Modèle de Leontief

L'économiste américain d'origine russe Wassily Leontief a reçu, en 1973, le prix Nobel de sciences économiques pour ses travaux de modélisation mathématique des échanges interindustriels. Il s'est intéressé en particulier à la question suivante : dans une économie constituée de n industries interreliées, quelle doit être la production de celles-ci pour répondre exactement à la demande en tenant compte du fait que la production nécessite la consommation de biens, énergie, matériaux, etc ? Pour apporter des éléments de réponse à cette question, il a divisé l'économie en divers secteurs et, à l'aide de compilations statistiques, il a développé une méthode d'analyse de ces données.

Leontief01

Économie ouverte

On peut décrire la démarche de Leontief de façon symbolique pour développer une méthode de résolution générale. Soit :

P : la matrice de la production totale

Q : la matrice des contraintes de la production (demande interne)

D : la matrice de la demande externe

On a alors :

$P = Q \bullet P + D$, production = demande interne + demande externe, d'où :

$P - Q \bullet P = D$, par les propriétés des opérations;

$I \bullet P - Q \bullet P = D$, puisque I est la matrice identité;

$(I - Q) \bullet P = D$, par les propriétés des opérations.

On peut donc établir directement la matrice associée au système d'équations à résoudre, c'est la matrice $I - Q$. On obtient la matrice augmentée en ajoutant la colonne D à la matrice associée.

EXEMPLE 1

Une entreprise compte trois secteurs spécialisés dans la production d'une forme d'énergie : le mazout (M), le gaz naturel (G) et l'électricité (E). Les échanges entre les secteurs d'activité permettent de satisfaire aux besoins énergétiques de chacun. Pour produire une unité de mazout, il faut 0,2 unité de gaz naturel et 0,2 unité d'électricité; pour produire une unité de gaz naturel, il faut 0,2 unité de mazout, 0,1 unité de gaz naturel et 0,3 unité d'électricité; pour produire une unité d'électricité, il faut 0,1 unité de mazout, 0,2 unité de gaz naturel et 0,1 unité d'électricité.

Leontief02

a) Représenter sous forme matricielle les besoins de consommation d'énergie liés à la production de chaque type d'énergie.

b) Le carnet de commandes de l'entreprise (demande externe) pour le mois de juin est de 450 unités de mazout, 400 unités de gaz naturel et 430 unités d'électricité. Déterminer la production permettant de répondre aux besoins de la production et à la demande externe.

Solution

a) En représentant les données dans un tableau, on obtient :

$$\begin{array}{cc|ccc} & & \multicolumn{3}{c}{\text{Production d'une unité}} \\ & & U_1 & U_2 & U_3 \\ \hline \multirow{3}{*}{\text{Besoins}} & U_1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ & U_2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ & U_3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{array}$$

qui donne la matrice de la consommation interne que nous noterons $Q = (q_{ij})$, où l'élément q_{ij} représente le nombre d'unités du secteur i nécessaires pour produire une unité du secteur j. Ainsi, la première colonne indique que, pour produire une unité de mazout, il faut consommer 0,2 unité de gaz naturel et 0,2 unité d'électricité.

b) La matrice de production est $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$, où p_j est le nombre total d'unités qu'il faut produire dans chaque secteur : mazout, gaz et électricité. Pour répondre à la demande externe tout en satisfaisant à ses propres besoins, l'entreprise doit s'assurer que $(I-Q) \bullet P = D$ où :

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}9 \end{bmatrix}$$

On a donc : $\begin{bmatrix} 1 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}9 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 400 \\ 430 \end{bmatrix}$

En résolvant ce système d'équations, on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}2 & -0{,}1 & 450 \\ -0{,}2 & 0{,}9 & -0{,}2 & 400 \\ -0{,}2 & -0{,}3 & 0{,}9 & 430 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} 10L_1 \\ 10L_2 \\ 10L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{10} & -2 & -1 & 4\,500 \\ -2 & 9 & -2 & 4\,000 \\ -2 & -3 & 9 & 4\,300 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1 \\ 5L_2 + L_1 \\ 5L_3 + L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -2 & -1 & 4\,500 \\ 0 & \boxed{43} & -11 & 24\,500 \\ 0 & -17 & 44 & 26\,000 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{c} 43L_1 + 2L_2 \\ L_2 \\ 43L_3 + 17L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 430 & 0 & -65 & 242\,500 \\ 0 & 43 & -11 & 24\,500 \\ 0 & 0 & 1\,705 & 1\,534\,500 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3/1\,705 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 430 & 0 & -65 & 242\,500 \\ 0 & 43 & -11 & 24\,500 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 900 \end{array}\right]$$

$$\approx \begin{array}{c} L_1 + 65L_3 \\ L_2 + 11L_2 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 430 & 0 & 0 & 301\,000 \\ 0 & 43 & 0 & 34\,400 \\ 0 & 0 & 1 & 900 \end{array}\right] \approx \begin{array}{c} L_1/430 \\ L_2/43 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 900 \end{array}\right]$$

Il faut produire 700 unités de mazout, 800 unités de gaz naturel et 900 unités d'électricité pour répondre aux besoins de la production et à la demande externe.

Modèle de Leontief (économie ouverte)

Un **modèle de Leontief** est un **modèle économique ouvert** constitué de n industries interdépendantes, chacune produisant pour répondre :

- à ses besoins et aux besoins des $(n - 1)$ autres industries, ce qui constitue la demande interne;
- aux besoins des clients, ce qui constitue la demande externe.

Les échanges entre les industries sont décrits dans une matrice Q appelée « matrice des contraintes de production ». On désigne par :

- P la matrice de production et D celle de la demande externe ;
- p_j la production de l'industrie j ;
- q_{ij} le nombre d'unités de la production de l'industrie i nécessaire pour produire 1 unité de la production de l'industrie j ;
- $q_{ij}\,p_j$ la quantité de la production de l'industrie i consommée par l'industrie j ;
- d_i la demande externe adressée à l'industrie i : c'est la portion de la production qui excède la demande interne.

Leontief03

REMARQUE

On se sert du modèle de Leontief pour analyser l'économie d'une région, d'un secteur d'activité ou d'une entreprise qui a différents secteurs qui s'échangent des biens ou des services. Il est souvent utile de pouvoir chiffrer ces échanges en dollars. On construit alors un modèle économique de Leontief en remplaçant les unités de biens échangés par leur valeur en dollars.

Économie fermée

Leontief04

Dans la situation présentée dans l'exemple 1, la demande du secteur externe constituait une finalité. Elle n'était pas incluse dans le modèle, car elle n'était pas considérée comme un produit intermédiaire visant à satisfaire un besoin d'un des secteurs de l'économie. C'est une économie décrite par un **modèle de Leontief ouvert** .

Lorsque le secteur externe est inclus dans le modèle comme une industrie supplémentaire, on a un **modèle de Leontief fermé**. Tous les biens sont alors considérés comme des produits intermédiaires, car ils sont tous produits pour satisfaire aux besoins des $(n + 1)$ secteurs du modèle. La proportion de la production consommée par ce secteur supplémentaire est alors la portion non consommée par les autres industries.

EXEMPLE 2

L'économie d'une région repose principalement sur trois secteurs : l'agriculture (S_1), la construction (S_2) et l'industrie (S_3). La matrice des échanges entre ces secteurs est :

Production d'une unité ($)

$$\text{Besoins}\quad \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}10 \end{bmatrix} \end{array}$$

où les éléments sont exprimés en dollars. Les autres activités économiques de la région sont les services, la distribution et la consommation, regroupées en un secteur (S_0). On estime que l'équivalent d'un dollar des biens et des services produits par ce secteur nécessite l'utilisation de 0,25 $ des produits de S_1, 0,15 $ des produits de S_2 et 0,20 $ des produits de S_3.

a) En supposant qu'il n'y a ni importation ni exportation, tous les biens et services produits dans la région sont consommés dans la région et réciproquement. Construire la matrice du modèle économique fermé de cette situation.

b) Déterminer les conditions d'équilibre de cette économie.

Solution

a) Pour construire la matrice de consommation, il faut ajouter une ligne et une colonne à la matrice des échanges intersecteurs. Nous noterons S_0 ce nouveau secteur.

La consommation étant considérée comme une activité économique, tout ce qui n'est pas consommé par l'un des secteurs S_1, S_2 ou S_3 est consommé par le secteur S_0, et c'est la contribution de ce secteur à l'activité économique.

Ainsi, dans la matrice des échanges donnée ci-dessus, pour produire 1 \$ de biens du secteur S_1, on utilise 0,20 \$ des produits du secteur S_1, 0,05 \$ des produits du secteur S_2 et 0,10 \$ des produits du secteur S_3, pour un total de 0,35 \$. Le secteur S_1 utilise donc 0,65 \$ des activités du secteur S_0. (De la même façon, pour les autre secteurs, la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1.)

Par ailleurs, les biens et services produits par le secteur S_0 nécessitent l'utilisation de 0,25 \$ des produits de S_1, 0,15 \$ des produits de S_2 et 0,20 \$ des produits de S_3, ce qui donne une somme de 0,60 \$. Le secteur S_0 utilise donc 0,40 \$ des activités de S_0. La matrice du modèle économique fermé est ainsi :

Production d'une unité (\$)

$$\text{Besoins}\quad \begin{array}{c} \\ S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0{,}65 & 0{,}65 & 0{,}65 \\ 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}10 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Soit R, la matrice de production. Puisqu'il n'y a plus de demande externe, le système est en équilibre lorsque :

$$\begin{aligned} R &= Q \bullet R \\ R - Q \bullet R &= 0 \\ I \bullet R - Q \bullet R &= 0 \\ (I - Q) \bullet R &= 0 \end{aligned}$$

On a donc un système d'équations linéaires homogène. Dans cette situation, la matrice est :

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}40 & 0{,}65 & 0{,}65 & 0{,}65 \\ 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}60 & -0{,}65 & -0{,}65 & -0{,}65 \\ -0{,}25 & 0{,}80 & -0{,}20 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & -0{,}05 & 0{,}90 & -0{,}10 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & -0{,}05 & 0{,}90 \end{bmatrix}$$

Le système à résoudre est :

$$\begin{bmatrix} 0{,}60 & -0{,}65 & -0{,}65 & -0{,}65 \\ -0{,}25 & 0{,}80 & -0{,}20 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & -0{,}05 & 0{,}90 & -0{,}10 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & -0{,}05 & 0{,}90 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour appliquer la méthode de Gauss-Jordan, il n'est pas utile de conserver une colonne de 0, on a:

$$\begin{bmatrix} 0{,}60 & -0{,}65 & -0{,}65 & -0{,}65 \\ -0{,}25 & 0{,}80 & -0{,}20 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & -0{,}05 & 0{,}90 & -0{,}10 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & -0{,}05 & 0{,}90 \end{bmatrix} \approx \begin{array}{l} 100L_1 \\ 100L_2 \\ 100L_3 \\ 100L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 60 & -65 & -65 & -65 \\ -25 & 80 & -20 & -15 \\ -15 & -5 & 90 & -10 \\ -20 & -10 & -5 & 90 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1 \\ 12L_2+5L_1 \\ 4L_3+L_1 \\ 3L_4+L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 60 & -65 & -65 & -65 \\ 0 & 635 & -565 & -505 \\ 0 & -85 & 295 & -105 \\ 0 & -95 & -80 & 205 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/5 \\ L_2/5 \\ L_3/5 \\ L_4/5 \end{array} \begin{bmatrix} 12 & -13 & -13 & -13 \\ 0 & 127 & -113 & -101 \\ 0 & -17 & 59 & -21 \\ 0 & -19 & -16 & 41 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} 127L_1+13L_2 \\ L_2 \\ 127L_3+17L_2 \\ 127L_4+19L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1\,524 & 0 & -3\,120 & -2\,964 \\ 0 & 127 & -113 & -101 \\ 0 & 0 & 5\,572 & -4\,384 \\ 0 & 0 & -4\,179 & 3\,288 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/12 \\ L_2 \\ L_3/4 \\ L_4/3 \end{array} \begin{bmatrix} 127 & 0 & -260 & -247 \\ 0 & 127 & -113 & -101 \\ 0 & 0 & 1\,393 & -1\,096 \\ 0 & 0 & -1\,393 & 1\,096 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} 1\,393L_1+260L_3 \\ 1\,393L_2+113L_3 \\ L_3 \\ L_4+L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 176\,911 & 0 & 0 & -629\,031 \\ 0 & 176\,911 & 0 & -264\,541 \\ 0 & 0 & 1\,393 & -1\,096 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} L_1/176\,911 \\ L_2/176\,911 \\ L_3/1\,393 \\ L_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3{,}56 \\ 0 & 1 & 0 & -1{,}50 \\ 0 & 0 & 1 & -0{,}79 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La variable p_3 est libre, on la représente par le paramètre t. Puisqu'il s'agit d'un système d'équation homogène, la troisième ligne représente l'équation $p_2 - 0{,}79t = 0$, d'où $p_2 = 0{,}79t$. On procède de la même façon pour les autres variables et on obtient l'ensemble solution:

$$\{(p_0;\, p_1;\, p_2;\, p_3) \mid p_0 = 3{,}56t,\ p_1 = 1{,}50t,\ p_2 = 0{,}79t,\ p_3 = t\}$$

Ainsi, si la valeur de la production dans le secteur industriel (S_3) est de 100 000 $, celle du secteur de la construction (S_2) est de 79 000 $; de 150 000 $ dans le secteur agricole (S_1), 356 000 $ dans celui des autres activités économiques (S_0).

Modèle de Leontief (économie fermée)

Un **modèle de Leontief** représente une **économie fermée** lorsque la matrice des contraintes de production satisfait aux conditions suivantes :

- $0 \leq q_{ij} \leq 1$ pour tout i et tout j;
- la somme des éléments d'une colonne quelconque est égale à 1.

PROCÉDURE

Conditions d'équilibre d'une économie fermée (modèle de Leontief)

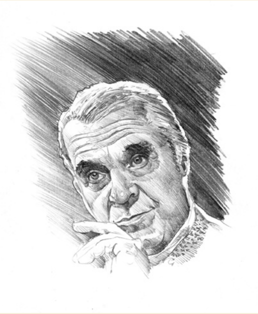
1. Construire le tableau des échanges en ajoutant un secteur supplémentaire.
2. Utiliser l'information sur les produits consommés par ce nouveau secteur pour déterminer les éléments de chacune des lignes de la colonne supplémentaire.
3. Compléter le tableau en s'assurant que la somme des éléments de chacune des colonnes est 1.
4. Déterminer la matrice $I - Q$ et échelonner la matrice augmentée du système d'équations $I - Q = 0$.

Note historique

WASSILY LEONTIEF

1906-1999

Wassily Leontief était un économiste d'origine russe. Il est né à Saint-Pétersbourg en 1906 et est mort à New York en 1999. Il a étudié à l'Université de Leningrad (aujourd'hui l'Université d'État de Saint-Pétersbourg) où il a obtenu une maîtrise à 19 ans. Puisqu'il s'opposait au communisme, il s'est fait arrêter plusieurs fois avant d'être autorisé à quitter le pays. Il a ensuite étudié à l'Université Humboldt (1925-1928) qui lui a décerné un doctorat.



Leontief a immigré aux États-Unis en 1931. Il a travaillé pour le National Bureau of Economic Research et a enseigné à l'Université Harvard de 1931 à 1975. En 1948, il a fondé le *Harvard Economic Research Project* sur la structure de l'économie américaine qu'il a été dirigé de 1948 à 1975. Il a ensuite occupé le poste de professeur d'économie à l'Université de New York de 1975 jusqu'à sa mort. En 1978, il a été nommé directeur de l'Institute for Economic Analysis.

À partir de 1949, Leontief a entrepris de modéliser les données fournies par le *Bureau of Labor Statistics* en utilisant les premiers ordinateurs disponibles à Harvard. Dans sa recherche, il a divisé l'économie américaine en 500 secteurs, chaque secteur étant représenté par une équation linéaire. En 1973, il a reçu le prix Nobel d'économie pour ses travaux sur l'analyse entrée-sortie (*input-output*) servant à décrire les systèmes économiques à partir de ce qui est utilisé pour la production et de ce qui en résulte, et ce, en tenant compte du fait que la production nécessite la consommation de certains biens. Le modèle d'analyse conçu par Leontief consiste à construire une matrice dont les éléments sont les biens que les industries achètent (intrants) et vendent (sortants). En y ajoutant les gouvernements, les consommateurs et les pays étrangers, on obtient une représentation globale des biens et services d'une économie nationale. Cette méthode d'analyse économique est employée sous différentes formes dans plusieurs pays industrialisés pour planifier et prévoir la croissance économique. Leontief a également contribué au développement de la programmation linéaire pour résoudre des problèmes économiques complexes.

En 1975, il s'est joint à la New York University où il a fondé et dirigé le *Center for Economic Analysis*.

Exercices

1. Une entreprise compte trois secteurs d'activité répartis dans trois usines, notées U_1, U_2 et U_3. La fabrication d'une unité des produits de la première usine nécessite 0,1 unité des produits de U_1, 0,1 unité des produits de U_2 et 0,2 unité des produits de U_3. La fabrication d'une unité des produits de la seconde usine nécessite 0,2 unité des produits de U_1, 0,4 unité des produits de U_2 et 0,3 unité des produits de U_3. La fabrication d'une unité des produits de la troisième usine nécessite 0,2 unité des produits de U_1, 0,2 unité des produits de U_2 et 0,1 unité des produits de U_3.
   a) Construire la matrice de consommation interusine (contraintes de production).
   b) La demande externe pour le prochain mois est de 90 unités des produits de U_1, 110 unités des produits de U_2 et 270 unités des produits de U_3. Déterminer la production permettant de répondre aux besoins.
   c) Les matrices de production des deux derniers mois sont $\begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 200 \\ 250 \\ 600 \end{bmatrix}$.

   Quelle était la demande externe pour ces deux mois?

2. Trois entreprises C_1, C_2 et C_3 décident de s'associer pour diminuer les coûts en s'approvisionnant entre elles. La matrice des contraintes de production Q donne la production interne nécessaire pour satisfaire aux besoins de chaque entreprise.

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

   a) Quelle est la production nécessaire pour satisfaire à une demande externe de 115 unités de produits de la compagnie C_1, de 109 unités de produits de la compagnie C_2 et de 135 unités de produits de la compagnie C_3?
   b) Quelle est la production nécessaire pour satisfaire à une demande externe de 217 unités de produits de la compagnie C_1, de 129 unités de produits de la compagnie C_2 et de 63 unités de produits de la compagnie C_3?

3. Une entreprise administre trois usines. La matrice de consommation des échanges interusines est :

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}0 \end{bmatrix}$$

   L'entrée q_{ij} indique la valeur en dollars des produits de l'usine U_i nécessaires pour fabriquer chaque dollar de produits de l'usine U_j.
   a) Déterminer la valeur, en millions de dollars, de la production de chaque usine qui permet de répondre à une demande externe de 160 M\$ des produits de l'usine U_1, de 160 M\$ des produits de U_2 et de 240 M\$ des produits de U_3.
   b) Si la valeur de la production est de 400 M\$ pour les produits de l'usine U_1, de 400 M\$ pour les produits de U_2 et de 800 M\$ pour les produits de U_3, quelle est la valeur, en millions de dollars, de la demande externe?
   c) Comment expliquer le fait que la production des usines U_1 et U_2 est la même en **a** et **b** alors que la demande externe est plus faible en **b** ?

4. Trois usines se fournissent l'une l'autre des biens, la matrice des échanges interusines est :

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}0 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

   L'entrée q_{ij} indique la valeur en dollars des produits de l'usine U_i nécessaires pour fabriquer chaque dollar de produits de l'usine U_j.
   a) Déterminer la valeur, en millions de dollars, de la production de chaque industrie pour répondre à une demande externe de 203 M\$ des produits de U_1, de 161 M\$ des produits de U_2 et de 114 M\$ des produits de U_3.
   b) Si la valeur de la production est de 200 M\$ pour les produits de U_1, de 400 M\$ pour ceux de U_2 et de 300 M\$ pour ceux de U_3, quelle est la valeur de la demande externe?

5. Un économiste a regroupé dans le tableau suivant les statistiques de la dernière année touchant trois secteurs interdépendants

Statistiques annuelles de production				
		S_1	S_2	S_3
Coût des services reçus(M $)	S_1	5,0	3,0	8,0
	S_2	2,5	6,0	5,0
	S_3	4,0	1,2	4,0
Production annuelle totale (M $)		50,0	24,0	40,0

a) Déterminer la matrice des contraintes de production.

b) En supposant que le marché était en équilibre durant l'année écoulée, quelle a été la demande externe pour ces secteurs ?

c) Les gestionnaires de ces secteurs industriels songent à augmenter leur production annuelle à 60 M$ pour les produits de S_1, à 30 M$ pour les produits de S_2 et à 50 M$ pour les produits de S_3. Calculer l'augmentation de l'offre qui sera faite aux consommateurs si les gestionnaires mettent cette idée en œuvre. Traduire cette augmentation en pourcentage. Quelle doit être la réaction des consommateurs pour que le marché reste à l'équilibre ?

d) Les organismes de prévision économique, en se basant sur la croissance annuelle des salaires, prévoit une augmentation de 5 % de la consommation pour la prochaine année. Si cette prévision s'avère exacte, quelle sera la demande annuelle pour les biens de chacun des trois secteurs ?

e) En supposant que la prévision d'augmentation de la consommation s'avère exacte, comment doit-on procéder pour déterminer quelle devrait être la production annuelle dans ces secteurs ?

Réponses

1. a) $\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 150 \\ 170 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 425 \end{bmatrix}$

   b) $P = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$

2. a) $P = \begin{bmatrix} 350 \\ 280 \\ 360 \end{bmatrix}$ b) $P = \begin{bmatrix} 450 \\ 300 \\ 320 \end{bmatrix}$

3. a) 400 M$ de produits de U_1, 400 M$ de produits de U_2 et 400 M$ de produits de U_3.

   b) 40 M$ de produits de U_1, de 40 M$ de produits de U_2 et de 640 M$ de produits de U_3.

   c) La demande externe est plus faible en **b**, mais l'usine U_3 a consommé une plus grande partie de la production totale des usines U_1 et U_2, ce qui explique le fait que la production soit restée la même en **a** et en **b**.

4. a) $P = \begin{bmatrix} 320 \\ 310 \\ 230 \end{bmatrix}$ b) $D = \begin{bmatrix} 70 \\ 250 \\ 150 \end{bmatrix}$

5. a) $\begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 0{,}1 & 0{,}125 & 0{,}2 \\ S_2 & 0{,}05 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ S_3 & 0{,}08 & 0{,}05 & 0{,}1 \end{array}$

   b) $D = \begin{bmatrix} 34 \\ 10{,}5 \\ 30{,}8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 35{,}7 \\ 11{,}025 \\ 32{,}34 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 18{,}38\% \\ 26{,}19\% \\ 25{,}65\% \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 52{,}5 \\ 25{,}2 \\ 42{,}0 \end{bmatrix}$