'équations linéaires, une variable est dite **liée** si sa valeur est constante ou dépend d'une autre variable. Dans la matrice échelonnée associée à un système d'équations, les variables liées sont associées au premier coefficient non nul d'une ligne. Les autres variables sont des **variables libres**.

MatriceSysEQ06

REMARQUE

Une variable est **libre** si sa valeur ne dépend pas de celle d'une autre variable. Dans la matrice échelonnée associée à un système d'équations, les variables libres sont celles qui ne sont pas liées.

PROCÉDURE

Méthode de résolution de Gauss

1. Écrire le système d'équations sous sa forme initiale.
2. Construire la matrice augmentée associée au système d'équations.
3. Échelonner la matrice en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.
4. Si possible, déterminer les solutions par substitution dans les équations de la matrice échelonnée en représentant les variables libres par des paramètres, le cas échéant.
5. Vérifier le résultat à l'aide du produit matriciel ou par substitution.
6. Interpréter le résultat selon le contexte, si cela est pertinent.

EXEMPLE 10.1.2

Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3 + 2x_2 + 5x_4 \\ 2x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 16 + 4x_2 \\ 3x_1 - 19 + 8x_3 = 6x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

Solution

On écrit d'abord le système sous sa forme initiale :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 16 \\ 3x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 2x_4 = 19 \end{cases}$$

puis, on construit la matrice augmentée échelonnée :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 3 & 16 \\ 3 & -6 & 8 & -2 & 19 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 13 & 10 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On analyse ensuite la matrice échelonnée :

- $L_3 : 0 = 0$. L'équation a été éliminée, elle ne représente pas de contrainte additionnelle à celles des deux autres équations
- $L_2 : -x_3 + 13x_4 = 10$. En posant $x_4 = t$, on a $-x_3 + 13t = 10$ et en isolant, on a $x_3 = -10 + 13t$.
- $L_1 : x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 3$. En substituant $x_4 = t$ et $x_3 = -10 + 13t$ dans cette équation, on obtient

$$x_1 - 2x_2 + 3(-10 + 13t) - 5t = 3.$$

et, en posant $x_2 = s$, on a $x_1 - 2s - 30 + 39t - 5t = 3$; donc

$$x_1 = 33 + 2s - 34t.$$

La solution générale est l'ensemble solution

$$\{(x_1; x_2; x_3; x_4) \mid x_1 = 33 + 2s - 34t, x_2 = s, x_3 = -10 + 13t, x_4 = t\}$$

où t et $s \in \mathbb{R}$.

On vérifie le résultat par substitution :

On peut vérifier le résultat en remplaçant dans chacune des équations x_1, x_2, x_3 et x_4 par leurs valeurs respectives. Par exemple, en remplaçant dans la troisième équation, on obtient

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 + 8x_3 - 2x_4 &= 3(33 + 2s - 34t) - 6s + 8(-10 + 13t) - 2t \\ &= 99 + 6s - 102t - 6s - 80 + 104t - 2t = 19 \end{aligned}$$

Enfin, on interprète le résultat :

Le système admet une infinité de solutions. En donnant des valeurs particulières aux paramètres, on obtient des solutions particulières. Ainsi, en posant $s = 0$ et $t = 1$, on a la solution particulière $(-1; 0; 3; 1)$.

REMARQUE

La ligne 3 de la matrice échelonnée est

$$L_3 : 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0,$$

ce qui indique que la troisième équation n'est pas une contrainte qui s'ajoute à celles qu'imposent les deux premières équations. En effet, dans ce cas, la troisième équation est la somme des deux premières. On peut donc éliminer cette équation du système équivalent sans influer sur les solutions du système. Par contre, on ne doit pas enlever la ligne nulle de la matrice augmentée.

REMARQUE

En pratique, on vérifie que la solution obtenue satisfait à toutes les équations en effectuant le produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 8 & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 33 + 2s - 34t \\ s \\ -10 + 13t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 19 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 10.1.3

Dans une usine, la fabrication de meubles non peints se fait en trois étapes : le sciage, l'assemblage et le sablage. On a constaté qu'il arrive fréquemment que des employés n'ont pas de travail à effectuer et qu'il se perd, mensuellement l'équivalent de 109 heures à l'atelier de sciage, 164 heures à l'atelier d'assemblage et 273 heures à l'atelier de sablage. Pour éliminer ces pertes de temps, la direction de l'usine a décidé de fabriquer trois nouveaux modèles de chaises. Elle a déterminé le temps, en heures, nécessaire à la réalisation de chaque modèle; les données sont présentées ci-contre sous forme de tableau.

MatriceSysEQ07

Atelier	Modèle			Temps libre
	M_1	M_2	M_3	
Sciage	1	2	2	109
Assemblage	2	2	3	164
Sablage	3	4	5	273

a) Déterminer combien de chaises de chaque modèle l'usine doit produire pour éliminer les temps morts.

b) La chaise de type M_3 étant la plus chère, à cause du temps de production, la demande pour ce modèle est assez faible et on prévoit ne pas pouvoir en vendre plus de 10 par mois. Pour les autres modèles, on pense ne pas arriver à suffire à la demande. En tenant compte de ces contraintes du marché, déterminer les solutions au problème et représenter celles-ci sous forme de tableau.

Solution

a) On pose x, nombre de chaises du premier modèle (M_1);
y, nombre de chaises du deuxième modèle (M_2);
z, nombre de chaises du troisième modèle (M_3).

Pour éliminer complètement les pertes de temps, il faut que

$$\begin{cases} x+2y+2z=109 \\ 2x+2y+3z=164 \\ 3x+4y+5z=273 \end{cases}$$

On échelonne la matrice augmentée associée à ce système,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 2 & 2 & 3 & 164 \\ 3 & 4 & 5 & 273 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 0 & -2 & -1 & -54 \\ 0 & -2 & -1 & -54 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3-L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 109 \\ 0 & -2 & -1 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On analyse la matrice échelonnée :

- $L_3 : 0 = 0$. La dernière équation a été éliminée; elle ne représente pas une contrainte.
- $L_2 : -2y - z = -54$. En posant $z = t$, on obtient $-2y - t = -54$, ce qui donne $y = 27 - t/2$.
- $L_1 : x + 2y + 2z = 109$. En remplaçant y par $27 - t/2$ et z par t dans L_1, on a $x + 2(27 - t/2) + 2t = 109$; donc $x = 55 - t$.

L'ensemble solution est

$$\{(x;\ y;\ z) \mid x = 55 - t;\ y = 27 - t/2;\ z = t\},$$

où t est un nombre entier positif.

On vérifie le résultat :

On effectue le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 55-t \\ 27-t/2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109 \\ 164 \\ 273 \end{pmatrix}.$$

Les solutions décrites ne sont pas toutes applicables : il faut que $t \geq 0$, car $z = t$ est le nombre de chaises du troisième modèle, il faut aussi que $27 - t/2 \geq 0$, c'est-à-dire que $t \leq 54$; enfin, il faut que $55 - t \geq 0$ c'est-à-dire que $t \leq 55$.

On interprète le résultat :

Puisque $y = 27 - t/2$, il faut que t soit un nombre pair pour que le nombre de chaises à produire soit un nombre entier. Il faut donc choisir de produire un nombre pair de chaises du modèle 3. Le nombre de chaises des deux autres modèles dépendra du nombre de chaises du modèle 3 que l'on choisit de produire.

b) La faible demande impose la contrainte $0 \leq t \leq 10$. De plus, pour que le nombre de chaises soit un entier, il faut que t soit un nombre pair. La direction a donc le choix entre plusieurs solutions comme l'indique le tableau présenté ci-contre.

t	M_1	M_2	M_3
0	55	27	0
2	53	26	2
4	51	25	4
6	49	24	6
8	47	23	8
10	45	22	10

Transformation d'équations matricielles

Une équation matricielle est une équation comportant des matrices. Elle n'est pas toujours donnée sous une forme permettant d'appliquer directement la méthode de Gauss. Il faut parfois utiliser les propriétés des opérations matricielles pour ramener l'équation sous la forme $A \bullet X = B$.

EXEMPLE 10.1.4

Utiliser les propriétés des opérations matricielles pour écrire les équations matricielles suivantes sous la forme $A \bullet X = B$ et donner la matrice associée à l'aide de laquelle on peut appliquer la méthode de Gauss. Résoudre le système d'équations linéaires.

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$

REMARQUE

Pour appliquer la méthode de gauss, il faut ramener l'équation matricielle sous la forme :

$$A \bullet X = B$$

$$\begin{pmatrix} \text{Matrice des} \\ \text{coefficients} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \text{Inconnue} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Constante} \end{pmatrix}$$

Matrices colonne

■ *Solution*

a) L'équation matricielle est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Par l'addition des matrices, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Puisque la matrice I est neutre pour la multiplication et compatible à gauche pour la multiplication avec la matrice colonne, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et, par distributivité, on obtient :

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En effectuant la soustraction des matrices, on a alors :

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice associée est : $\left(\begin{array}{cc:c} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 2 \end{array}\right)$

En appliquant la méthode de Gauss,

$$\left(\begin{array}{cc:c} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 2 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc:c} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -7 \end{array}\right)$$

Le système a une solution unique et, par substitution, on obtient que $(x; y) = (-17/8; -7/8)$.

b) L'équation matricielle est $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.
Puisque la matrice I est neutre pour la multiplication et compatible à droite pour la multiplication avec la matrice ligne, on a :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par l'addition des matrices et la distributivité du produit,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\bullet\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En soustrayant, $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\bullet\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$,

d'où : $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puisque $(A\bullet B)^t = B^t\bullet A^t$.

La matrice associée est $\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$

En résolvant, $\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \end{array}\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{array}\right)$

Le système a une solution unique et, puisqu'il s'agit d'un système homogène, c'est la solution triviale $(x; y) = (0; 0)$.

REMARQUE

On vérifie facilement les réponses obtenues en a et en b par la multiplication matricielle.

Un peu *d'histoire*

SOFIA KOVALEVSKAÏA

1850-1891

Sofia Kovalevskaïa naquit à Moscou en 1850 et mourut à Stockholm en 1891. Son père, Vasily Korvin-Krukovsky, général d'artillerie, et sa mère, Velizaveta Shubert, faisaient tous deux partie de la noblesse russe. Elle fut éduquée par des tuteurs et des gouvernantes, et vécut d'abord au domaine des Krukovsky, à Palibino puis à Saint-Pétersbourg, où elle se joignit au cercle social de la famille.

Par souci d'économie, on tapissait à l'époque les murs de chambres de feuilles de papier usagées. La sienne était recouverte de notes sur le calcul différentiel et intégral et, à l'âge de 11 ans, elle s'appliqua à en comprendre la signification. Elle entreprit des études en mathématiques sous la direction du tuteur de la famille ; elle avoua elle-même avoir été à ce point fascinée par ce sujet qu'elle négligea les autres matières de sorte que son père lui interdit l'étude des mathématiques. Elle emprunta alors un livre d'algèbre qu'elle étudiait la nuit, quand toute la maisonnée était endormie.

En Russie, à cette époque, une femme n'avait pas le droit de quitter le foyer familial sans la permission écrite de son père ou de son mari. Comme son père refusait de la laisser aller étudier à l'université, elle contracta un mariage blanc avec Vladimir Kovalevski. En 1869, elle s'installa à Heidelberg pour y étudier les mathématiques et les sciences naturelles. Elle réussit à assister aux cours même si l'université ne décernait pas de diplôme aux femmes.

En 1871, elle déménagea à Berlin pour étudier avec Karl Weierstrass (1815-1897) mais, malgré les démarches de ce dernier, elle ne fut pas autorisée à assister aux cours. Weierstrass lui donna des cours privés durant les quatre années qui suivirent.

En 1874, elle reçut un doctorat avec grande distinction de l'Université de Göttingen mais, malgré ce diplôme et les chaudes recommandations de Weierstrass, elle n'obtint pas d'emploi à la mesure de son talent. On lui offrit un poste d'enseignante dans une école primaire pour filles. En 1884, elle accéda enfin à un poste de professeur à l'Université de Stockholm grâce aux démarches de Gosta Mittag-Leffler (1846-1927), ancien élève de Weierstrass. En 1886, elle reçut le prix Bordin pour un article intitulé *Mémoire sur un cas particulier de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe*. En témoignage de la qualité de cet ouvrage, le prix qui était de 3 000 francs fut augmenté à 5 000 francs. En 1889, elle devint la première femme depuis Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) à détenir une chaire de mathématiques dans une université européenne.

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

10.2 Exercices

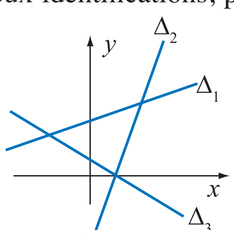
1. Après avoir échelonné différents systèmes de trois équations à deux inconnues, on a obtenu les matrices suivantes. Dans ces matrices, les lettres représentent des valeurs numériques non nulles. Indiquer si le système admet une solution unique une infinité de solutions ou aucune solution.

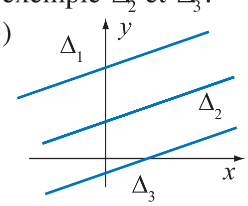
a) $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & f \end{array}\right)$

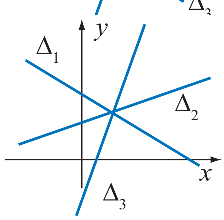
b) $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ e) $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{array}\right)$

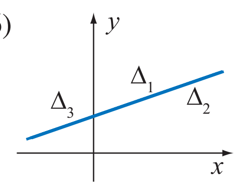
c) $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ f) $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

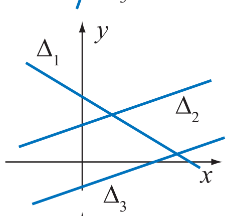
Parmi les représentations graphiques suivantes indiquer celles qui peuvent être des représentations du système d’équations avant que celui-ci ne soit échelonné. Dans ces représentations graphiques, deux droites sont confondues lorsqu’elles portent deux identifications, par exemple Δ_2 et Δ_3.

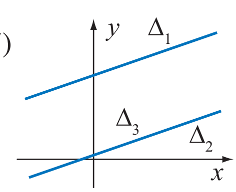
1)


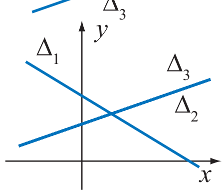
5)


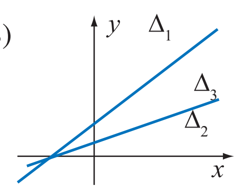
2)


6)


3)


7)


4)


8)


2. On a échelonné différents systèmes de quatre équations à trois inconnues et obtenu les matrices suivantes. Dans ces matrices, les lettres représentent des valeurs numériques non nulles. Indiquer si le système admet une solution unique, une infinité de solutions ou aucune solution.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ e) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ f) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{array}\right)$ g) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & i \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ h) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

3. Résoudre les systèmes d’équations linéaires par la méthode de Gauss,.

a) $\begin{cases} x-2y+z=13 \\ 2x+5y-3z=-17 \\ 3x+4y+2z=14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x+5y+z=9 \\ 4x+9y-z=17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y+2z=7 \\ 2x-5y-z=16 \\ 4x-11y+3z=30 \\ 3x-8y+z=23 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-5y+6z-2u=31 \\ x+2y+4z+3u=27 \\ 2x+3y+2z+u=8 \\ x+3y+2z+u=6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+4y-3z=18 \\ 5x+y+2z=21 \\ 8x+5y+2z=14 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x-2y+4z=80 \\ 5x+7y-4z=-67 \\ 3x-4y+6z=118 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x+3y-7z=3 \\ 4x+2y+z=30 \\ 2x+7y-4z=-21 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+3y-5z=-32 \\ 4x+2y+3z=17 \\ 3x-7y+5z=52 \\ 2x-16y+7z=87 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x+2y+5z=19 \\ 3x+4y+2z=-5 \\ x+4y-14z=-91 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+3y-2z=-25 \\ 3x+5y+z=-16 \\ 3x+y+8z=20 \end{cases}$

4. La représentation graphique d'une correspondance de la forme $y = ax^2 + bx + c$ est une parabole. Déterminer l'équation de la parabole passant par les points (2; 2), (4; 4) et (6; 7).

5. Dans chaque cas, déterminer à l'aide de la méthode de Gauss, pour quelles valeurs de a le système d'équations : admet une solution unique, admet aucune solution, admet une infinité de solutions.

a) $\begin{cases} x+ay-z=2 \\ 2x-y+3z=3 \\ 3x+y+az=5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x+3y+az=-2 \\ 3x+ay+6z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 2x-y+az=3 \\ 3x+ay+2z=17 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y-az=5 \\ 2x-ay+10z=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 2x+y+az=5 \\ 2x+ay+z=7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-2y+z=2 \\ x-3y+az=5 \\ 2x+ay-4z=7 \end{cases}$

6. Dans chaque cas, déterminer à l'aide de la méthode de Gauss, à quelles conditions doivent satisfaire les constantes a, b et c pour que le système d'équations linéaires admette au moins une solution.

a) $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y+4z=a \\ 2x+3y-z=b \\ 3x+y+2z=c \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 3x-y+2z=b \\ x-5y+8z=c \end{cases}$

7. Soit le système d'équations

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

Montrer que :

a) Si $\dfrac{a}{c} \neq \dfrac{b}{d}$, c'est-à-dire $ad - bc \neq 0$, le système admet une solution unique qui est

$$x = \frac{de-bf}{ad-bc} \text{ et } y = \frac{af-ce}{ad-bc}.$$

b) Si $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} \neq \dfrac{e}{f}$, le système n'a aucune solution.

c) Si $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{e}{f}$, le système a une infinité de solutions.

8 Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+6x_3+2x_4-5x_5=3 \\ x_2-3x_3+x_4=1 \\ x_4-3x_5=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-1 \\ 3x_1-x_2+2x_3=7 \\ 5x_1+3x_2-4x_3=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-2x_4=8 \\ 3x_1-x_2+2x_3=6 \\ 3x_1-x_2+2x_3-4x_4=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=6 \\ 2x_1-x_2+4x_3=2 \\ 4x_1+3x_2-2x_3=14 \end{cases}$

9. Déterminer, dans chaque cas, les points d'intersection des plans donnés.

a) $\pi_1 : 2x + 5y + 3z = 7$
$\pi_2 : 2x + 6y + 7z = 20$
$\pi_3 : 2x + 5y + 4z = 11$

b) $\pi_1 : x + 3y + 2z = 36$
$\pi_2 : 2x + y + 8z = 106$
$\pi_3 : 3x + 5y + 9z = 133$

c) $\pi_1 : 2x - y + 3z = 74$
$\pi_2 : 4x - y + 2z = 84$
$\pi_3 : 4x - 2y + 6z = 13$

d) $\pi_1 : 2x + y + 3z = -2$
$\pi_2 : 3x - 2y + 4z = -16$
$\pi_3 : x + 4y + 2z = 12$

10. Utiliser les propriétés des opérations matricielles pour écrire les équations matricielles suivantes sous la forme $A \bullet X = B$ et donner la matrice associée à l'aide de laquelle on peut appliquer la méthode de Gauss.

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

11. Résoudre les systèmes d'équations en appliquant la méthode de Gauss.

a) $\begin{cases} x+2y-3z+2u=2 \\ 2x+5y-8z+6u=5 \\ 3x+4y-5z+2u=4 \end{cases}$

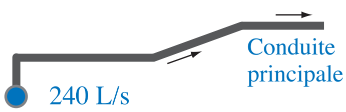
b) $\begin{cases} x+5y+4z-13u=3 \\ 3x-y+2z+5u=2 \\ 2x+2y+3z-4u=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases}$

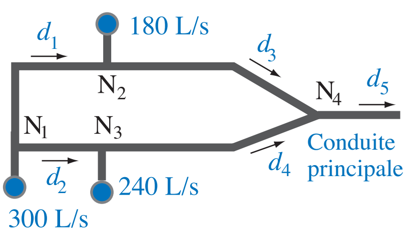
d) $\begin{cases} x-2y+2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ 3x+4y-6z=0 \\ 3x-11y+12z=0 \end{cases}$

10.3 Applications

Pour utiliser un système d'équations à l'analyse d'un réseau, il faut établir les équations en assignant un sens arbitraire au flux dans le réseau. C'est en analysant les signes dans la solution du système d'équations que l'on peut établir le sens exact.



Réseau d'alimentation actuel



Réseau d'alimentation projeté

EXEMPLE 10.3.1

Le réseau d'eau potable d'une municipalité est alimenté par une usine qui ne suffit plus à la demande. On projette donc la construction de deux autres usines, reliées à la première. Le diagramme représente le réseau d'alimentation actuel et projeté; les flèches indiquent le sens d'écoulement de l'eau. Calculer le débit dans chaque branche du réseau lorsque les usines fonctionneront à pleine capacité.

Solution

Chaque point de jonction du diagramme représente un nœud du réseau d'alimentation. On assigne un sens arbitraire d'écoulement à chaque branche et on désigne le débit dans chacune par une variable. On peut alors établir une équation pour chacun des nœuds du réseau, compte tenu du fait que la quantité de liquide qui arrive à un nœud est identique à celle qui en sort:

- nœud N_1 : $d_1 + d_2 = 300$;
- nœud N_2 : $d_1 + 180 = d_3$;
- nœud N_3 : $d_2 + 240 = d_4$;
- nœud N_4 : $d_3 + d_4 = d_5$.

En représentant le problème par une matrice, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -180 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -240 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{c} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -480 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -240 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1+L_2 \\ -L_2 \\ L_3+L_2 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -180 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 480 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -720 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{c} L_1-L_3 \\ L_2+L_3 \\ -L_3 \\ L_4+L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 540 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -240 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 720 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -720 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ -L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 540 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -240 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 720 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 720 \end{array}\right)$$

L'ensemble solution du système d'équations est

$$\{(d_1;d_2;d_3;d_4;d_5) \mid d_1=540-s, d_2=s-240, d_3=720-s, d_4=s, d_5=720\}.$$

Il y a donc une infinité de solutions. L'eau s'écoule dans le sens indiqué par les flèches si $d_1 = 540 - s \geq 0$, c'est-à-dire si $s \leq 540$ L/s. Il faut également que $d_2 = s - 240 \geq 0$, d'où $s \geq 240$ L/s. On doit donc avoir $240 \leq s \leq 540$. En choisissant $s = 300$ L/s, on obtient la solution particulière (240; 60; 420; 300; 720).

REMARQUE

Le système d'équations comporte une seule variable libre, soit d_4. La variable d_5 est liée puisque sa valeur est constante.

Problème de production et matrices

Comment décrire à l'aide de matrices un problème de production? Dans ce type de problème, l'équation matricielle établit une relation entre les quantités de matériaux requises pour produire un exemplaire de chaque modèle, le nombre d'unités de chaque modèle à produire et la quantité totale de chacun des matériaux nécessaires pour la production. La représentation matricielle donnée ci-contre illustre cette relation.

$$A \bullet X = B$$

$$\begin{pmatrix}\text{Quantité}\\ \text{de chaque}\\ \text{matériau}\\ \text{par unité}\\ \text{à produire}\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}\text{Nombre}\\ \text{d'unités à}\\ \text{produire}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Quantité}\\ \text{totale de}\\ \text{matériaux}\end{pmatrix}$$

Matrices colonnes

Représentation matricielle d'un problème de production

On rencontre deux grands types de problèmes :

• Matériaux à commander pour produire les commandes

Calculer la quantité de matériaux à commander compte tenu du nombre d'unités de chaque modèle à produire; pour ce faire, on effectue le produit de matrices.

$$\begin{pmatrix}\text{Quantité}\\ \text{de chaque}\\ \text{matériau}\\ \text{par unité}\\ \text{à produire}\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}\text{Nombre}\\ \text{d'unités}\\ \text{à produire}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}?\end{pmatrix}$$

Matériaux à commander

• Capacité de production avec les matériaux disponibles

Calculer le nombre d'unités de chaque modèle que l'on peut produire avec les matériaux dont on dispose; pour ce faire, on résout un système d'équations.

$$\begin{pmatrix}\text{Quantité}\\ \text{de chaque}\\ \text{matériau}\\ \text{par unité}\\ \text{à produire}\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}?\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Quantité}\\ \text{totale de}\\ \text{matériaux}\end{pmatrix}$$

Capacité de production avec les matériaux disponibles

EXEMPLE 10.3.2

Un épicier veut préparer et vendre trois mélanges de café, soit velouté, moyen et corsé, en sacs de 1 kg. Il compte utiliser trois sortes de grains : brésiliens, africains et colombiens. Les quantités nécessaires (en kilogrammes) pour produire un kilogramme de chaque mélange sont données ci-contre sous forme de tableau.

Sorte de grains	Mélange		
	Velouté	Moyen	Corsé
Brésiliens	0,2 kg	0,2 kg	0,4 kg
Africains	0,3 kg	0,4 kg	0,3 kg
Colombiens	0,5 kg	0,4 kg	0,3 kg

a) L'épicier pense pouvoir vendre 100 kg de chaque mélange par semaine. Combien de kilogrammes de chaque sorte de grains doit-il commander hebdomadairement chez le grossiste?

b) Le grossiste informe l'épicier qu'il ne peut pas lui fournir les quantités dont il a besoin : il peut lui vendre seulement 22 kg de brésilien, 30 kg d'africain et 38 kg de colombien. Quelle quantité de chaque mélange l'épicier pourra-t-il produire en tenant compte de ces contraintes ?

Solution

a) On effectue le produit de la matrice de la composition des mélanges par la matrice des quantités que l'épicier croit pouvoir vendre :

$$\begin{pmatrix}\text{Quantité de}\\ \text{grains par kilo}\end{pmatrix}_{3\times} \bullet \begin{pmatrix}\text{Nombre}\\ \text{de sacs}\\ \text{de 1 kg}\end{pmatrix}_{3\times1} = \begin{pmatrix}\text{Quantité}\\ \text{totale}\\ \text{de grains}\end{pmatrix}_{3\times1}$$

$$\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4\\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3\\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}100\\ 100\\ 100\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}80\\ 100\\ 120\end{pmatrix}$$

L'épicier doit commander au grossiste 80 kg de brésilien, 100 kg d'africain et 120 kg de colombien.

b) Soit :x, le nombre de kilogrammes de café velouté;

y, le nombre de kilogrammes de café moyen;

z, le nombre de kilogrammes de café corsé.

Puisque l'épicier ne reçoit que 22 kg de grains brésiliens, il faut que

$$0{,}2x + 0{,}2y + 0{,}4z = 22,$$

de sorte que la quantité totale de café brésilien utilisée soit égale à la quantité fournie par le grossiste. Pour les autres mélanges, les équations sont :

$$0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}3z = 30$$
$$0{,}5x + 0{,}4y + 0{,}3z = 38.$$

En appliquant la méthode de Gauss, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 22 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 & 30 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}3 & 38 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ 10L_2 - 15L_1 \\ 10L_3 - 25L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 22 \\ 0 & 1 & -3 & -30 \\ 0 & -1 & -7 & -170 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 5L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 110 \\ 0 & 1 & -3 & -30 \\ 0 & 0 & -10 & -200 \end{array}\right)$$

En effectuant les substitutions appropriées, on a (40; 30; 20). Il reste à vérifier ce résultat :

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 30 \\ 38 \end{pmatrix}$$

L'épicier pourra produire 40 kg de café velouté, 30 kg de café moyen et 20 kg de café corsé avec les grains fournis par le grossiste.

REMARQUE
Pour éviter de travailler avec des fractions, on peut utiliser la deuxième opération élémentaire de ligne. Cette opération consiste à multiplier la ligne i par un scalaire non nul. Elle est décrite par :

$$L_i \to aL_i, \text{ où } a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de réduction de Gauss-Jordan consiste à utiliser le pivot d'une ligne de la matrice augmentée pour annuler tous les autres termes de la colonne. Cette méthode a servi à concevoir des algorithmes informatiques permettant de résoudre des systèmes d'équations linéaires.

Matrice échelonnée réduite

Une **matrice échelonnée réduite** est une matrice où :

- le pivot de chaque ligne de la matrice des coefficients est 1;
- le pivot est le seul élément non nul de sa colonne.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

Matrice échelonnée réduite

EXEMPLE 10.3.3

Résoudre le système d'équations linéaires suivant par la méthode de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 18 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 24 \end{cases}$$

■ ***Solution***

En résolvant, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -7 \\ 2 & -3 & 5 & 18 \\ 4 & 1 & -2 & 24 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-4L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & -7 & 11 & 32 \\ 0 & -7 & 10 & 52 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 7L_1 + 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & -7 & 11 & 32 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 + L_3 \\ L_2 + 11L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & -7 & 0 & 252 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/7 \\ L_2/(-7) \\ L_3/(-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right)$$

Le système a une solution unique (5; –36; –20). Cela est confirmé par le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ -36 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

REMARQUE

Si on applique la méthode de résolution de Gauss, il faut, après avoir échelonné la matrice augmentée associée au système d'équations, déterminer par substitution les solutions du système d'équations linéaires. On peut effectuer la substitution sous forme matricielle en construisant la **matrice échelonnée réduite** équivalente. Celle-ci donne directement la solution dans le cas où elle est unique.

EXEMPLE 10.3.4

Résoudre le système d'équations linéaires suivant par la méthode de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x+2y+z-u &= 6 \\ x+2y+3z \quad\;\; &= 14 \\ -2x-4y+2z+5u &= 0 \end{aligned}$$

■ ***Solution***

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 14 \\ -2 & -4 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 + 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} 2L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \approx \begin{array}{l} L_1 + 3L_3 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/2 \\ L_2/2 \\ L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Le premier élément non nul de la première ligne est dans la colonne des coefficients de x; cette variable est donc liée. Le premier élément non nul de la deuxième ligne est dans la colonne des coefficients de z; cette variable est donc liée. Le premier élément non nul de la troisième ligne est dans la colonne des coefficients de u, cette variable est donc liée. La variable y est libre. Si on la représente par la lettre t, par substitution dans les équations ayant une valeur non nulle dans la colonne des coefficients de y, on obtient la solution générale du système d'équation, soit

$$\{(x;\ y;\ z;\ u) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -4 - 2t,\ y = t,\ z = 6,\ u = -4\}.$$

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat par le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -4-2t \\ t \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un peu *d'histoire*

EMMY NOETHER

1882-1935

Emmy Noether naquit en 1882 à Erlangen, en Allemagne, et elle mourut en 1935 en Pennsylvanie, aux États-Unis. Son père, Max Noether, était professeur de mathématiques à Erlangen. Sa mère, Ida Kaufmann, venait d'une riche famille de Cologne. Emmy était l'aînée et la seule fille d'une famille de quatre enfants.

Emmy et son plus jeune frère, Fritz, suivirent les traces de leur père : ils étudièrent les mathématiques. Emmy se prépara d'abord à devenir professeur de langues et, après avoir réussi l'examen de l'État bavarois, elle reçut son certificat de professeur d'anglais et de français pour les écoles bavaroises de filles. Cependant, elle n'occupa jamais de poste de professeur de langues. Elle alla plutôt étudier les mathématiques à l'université. Ce choix ne fut pas de tout repos. Officiellement, les filles n'étaient pas admises dans les universités allemandes à cette époque. Pour qu'une fille puisse suivre les cours, il fallait que chaque professeur donne son accord. Elle obtint la permission d'assister aux cours à l'Université d'Erlangen de 1900 à 1902. Son tuteur fut Paul Gordon, ami de la famille. Après avoir réussi les examens à Erlangen, elle entra à l'Université de Göttingen et assista aux cours des mathématiciens Hilbert, Klein et Minkowski.

En 1907, elle présenta sa thèse, intitulée *Sur les systèmes complexes d'invariants sur les formes biquadratiques ternaires,* ce qui lui valut un doctorat de l'Université d'Erlangen. Son directeur de thèse fut Paul Gordon.

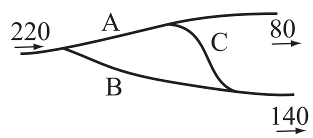
Il y avait encore beaucoup d'opposition à l'arrivée des femmes dans les universités. La Faculté de philosophie de Göttingen était formée des professeurs de philosophie, d'histoire, de sciences naturelles et de mathématiques, et ceux qui œuvraient dans d'autres domaines que les mathématiques s'opposaient à l'admission d'Emmy à la Faculté. Aucun poste de professeur ne lui fut donc offert. En 1915, Hilbert et Klein l'invitèrent à retourner à Göttingen et à y demeurer pendant qu'ils exerceraient des pressions pour la faire admettre à la faculté. Ce qu'ils réussirent seulement en 1919. Dans l'intervalle, Hilbert lui offrit la possibilité d'enseigner en se servant de son nom pour annoncer le cours qu'elle donnait.

Les travaux d'Emmy Noether sur la théorie des invariants ont mené à la formulation de plusieurs concepts de la théorie de la relativité générale d'Einstein. En 1919, elle délaissa la théorie des invariants pour s'intéresser à la théorie des idéaux. Elle contribua ainsi à faire de cette théorie une composante majeure des mathématiques. Ses travaux menèrent à la structure de **module**, plus générale que la structure d'espace vectoriel.

En 1933, Noether fut chassée de l'Université de Göttingen par les Nazis, car elle était juive. Elle se réfugia aux États-Unis et enseigna au Bryn Mawr College et à l'Institute for Advanced Study de Princeton. Elle mourut des suites d'une intervention chirurgicale.

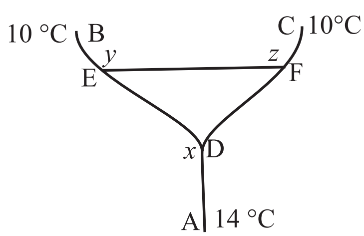
10.4 Exercices

1. Une municipalité a réalisé une étude sur la circulation, et les résultats sont représentés par le croquis suivant. Les voies sont à sens unique et on indique le nombre de véhicules par heure en trois points du réseau, à l'heure de pointe du matin.



   a) Décrire le réseau routier à l'aide d'un système d'équations.
   b) Résoudre le système d'équations.

2. Dans un treillis métallique, la température en un point de jonction quelconque est égale à la température moyenne aux extrémités ou aux points de jonction immédiatement voisins.
   a) Déterminer la température en chaque point de jonction du treillis suivant compte tenu des températures indiquées.



   b) Si on augmente la température à l'extrémité A à 50°C en maintenant les autres extrémités à 10°C, quelle est la température en chacun des points de jonction ?
   c) Si on règle la température à 40°C à l'extrémité A, à 20°C à l'extrémité B et à 0°C à l'extrémité C, quelle est la température aux points de jonction ?

3. Une entreprise a mis au point un procédé de filtration nécessitant trois types de tourbe, chacun pouvant absorber une quantité donnée de polluants.

Grammes de polluant absorbés par litre de tourbe

Polluants	Types de tourbe		
	T_1	T_2	T_3
P_1	5	3	4
P_2	3	4	2
P_3	2	4	3

   a) Déterminer le nombre de litres de chaque type de tourbe qu'il faut employer si on veut absorber 43 g de P_1, 29 g de P_2 et 27 g de P_3.
   b) Si les polluants à absorber comprennent 58 g de P_1, 50 g de P_2 et 54 g de P_3, quelle quantité de chaque type de tourbe faut-il utiliser ?

4. Une usine de meubles produit trois modèles de bureau, soit M_1, M_2 et M_3. La fabrication de chaque modèle nécessite une quantité donnée de bois, de contreplaqué et d'aggloméré, comme l'indique le tableau suivant. Les quantités de bois sont exprimées en mètres linéaires, et les quantités de contreplaqué et d'aggloméré en mètres carrés.

Quantités de matériaux par modèle

Matériau	Modèle		
	M_1	M_2	M_3
Bois	12	16	14
Contreplaqué	1,5	2	1,8
Aggloméré	0,8	0,6	1,2

   a) L'usine a en réserve les matériaux suivants : 530 unités de bois, 66,9 unités de contreplaqué et 31,8 unités d'aggloméré. Combien de bureaux de chaque modèle peut-elle fabriquer avec les matériaux ?
   b) L'usine a des commandes pour 29 bureaux du modèle M_1, 55 bureaux du modèle M_2 et 43 bureaux du modèle M_3. Quelle quantité supplémentaire de chaque matériau doit-elle se procurer pour remplir ces commandes ?
   c) Le temps de fabrication des bureaux en minutes par un ouvrier ainsi que le temps disponible par semaine (en minutes) dans les différents ateliers sont donnés dans le tableau suivant. Compte tenu de ces contraintes, combien de bureaux de chaque modèle l'usine peut-elle fabriquer par semaine?

Temps de production par modèle				
Atelier	Modèle			Temps disponible
	M_1	M_2	M_3	
Sciage	75	90	85	5 010
Assemblage	45	50	65	3 170
Sablage	50	65	90	4 050

5. Le service de voirie d'une municipalité doit réquisitionner des camions afin de transporter trois types de pièces d'équipement sur un chantier. La municipalité dispose de trois types de camions, soit C_1, C_2 et C_3, mais des contraintes d'espace et de poids déterminent le nombre de pièces d'équipement E_1, E_2 et E_3 que chaque type de camion peut transporter, comme l'indique le tableau suivant.

Pièces d'équipement et capacité des camions			
Nombre de pièces	Type de camions		
	C_1	C_2	C_3
E_1	4	2	5
E_2	3	2	4
E_3	2	4	2

a) Déterminer combien de camions de chaque type le service doit réquisitionner pour assurer le transport de 39 pièces E_1, 31 pièces E_2 et 24 pièces E_3.
b) Le service doit aussi transporter sur un autre chantier 54 pièces E_1, 46 pièces E_2 et 48 pièces E_3. Combien de camions de chaque type seront nécessaires dans ce cas ?

6. Une entreprise fabrique trois produits, soit P_1, P_2 et P_3, et la production comporte quatre opérations. Le tableau suivant donne le temps de fabrication, en minutes d'un litre de chaque produit.

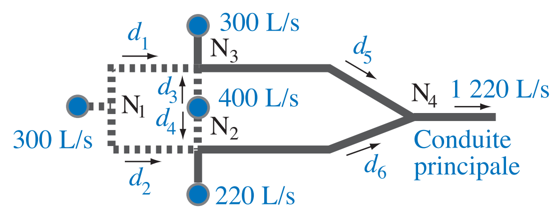
Temps de fabrication d'un litre de chaque produit				
Produit	Durée de l'opération (min)			
	Mélanger	Chauffer	Centrifuger	Refroidir
P_1	1	1	2	2
P_2	2	2	2	3
P_3	1	3	4	5

a) Déterminer le temps requis pour chaque opération au cours des trois jours de production décrits dans le tableau suivant.

Quantité (L) à produire au cours des trois prochains jours			
Produit	Jour		
	J_1	J_2	J_3
P_1	50	40	30
P_2	75	40	75
P_3	65	60	80

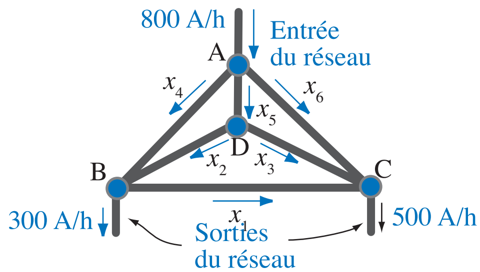
b) Déterminer le temps total de production pour chacune des journées.
c) On dispose de 100 min pour mélanger, 100 min pour chauffer, 100 min pour centrifuger et 150 min pour refroidir. Quelles quantités de P_1, de P_2 et de P_3 devrait-on produire si on désire utiliser toutes les minutes disponibles ?

7. Le réseau d'eau potable d'une municipalité est alimenté par deux usines qui ne suffisent plus à la demande. On projette la construction de deux autres usines. Dans le diagramme suivant, les pointillés représentent les ajouts envisagés. Les conduites actuelles (N_2N_4 et N_3N_4) ont une capacité maximale de 400 L/s.



Il faut déterminer le débit dans chacune des branches du réseau, après les ajouts, pour savoir s'il faut changer les deux conduites ou une seule. Calculer ces débits et interpréter les résultats selon le contexte.

8. Le diagramme suivant représente le réseau des rues commerciales du centre-ville, qui sont toutes à sens unique. On évalue que, durant les heures d'ouverture des magasins, 800 autos par heure pénètrent dans le réseau par l'intersection A, alors que 300 en sortent par l'intersection B et 500 par l'intersection C.



a) Combien faut-il d'inconnues pour analyser la circulation dans le réseau ?
b) Combien d'équations peut-on écrire pour décrire la circulation dans le réseau ? Combien y a-t-il de variables libres ?
c) Quelle caractéristique des réseaux à sens unique applique-t-on pour écrire les équations ?
d) Déterminer l'équation décrivant la circulation en chacun des nœuds du réseau et construire la matrice augmentée.
e) Décrire l'ensemble solution du système.
f) Les solutions sont-elles toutes acceptables ?

9. Résoudre simultanément les systèmes d'équations donnés à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan.

a) $\begin{cases} 2x+5y=42 \\ 3x-4y=-19 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x+5y=26 \\ 3x-4y=16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-3z=-13 \\ 2x-5y+4z=32 \\ 3x+4y-7z=-27 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+2y-3z=-21 \\ 2x-5y+4z=10 \\ 3x+4y-7z=-53 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-3y+4z=-34 \\ 2x-5y+3z=-34 \\ 4x-11y+11z=-102 \end{cases}$ et $\begin{cases} x-3y+4z=10 \\ 2x-5y+3z=-10 \\ 4x-11y+11z=10 \end{cases}$

10. Une usine fabrique des chaises en plastique moulé avec armatures de métal. Les armatures sont taillées puis soudées à l'atelier de soudure et les parties moulées sont produites à l'atelier de moulage. Les différentes composantes sont ensuite acheminées à l'atelier d'assemblage. La direction a fait le relevé mensuel des temps morts dans chacun de ces ateliers et, pour les éliminer, elle a décidé d'ajouter trois nouveaux modèles de chaise M_1, M_2 et M_3 à sa production. D'après l'étude de marché, la demande pour chacun de ces modèles devrait être supérieure ou égale à 10 unités par mois.

On évalue que le temps de production d'une unité du premier modèle est de 20 minutes à l'atelier de soudure, de 20 minutes à l'atelier de moulage et de 30 minutes à l'atelier d'assemblage. Le temps de production d'une unité du second modèle est de 24 minutes à l'atelier de soudure, de 15 minutes à l'atelier de moulage et de 27 minutes à l'atelier d'assemblage. Le temps de production d'une unité du troisième modèle est de 30 minutes à l'atelier de soudure, de 30 minutes à l'atelier de moulage et de 45 minutes à l'atelier d'assemblage. Les temps disponibles sont de 930 minutes à l'atelier de soudure, de 840 minutes à l'atelier de moulage et de 1 305 minutes à l'atelier d'assemblage. De plus, le profit réalisé à la vente d'une unité du premier modèle est de 32 $, il est de 28 $ pour le deuxième modèle et de 40 $ pour le troisième.

a) En tenant compte de ces contraintes, combien de chaises de chaque modèle l'usine doit-elle produire mensuellement pour que son profit additionnel soit maximal? Quel est ce profit?
b) On a constaté une demande importante pour ces nouveaux modèles de chaise. L'entreprise décide de suspendre la production de deux anciens modèles, libérant ainsi du temps dans les trois ateliers. Les temps libres qui s'ajoutent sont de 1 190 minutes à l'atelier de soudure, de 1 055 minutes à l'atelier de moulage et de 1 650 minutes à l'atelier d'assemblage. Dans ces nouvelles conditions, combien de chaises de chaque modèle l'usine doit-elle produire mensuellement pour que son profit additionnel soit maximal? Quel est alors ce profit?
c) Le directeur des ventes vous informe que la demande pour le modèle M_1 est moins forte que l'offre, et il ne peut en écouler plus de 40 par mois. Dans ces conditions, combien de chaises de chaque modèle l'usine doit-elle produire mensuellement pour que son profit additionnel soit maximal? Quel est alors ce profit?

11. Un marchand d'aliments naturels souhaite préparer trois types de mélanges à grignoter en sachets de 60 grammes. Les ingrédients utilisés pour ces mélanges seront les arachides, les raisins et les noix de cajou. Le mélange Cric contient 20 g d'arachides, 10 g de raisins et 30 g de noix de cajou. Le mélange Crac contient 15 g d'arachides, 15 g de raisins et

30 g de noix de cajou. Le mélange Croc contient 10 g d'arachides, 20 g de raisins et 30 g de noix de cajou.

a) Le marchand estime qu'il devrait pouvoir vendre hebdomadairement 200 sachets de chacun des mélanges. En supposant que ses prévisions sont exactes, déterminer les quantités d'arachides, de raisins et de noix de cajou à commander chaque semaine.
b) Les coûts pour 10 grammes de chaque ingrédient sont donnés par la matrice suivante :
$$(0{,}10 \quad 0{,}04 \quad 0{,}16)$$
Trouver la matrice du coût des matières premières de chaque type de mélange.
c) Le marchand estime que le coût en main-d'œuvre devrait être de 0,18 $ le sachet. Trouver la matrice du coût total de production d'un sachet pour chaque type de mélange.
d) Sachant que le marchand souhaite réaliser un profit équivalant à 80 % du coût de production, quel doit être le prix de vente de chaque type de sachet?
e) Le grossiste informe le marchand qu'il ne pourra lui fournir plus de 6 kg d'arachides, 6 kg de raisins et 12 kg de noix de cajou. Calculer dans ces conditions le nombre de sachets que le marchand pourra produire par semaine.
f) Le grossiste informe le marchand que le prix des noix de cajou a subi une hausse importante. Le coût sera désormais de 0,26 $ pour 10 grammes. Le marchand décide de modifier ses mélanges pour diminuer la quantité de noix de cajou et augmenter celle des autres ingrédients. Le mélange Bric contient 40 g d'arachides, 10 g de raisins et 10 g de noix de cajou. Le mélange Brac contient 25 g d'arachides, 20 g de raisins et 15 g de noix de cajou. Le mélange Broc contient 20 g d'arachides, 20 g de raisins et 20 g de noix de cajou. En tenant compte de ces modifications, calculer la matrice des coûts et la matrice des prix pour que le marchand conserve sa marge de profit.
g) Le marchand décide de ne produire hebdomadairement que 100 sachets de chacun de ces nouveaux mélanges. Quelle quantité de chaque ingrédient doit-il désormais commander chaque semaine?

12. Une usine de meubles étudie la possibilité de fabriquer trois modèles de bureaux : Colonial, Espagnol et Canadien. La fabrication de chacun de ces modèles nécessitera des quantités différentes de bois, de contreplaqué et d'aggloméré. Pour fabriquer un bureau du modèle Colonial, il faut 12 m de bois pour les montants, 1,5 m^2 de contreplaqué et 1,8 m^2 d'aggloméré. Pour fabriquer un bureau du modèle Espagnol, il faut 16 m de bois, 2,5 m^2 de contreplaqué et 1,6 m^2 d'aggloméré. Pour fabriquer un bureau du modèle Canadien, il faut 14 m de bois en longueur, 1,5 m^2 de contreplaqué et 2,2 m^2 d'aggloméré.
a) L'entreprise envisage la possibilité de produire mensuellement 12 bureaux de style Colonial, 14 de style Espagnol et 20 de style Canadien. Quelles quantités de matériaux doit-elle commander mensuellement pour atteindre son objectif de production?
b) Le coût des matériaux est de 4,50 $ le mètre linéaire pour le bois, de 32,50 $/$m^2$ pour le contreplaqué et de 22,50 $/$m^2$ pour l'aggloméré. Déterminer la matrice des coûts de fabrication en matières premières de chaque style de bureau.
c) Pour fabriquer un bureau de style Colonial, il faut 6 heures de travail. La fabrication d'un bureau de style Espagnol en demande 5 et la fabrication d'un bureau de style Canadien, 4. Sachant que le salaire horaire est de 13,25 $, déterminer la matrice des coûts de main-d'œuvre.
d) Déterminer la matrice des coûts de production pour un bureau de chaque modèle.
e) Le manufacturier veut réaliser un profit équivalant à 50 % des coûts de production sur ces bureaux. Calculer la matrice des prix du manufacturier.
f) Les meubles sont vendus dans des magasins qui prennent un profit de 40 %. Calculer la matrice des prix en magasin.
g) Le gérant de la compagnie de bois informe le manufacturier qu'il ne peut pas honorer sa commande, car il a déjà des contrats avec d'autres clients. Il propose alors de livrer chaque mois les quantités disponibles. La livraison du premier mois est constituée de 332 mètres linéaires de bois, de 44 mètres carrés de contreplaqué et de 44 mètres carrés d'aggloméré. Combien de bureaux de chaque modèle est-il possible de produire avec ces matériaux?

h) La livraison du deuxième mois est constituée de 612 mètres de bois, de 76 mètres carrés de contreplaqué et de 86 mètres carrés d'aggloméré. Combien de bureaux de chaque modèle est-il possible de produire avec ces matériaux?

13. Une compagnie qui produit les pièces des lampes de divers modèles fait appel à un sous-traitant pour émailler les pièces, les assembler et ajouter les composantes électriques. Pour la pose et la cuisson de l'émail, il faut 15 min pour le modèle M_1, 11 min pour le modèle M_2 et 8 min pour le modèle M_3. L'assemblage des pièces du modèle M_1 nécessite 12 min de travail, celles de M_2 8 min et celles de M_3 10 min. Pour l'installation des composantes électriques, il faut compter 10 min pour le modèle M_1, 9 min pour M_2 et 11 min pour M_3.

Deux sous-traitants disposent des installations pour compléter la production.

Le premier sous-traitant a établi qu'en utilisant toutes ses ressources, le temps libre aux différents postes de son atelier d'émaillage totalise mensuellement 1 179 min. À l'atelier d'assemblage, il dispose de 1 022 min par mois et à l'atelier de câblage électrique, de 1 030 min.

Le deuxième sous-traitant a établi que le temps libre aux différents postes de son atelier d'émaillage totalise mensuellement 1 072 min. À l'atelier d'assemblage, il dispose de 994 min par mois et à l'atelier de câblage électrique, de 1 023 min.

a) Structurer l'information dans un tableau.
b) Déterminer, pour chaque sous-traitant, la matrice augmentée à l'aide de laquelle on peut calculer le nombre de lampes de chaque modèle qu'il peut produire mensuellement.
c) En appliquant la méthode de gauss-Jordan, déterminer le nombre de lampes de chaque modèle que chacun des sous-traitants peut produire mensuellement.
d) Pour le premier sous-traitant, le coût d'opération (électricité, salaires, etc) est de 0,37 $/min à l'atelier d'émaillage, 0,62 $/min à l'atelier d'assemblage et de 0,71 $/min à l'atelier de câblage. Déterminer le coût de sous-traitance par modèle de lampe.
e) Déterminer le coût mensuel pour la production de ce sous-traitant.
f) Pour le second sous-traitant, le coût d'opération (électricité, salaires, etc) est de 0,45 $/min à l'atelier d'émaillage, 0,60 $/min à l'atelier d'assemblage et de 0,63 $/min à l'atelier de câblage. Déterminer le coût de sous-traitance par modèle de lampe.
g) Déterminer le coût mensuel pour la production de ce sous-traitant.

14. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer s'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A \bullet B$ donne la matrice identité d'ordre 2 et donner cette matrice, le cas échéant.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

15. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer s'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que $A \bullet B$ donne la matrice identité d'ordre 3 et donner cette matrice, le cas échéant.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

16. Un théorème de la géométrie plane s'énonce comme suit : « Par trois points non alignés passe une circonférence et une seule. » Par ailleurs, l'équation générale d'un cercle en géométrie analytique est :

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Utiliser ces informations pour déterminer l'équation du cercle passant par les points donnés.

a) (1; 3), (3; 4) et (2; 6)
b) (2; 4) (4; –1) et (4; 8)