La notion d'ensemble est devenue un objet d'études en mathématiques grâce à Georg Cantor. Cette notion, qui a permis de définir sur une base commune plusieurs des notions mathématiques, était cependant présente de façon intuitive dans les travaux de plusieurs prédécesseurs de Cantor

Intuitivement, on peut facilement reconnaître des ensembles dans le monde qui nous entoure. Une équipe de hockey, les citoyens d'une ville ou d'un pays, les habitants de la Terre, sont des ensembles, un troupeau de moutons, une volée d'oies blanches aussi. Ce n'est qu'au XIXe siècle que cette notion a été reconnue comme objet d'études en mathématiques. Depuis, la théorie des ensembles a permis l'unification des diverses branches des mathématiques et de la logique en leur donnant un fondement commun. À partir des notions d'ensemble, d'appartenance et d'inclusion, la théorie des ensembles a permis de redéfinir sur une base commune les notions de relation, de fonction, d'entier naturel, rationnels, réels, complexes, algébriques et transcendants.

Même si elle a toujours été intuitivement présente dans le paysage mathématique, la notion d'ensemble n'a été étudiée que tardivement et les résultats de ces travaux n'ont pas été adoptés d'emblée par les mathématiciens. Cette réticence s'explique par le fait qu'en adoptant la notion d'ensemble, on est inévitablement confronté à l'infini et à divers paradoxes.

L'infini est un concept délicat à manipuler comme Zénon d'Élée l'a montré avec ses paradoxes (NH Zénon01, Zénon02, Zénon02). Un siècle plus tard, Aristote (NH Aristote01, Aristote02) considérait que tout être est à la fois en **puissance** et en **acte**. Ainsi, un enfant est un adulte en puissance et parvenu à l'âge adulte, cette potentialité s'est actualisée, mais l'adulte reste un être en puissance, il deviendra mathématicien, philosophe, homme d'état, artisan, ... Il en est de même d'un bloc de marbre qu'un sculpteur s'apprête à travailler. C'est une sculpture en **puissance**, sculpture qui pourrait représenter un homme, une femme, un animal ou la colonne d'un temple. Lorsque le sculpteur a complété son œuvre, c'est une sculpture en acte, la sculpture n'est plus en puissance, elle est actualisée.

Pour Aristote, cette caractéristique des êtres et des objets ne s'applique pas à l'infini qui ne peut être en acte puisqu'il est toujours en devenir. Ainsi, en partant de 1 et en additionnant successivement 1, on obtient toujours un nombre naturel et ce processus est sans fin. Pour Aristote, il s'agit donc d'un infini potentiel qui ne peut être actualisé, c'est-à-dire un processus qui est toujours en devenir. Le mathématicien peut, par la pensée, concevoir qu'en additionnant successivement, il obtiendrait une infinité de nombres naturels, mais en pratique, il n'utilise qu'une partie finie de ces nombres. Par la pensée, il peut concevoir qu'une droite se prolonge à l'infini, mais en pratique, il n'en trace qu'un segment.

En décrétant que seul l'infini potentiel peut exister, Aristote a contribué à bannir la notion d'ensemble du paysage mathématique. Ce n'est pas le seul facteur ayant contribué à ce bannissement.

En considérant les nombres naturels comme un ensemble, on définit un objet comportant un nombre infini d'éléments et on est automatiquement confronté à des paradoxes, ce qui a contribué à la méfiance des mathématiciens envers les ensembles. Plusieurs paradoxes découlent du transfert à un ensemble infini d'un axiome d'Euclide qui est intuitivement vrai dans les ensembles finis :

« Le tout est plus grand que la partie. »

En 1638, Galilée (NH Galilée01) a relevé un paradoxe de l'infini. Il fait d'abord remarquer que les entiers naturels sont intuitivement plus nombreux que leurs carrés. Cependant, à tout nombre entier naturel on peut faire correspondre un et un seul nombre carré et, à tout nombre carré, on peut faire correspondre un et un seul entier naturel. Il semble donc qu'il y ait autant de nombres naturels carrés que de nombres naturels. Ce qui signifie qu'il est possible de définir une bijection entre l'ensemble des nombres naturels et des carrés de nombres naturels.

Les premiers travaux sur les ensembles et l'infini sont dus à Bernard Bolzano (1781-1848) qui s'interrogeait sur les fondements des mathématiques, mais ces travaux ont été en grande partie méconnus de son vivant (NH Bolzano01, Bolzano02).

C'est grâce aux travaux de Richard Dedekind (1831-1916) (NH Dedekind) et surtout à ceux de Georg Cantor (1845-1918) (NH Cantor01, Cantor02) que la théorie des ensembles s'est véritablement imposée comme objet d'étude en mathématiques.

Il a d'abord fallu préciser ce que l'on entend par « ensemble infini ». C'est un ensemble qui peut être mis en bijection avec un de ses sous-ensembles. Ainsi définie, l'ensemble infini n'est plus soumis à l'axiome d'Euclide cité plus haut. En exploitant cette définition, Cantor a montré qu'il existe plusieurs types d'infinis. L'ensemble des nombres naturels est un infini dénombrable et tout ensemble infini qui peut être mis en bijection avec l'ensemble des nombres naturels est aussi un ensemble infini dénombrable. Cantor démontre que c'est le cas des nombres rationnels qui constituent un infini dénombrable. Cantor démontre également que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.

Un paradoxe souligne une incohérence entre la théorie et la réalité ou la perception qu'on a de celle-ci. L'axiome du tout et de la partie est intuitivement valide pour les ensembles finis. C'est en considérant que cet axiome s'étend automatiquement aux ensembles infinis que les paradoxes apparaissent. En définissant qu'un ensemble infini peut être mis en bijection avec une de ses parties propres, on a implicitement reconnu que ce qui est valide pour le fini ne l'est pas nécessairement pour l'infini.