5

DÉRIVÉE : FONCTIONS COMPOSÉES

Résoudre des problèmes faisant appel à la dérivée d'une fonction composée.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :

- l'application de la procédure de dérivation en chaîne;
- l'analyse de situations modélisées par une fonction composée;
- l'utilisation de la dérivation en chaîne dans la résolution de problèmes.
- l'application de la procédure de dérivation implicite pour déterminer le lien entre des taux de variation;
- l'utilisation du lien entre les taux de variation dans l'analyse de la situation.

OBJECTIFS

5.1 Utiliser les propriétés de l'opérateur de dérivation pour dériver des fonctions composées.

5.2 Résoudre des problèmes faisant appel à la dérivée de fonctions composées.

5.3 Résoudre des problèmes nécessitant la dérivation implicite d'une relation.

5.4 Appliquer la procédure de dérivation implicite pour résoudre des problèmes de taux liés.

5.1 Dérivation en chaîne

Cette première section est consacrée à la procédure d'utilisation de l'opérateur de dérivation à des fonctions composées. Pour manipuler des fonctions composées, on les ramène à des formes simples que l'on peut dériver facilement. La technique pour dériver une fonction composée, appelée **dérivation en chaîne**, est simplement une généralisation des dérivées des fonctions que nous avons déjà présentées. Il suffit, pour dériver une fonction composée de reconnaître les formes usuelles servant à définir la règle de correspondance de la fonction.

DerivCompose_01

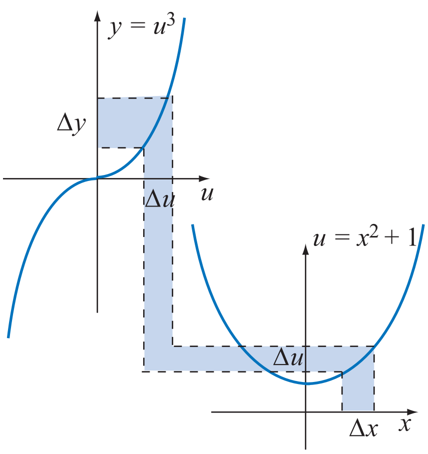
Dérivée d'une fonction composée

Considérons la fonction définie par :

$$y = (x^2 + 1)^3.$$

En posant $u = x^2 + 1$, on a $y = u^3$. La règle de correspondance définissant la fonction $y = f(x)$ est constitué de deux fonctions. Une **fonction extérieure** décrite symboliquement par $y = u^3$ et une **fonction intérieure** décrite par $u = x^2 + 1$. Dans la figure, sont représentées les deux fonctions dont la composition donne la fonction composée définie par :

$$y = (x^2 + 1)^3.$$



Cette figure illustre le fait qu'à une variation Δx correspond une variation Δu de la fonction $u = x^2 + 1$. De même, à une variation Δu correspond une variation Δy de la fonction par $y = u^3$.

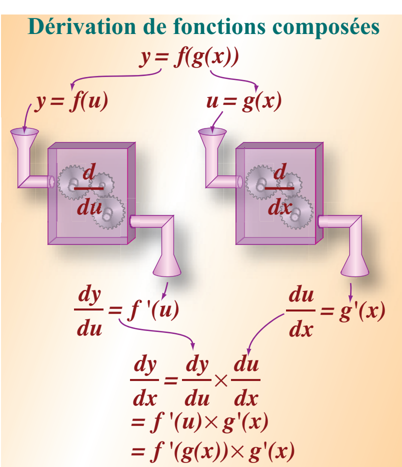
On souhaite déterminer la dérivée de y par rapport à x, soit $\dfrac{dy}{dx}$. Par définition, la dérivée de la fonction f est :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Cependant, on a : $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

par conséquent : $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \right),$$

d'où : $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$



Puisque la fonction $u = g(x)$ est dérivable, Δu tend vers 0 lorsque Δx tend vers 0. On a donc :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

En appliquant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}(u^3) = 3u^2 \text{ et } \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x.$$

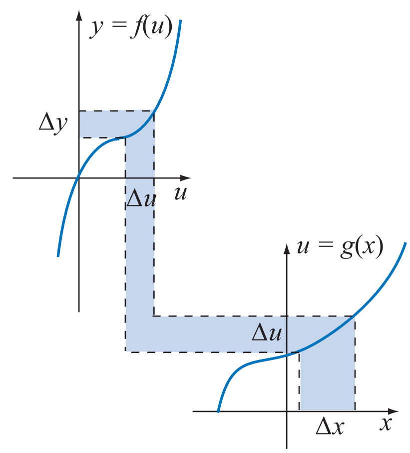
En substituant dans $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$, on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \times 2x = 3\left(x^2+1\right)^2 2x = 6x(x^2+1)^2.$$

Cet exemple illustre le fondement de la procédure pour dériver une fonction composée.

De façon plus générale, considérons f, une fonction dérivable définie par $y = f(u)$, et u une fonction dérivable de x définie par $u = g(x)$. Considérons de plus un couple $(x; g(x))$ quelconque de la fonction g et un accroissement Δx de la variable x. Il en résulte un accroissement Δu de la variable u et par le fait même un accroissement Δy de la variable y. On a alors :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$



Puisque les deux fonctions sont dérivables, on a :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}.$$

or, Δu tend vers 0 lorsque Δx tend vers 0. On a donc :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

Cela donne le théorème suivant.

THÉORÈME

Fonction composée

Soit f, une fonction dérivable définie par $y = f(u)$, où u est une fonction dérivable définie par $u = g(x)$. Alors, la dérivée de f par rapport à x est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

REMARQUE

On peut également exprimer l'énoncé de ce théorème en utilisant la notation des fonctions, cela donne :

La dérivée de $y = f(g(x))$ est :

$y' = [f(g(x))]' = f'(g(x))\, g'(x)$.

PROCÉDURE

Dérivation d'une fonction composée

1. Identifier $y = f(u)$, la fonction élémentaire extérieure.
2. Dériver cette forme usuelle simple par rapport à u (dy/du).
2. Identifier l'expression à laquelle on doit substituer u pour retrouver la forme usuelle simple.
4. Dériver la fonction u par rapport à la variable indépendante. (du/dx ou du/dt)
5. Effectuer le produit $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$ ou $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{du} \times \dfrac{du}{dt}$.
6. Remplacer u dans ce produit par l'expression ayant servi au changement de variable.

DerivCompose_02

EXEMPLE 5.1.1

Dériver les fonctions composées suivantes.

a) $f(x) = e^{2x}$
b) $f(x) = (x^2 + 3x)^{1/2}$
c) $f(x) = (2x - 3)^3$
d) $f(t) = \sin(2\pi t + \pi)$

Solution

DerivCompose_03

a) La fonction extérieure est une exponentielle de base e et l'exposant est une fonction de x. On a une fonction composée de la forme $y = e^u$, où $u = 2x$. En dérivant les deux composantes, on obtient :

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}\left(e^u\right) = e^u \text{ et } \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) = 2.$$

D'où : $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times 2 = 2e^u.$$

Et, puisque $u = 2x$, on obtient $f'(x) = 2e^{2x}$.

b) En considérant que l'argument est une fonction de x, soit $u = x^2 + 3x$, on a une fonction de la forme $v = u^n$, où $n = 1/2$. En dérivant les deux composantes, on a alors :

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du}\left(u^{1/2}\right) = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ et } \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2 + 3x\right) = 2x + 3.$$

Par conséquent $$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times (2x + 3).$$

Et, puisque $u = x^2 + 3x$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$.

Tic
```
> f:=x->(2*x-3)^3;
> d1y:=D(f);
> d2y:=D(D(f));
> plot(f(x),x=-1..5);
```

c) En considérant l'expression à l'intérieur de la parenthèse comme une fonction de x, soit $u = 2x - 3$, on a une fonction composée de la forme $v = u^3$. En dérivant les deux composantes, on obtient :

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du}\left(u^3\right) = 3u^2 \text{ et } \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(2x - 3) = 2.$$

Par conséquent : $$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \times \frac{du}{dx} = 3u^2 \times 2 = 6u^2.$$

Et, puisque $u = 2x - 3$, on obtient $f'(x) = 6(2x - 3)^2$.

Tic
```
> f:=t->sin(2*Pi*t+Pi);
> d1y:=D(f);
> d2y:=D(D(f));
> plot({f(t),d1y(t)},t=0..6);
```

d) L'argument est une fonction de t, soit $u = 2\pi t + \pi$, on a une fonction de la forme $v = \sin(u)$. En dérivant les deux composantes, on obtient :

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du}(\sin u) = \cos u \text{ et } \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(2\pi t + \pi) = 2\pi.$$

Par conséquent $$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \times \frac{du}{dt} = (\cos u) \times 2\pi = 2\pi \cos u.$$

Et, puisque $u = 2\pi t + \pi$, on obtient $f'(t) = 2\pi \cos(2\pi t + \pi)$.

On peut alléger la démarche de dérivation des fonctions composées pour ne pas avoir à écrire chacune des composantes comme une fonction distincte. Pour ce faire, il faut déterminer l'effet de l'opérateur sur les formes de fonctions comme u^n, e^u, $\ln u$, $\sin u$, $\cos u$, etc.

Dérivation en chaîne

THÉORÈME

Dérivée en chaîne

Soit $y = f(u)$, une fonction dérivable où u est une fonction de x. La dérivée de f par rapport à x est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\big(f(u)\big) = f\,'(u)\frac{du}{dx}.$$

Démonstration

Puisque la fonction $y = f(u)$ est dérivable, on a $\frac{dy}{du} = f\,'(u)$. En substituant dans $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$, on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\big(f(u)\big) = f\,'(u)\frac{du}{dx}.$$

REMARQUE
L'idée de la procédure est de se ramener à des situations connues, soit la dérivation d'une des formes usuelles simples que nous avons vues précédemment et qui sont rappelées dans le tableau ci-dessous.

PROCÉDURE

Dérivation en chaîne

1. Identifier la fonction extérieure et la fonction intérieure u.
2. Dériver la fonction extérieure par rapport à u et multiplier par la dérivée du/dx ou du/dt de la fonction intérieure.
3. Simplifier l'expression s'il y a lieu.

DerivCompose_04

En appliquant cette procédure aux différentes formes usuelles, on obtient les procédures consignées dans le tableau suivant.

Dérivation des fonctions composées

Notation des fonctions	Opérateur de dérivation
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
$(e^u)' = e^u u'$	$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$
$(\ln u)' = \frac{1}{u}u'$	$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
$(\sin u)' = u'\cos u$	$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dx}$
$(\cos u)' = -u'\sin u$	$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u\frac{du}{dx}$
$(\tan u)' = u'\sec^2 u$	$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$
$(\sec u)' = u'\sec u\tan u$	$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u\tan u\frac{du}{dx}$
$(\cot u)' = -u'\csc^2 u$	$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$
$(\csc u)' = -u'\csc u\cot u$	$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u\cot u\frac{du}{dx}$

REMARQUE
Il suffit de détecter la forme usuelle simple à laquelle on peut se ramener, dériver cette fonction par rapport à u, puis multiplier par la dérivée du/dx.

EXEMPLE 5.1.2

Dériver la fonction définie par $v(x) = (x^3 - 3x^2)^4$.

Solution

En considérant $u = x^3 - 3x^2$ comme fonction intérieure, on a un mécanisme extérieur de la forme u^n, soit une puissance de fonction. On appliquera donc la démarche :

$$\frac{d}{dx}\left(u^n\right) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Cela donne : $v'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\overbrace{\underbrace{(x^3-3x^2)}_{\text{Fonction intérieure } u}{}^4}^{\text{Fonction extérieure forme } u^4}\right)$

$$= \underbrace{4(x^3-3x^2)^3}_{\text{Dérivée de la fonction extérieure}}\frac{d}{dx}\underbrace{(x^3-3x^2)}_{\text{Fonction intérieure}}$$

$$= \underbrace{4(x^3-3x^2)^3}_{\text{Dérivée de la fonction extérieure par rapport à } u}(\underbrace{3x^2-6x}_{\text{Dérivée de la fonction intérieure par rapport à } x})$$

La fonction dérivée est $v'(x) = 4(x^3 - 3x^2)^3(3x^2 - 6x)$.

REMARQUE

L'opérateur de dérivation s'applique de l'extérieur vers l'intérieur en affectant tout d'abord la fonction extérieure qui est une forme usuelle simple, puis progressivement les fonctions intérieures.

EXEMPLE 5.1.3

Dériver les fonctions suivantes

a) $v(x) = e^{x^2-4x}$

b) $v(x) = \ln(x^2 + 4)$

Solution

a) La fonction extérieure est une exponentielle de la forme e^u, où $u = x^2 - 4x$. La procédure de dérivation à appliquer est :

$$\frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u\frac{du}{dx}.$$

Cela donne : $v'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\underbrace{e^{\overbrace{x^2-4}^{\text{Fonction intérieure } u}}}_{\text{Fonction extérieure forme } e^u}\right)$

$$= \underbrace{e^{x^2-4}}_{\text{Dérivée de la fonction extérieure par rapport à } u}\frac{d}{dx}(\underbrace{x^2-4}_{\text{Fonction intérieure}})$$

$$= \underbrace{e^{x^2-4}}_{\text{Dérivée de la fonction extérieure}}(\underbrace{2x-4}_{\text{Dérivée de la fonction intérieure}}).$$

La fonction dérivée est $v'(x) = (2x-4)e^{x^2-4x}$.

DerivCompose_05

Tic

```
> v:=x->exp(2*x-5);
  d1y:=D(v);
  d2y:=D(D(v));
  plot(v(x),x=-1..2);
```

b) La fonction extérieure est de la forme, $\ln u$, où $u = x^2 + 4$. La procédure de dérivation à appliquer est :

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

Cela donne : $v'(x) = \frac{d}{dx}\left(\overbrace{\ln(\underbrace{x^2+4}_{\text{Fonction intérieure } u})}^{\text{Fonction extérieure forme } \ln u}\right)$

$$= \underbrace{\frac{1}{x^2+4}}_{\text{Dérivée de la fonction extérieure}} \frac{d}{dx}(\underbrace{x^2+4}_{\text{Fonction intérieure}})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{x^2+4}}_{\text{Dérivée de la fonction extérieure par rapport à } u} (\underbrace{2x}_{\text{Dérivée de la fonction intérieure par rapport à } x})$$

La fonction dérivée est $v'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$.

Tic

```
> v:=x->ln(2*x-3);
  d1y:=D(v);
  d2y:=D(D(v));
  plot({v(x),d1y(x)},x=1.5..4);
```

L'appellation **dérivation en chaîne** vient du fait que l'on peut avoir à appliquer le processus de dérivation à quelques reprises en procédant de l'extérieur vers l'intérieur.

Il faut considérer la forme globale avant de commencer à dériver. La fonction peut comporter une somme, un produit ou un quotient de fonctions, les règles de dérivation de la somme, du produit et du quotient s'appliquent toujours.

EXEMPLE 5.1.4

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 e^{x^2}$ b) $f(x) = \dfrac{e^{x^3}}{x^2}$.

DerivCompose_06

Solution

a) La fonction est un produit de fonctions, la procédure de dérivation à appliquer pour dériver le produit est :

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{d}{dx}(u) + u\frac{d}{dx}(v)$$

d'où : $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 e^{x^2}\right) = e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + x^3\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)$$

Il faut dériver x^3 et e^{x^2}. La première est de la forme x^n et la seconde de la forme e^u. La dérivée de la première est :

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2$$

Pour dériver la seconde fonction du produit, on applique la procédure :

$$\frac{d}{dx}\left(e^u\right)=e^u\frac{du}{dx}.$$

Cela donne $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)=e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=e^{x^2}\times 2x=2xe^{x^2}$.

Par substitution dans la forme de la dérivée du produit, on obtient :

$$\begin{aligned} v'(x)&=\frac{d}{dx}\left(x^3\right)e^{x^2}+x^3\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)\\ &=3x^2e^{x^2}+x^3\times 2xe^{x^2}=x^2e^{x^2}\left(3+2x^2\right)\end{aligned}$$

La fonction dérivée est donc :

$$f'(x)=3x^2e^{x^2}+x^3\times 2xe^{x^2}=x^2e^{x^2}\left(3+2x^2\right)$$

b) On doit appliquer la règle du quotient

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{x^2\frac{d}{dx}\left(e^{x^3}\right)-e^{x^3}\frac{d}{dx}\left(x^2\right)}{(x^2)^2}\\ &=\frac{x^2e^{x^3}\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-e^{x^3}\times 2x}{x^4}=\frac{x^2e^{x^3}\times 3x^2-e^{x^3}\times 2x}{x^4}\\ &=\frac{xe^{x^3}\left(3x^3-2\right)}{x^4}=\frac{e^{x^3}\left(3x^3-2\right)}{x^3}\end{aligned}$$

La fonction dérivée est donc

$$f'(x)=\frac{e^{x^3}\left(3x^3-2\right)}{x^3}$$

Approximation et différentielle

Les applications de la dérivée présentées dans les chapitres précédents sont toujours valides. On peut déterminer l'équation de la tangente, un modèle d'approximation affine (équation de la tangente), calculer une différentielle ou déterminer les zéros de la fonction dérivée.

EXEMPLE 5.1.5

La vitesse v d'une réaction chimique dépend de la température T (°C) et la relation entre ces variables est décrite par $v(T) = 0{,}8\, e^{0{,}15T}$ mol/L·s.

a) Déterminer un modèle d'approximation affine de cette vitesse pour une température avoisinant les 20°C.

b) Utiliser ce modèle pour estimer la vitesse de la réaction à 22°C et à 24°C.

c) Estimer l'augmentation de la vitesse de réaction si on augmente la température de 20°C à 23°C.

DerivComposeSCN01

Solution

a) Le modèle d'approximation affine est de la forme générale :

$$L(x) = f(c) + f\,'(c)(x - c) \text{ ou } L(T) = v(c) + v\,'(c)(T - c)$$

En dérivant la fonction, on obtient :

$$v'(T) = \frac{d}{dT}\left(0{,}8e^{0{,}15T}\right) = 0{,}8\frac{d}{dT}\left(e^{0{,}15T}\right) = 0{,}8 \times \left(e^{0{,}15T}\frac{d}{dT}(0{,}15T)\right)$$

$$= 0{,}8 \times \left(e^{0{,}15T}(0{,}15)\right) = 0{,}12e^{0{,}15T}.$$

La dérivée de la fonction est $v\,'(T) = 0{,}12\, e^{0{,}15T}$ mol/L·s·°C.

Dans le contexte du problème, on a :

$c = 20$, $f(c) = v(20) = 0{,}8\, e^{0{,}15 \times 20} = 16{,}07$

et $f\,'(c) = v\,'(20) = 0{,}12\, e^{0{,}15 \times 20} = 2{,}41$.

En substituant ces valeurs dans la forme générale, on obtient :

$$L(T) = 16{,}07 + 2{,}41(T - 20).$$

b) Pour estimer par approximation affine la vitesse de la réaction chimique à 22°C, on calcule l'image de $T = 22$ par le modèle d'approximation affine. Cela donne :

$$L(22) = 16{,}07 + 2{,}41(22 - 20) = 16{,}07 + 2{,}41 \times 2 = 20{,}89.$$

On estime que la vitesse de réaction est d'environ 20,9 mol/L·s lorsque la température est de 22°C.

Pour estimer par approximation affine la vitesse de la réaction chimique à 24°C, on calcule l'image de $T = 24$. Cela donne :

$$L(24) = 16{,}07 + 2{,}41(24 - 20) = 16{,}07 + 2{,}41 \times 4 = 25{,}71.$$

On estime que la vitesse de réaction est d'environ 25,71 mol/L·s lorsque la température est de 24°C.

c) On peut estimer la variation Δy de la variable dépendante d'une fonction à l'aide de la fonction d'approximation affine. Dans le contexte du problème posé, on peut estimer la variation de la vitesse de la réaction à une température avoisinant les 20°C en considérant :

$$L(T) - v(c) = v\,'(c)\,(T - c) = 2{,}41(T - 20)$$

Ainsi, en augmentant la température à 23°C, on a $T = 23$ et :

$$L(23) - v(20) = 2{,}41(23 - 20) = 7{,}23$$

On peut donc estimer que lorsque la température est de 20°C, une augmentation de 3°C entraîne une augmentation de la vitesse de réaction d'environ 7,2 mol/L·s.

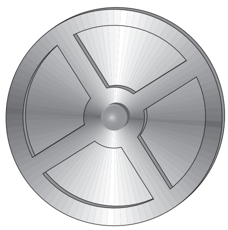
REMARQUE

Dans certains cas, la vitesse de la réaction dépend à la fois de la concentration des réactifs et de la concentration des produits.

REMARQUE

Estimer la variation par le calcul de la différence comme dans la partie c) de l'exemple est la même chose que calculer la différentielle à $T = 20$ °C avec $dT = 3$ °C.

DerivComposeSCN02



TIC

```
> w:=t->300*(1-exp(-0.8*t));
  d1y:=D(w);
  d2y:=D(D(w));
  plot({w(t),d1y(t)},t=0..5);
  d1y(0);
  d1y(2);
  d1y(4);
```

EXEMPLE 5.1.6

Un appareil est muni d'une roue d'inertie dont la vitesse durant les six minutes qui suivent la mise sous tension de l'appareil est :

$$\omega_\delta(t) = 300(1 - e^{-0,8t}) \text{ t/min.}$$

a) Déterminer la fonction décrivant l'accélération de la roue d'inertie.

b) Calculer l'accélération de la roue au temps $t = 0$ s, $t = 2$ s, $t = 4$ s. Interpréter les résultats selon le contexte.

Solution

a) La fonction décrivant la vitesse a une composante de la forme $v = e^u$. En appliquant la démarche de dérivation appropriée, on obtient que l'accélération est décrite par :

$$\omega_\delta'(t) = 240\,e^{-0,8t} \text{ t/min}^2.$$

b) L'accélération au temps $t = 0$ s est :

$$\omega_\delta'(0) = 240\,e^{-0,8\times 0} = 240 \text{ t/min}^2.$$

Ce qui signifie qu'à l'instant initial, la vitesse de la roue tend à augmenter de 240 tours par minute à chaque minute.

L'accélération au temps $t = 2$ s est :

$$\omega_\delta'(2) = 240\,e^{-0,8\times 2} = 48,46 \text{ t/min}^2.$$

Ce qui signifie que, deux minutes après la mise sous tension, la vitesse de la roue tend à augmenter d'environ 48 tours par minute à chaque minute.

L'accélération au temps $t = 4$ s est :

$$\omega_\delta'(4) = 240\,e^{-0,8\times 4} = 9,78 \text{ t/min}^2.$$

Ce qui signifie que, quatre minutes après la mise sous tension, la vitesse de la roue tend à augmenter d'environ 10 tours par minute à chaque minute.

DerivComposeSCN03

EXEMPLE 5.1.7

Lors de la réaction chimique :

$$2N_2O_{5(\text{solution})} \rightarrow 4NO_{2(\text{solution})} + O_{2(g)} \text{ (à 45°C),}$$

la concentration de N_2O_5 en fonction du temps est :

$$C(t) = e^{-0,0006t} \text{ mol/L.}$$

a) Déterminer la fonction décrivant la vitesse de la réaction chimique.

b) Calculer la concentration et la vitesse de la réaction chimique à l'instant initial. Interpréter les résultats dans le contexte.

c) Calculer la concentration et la vitesse de la réaction chimique au temps $t = 200$ s, $t = 1600$ s. Interpréter les résultats selon le contexte.

Solution

a) On doit d'abord déterminer la dérivée de la fonction donnant la concentration. La fonction à dériver est de la forme $v = e^u$. En appliquant la démarche de dérivation appropriée, on obtient :

$$v(t) = C'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{-0,0006t}\right) = e^{-0,0006t}\frac{d}{dt}(-0,0006t)$$
$$= e^{-0,0006t}\frac{d}{dt}(-0,0006t) = e^{-0,0006t}(-0,0006)$$
$$= -0,0006e^{-0,0006t}.$$

La vitesse de la réaction est décrite par :

$$C'(t) = -0,0006\ e^{-0,0006t}\ \text{mol/L·s.}$$

b) La concentration au temps 0 est $C(0) = 1$ mol/L et la vitesse de la réaction est :

$$\begin{aligned} C'(0) &= -0,0006\ e^{-0,0006\times 0} \\ &= -6\times 10^{-4}\ \text{mol/L·s.} \end{aligned}$$

Cela signifie qu'à l'instant initial, la concentration est de 1 mol/L et tend à diminuer de 6×10^{-4} mol/L par seconde.

c) La concentration à 200 s est $C(200) = 0,8869$ mol/L et la vitesse de la réaction est :

$$\begin{aligned} C'(200) &= -0,0006\ e^{-0,0006\times 200} \\ &= -5,3\times 10^{-4}\ \text{mol/L·s.} \end{aligned}$$

Cela signifie que 200 s après le début de la réaction, la concentration est de 0,8869 mol/L et tend à diminuer de $5,3\times10^{-4}$ mol/L par seconde.

La concentration à 1 600 s est $C(1\ 600) = 0,3829$ mol/L et la vitesse de la réaction est :

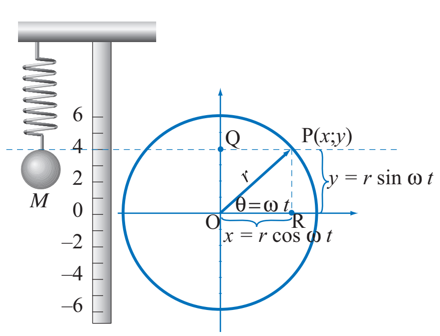
$$\begin{aligned} C'(1\ 600) &= -0,0006\ e^{-0,0006\times 1\ 600} \\ &= -2,3\times 10^{-4}\ \text{mol/L·s.} \end{aligned}$$

Cela signifie que 1 600 s après le début de la réaction, la concentration est de 0,3829 mol/L et tend à diminuer de $2,3\times10^{-4}$ mol/L par seconde.

Mouvement harmonique simple

DerivComposeSCN04

Le **mouvement harmonique simple** est un mouvement que l'on rencontre souvent dans les dispositifs mécaniques ou électriques. Nous allons présenter les caractéristiques de ce type de mouvement à partir de l'exemple de la masse oscillant au bout d'un ressort.



Considérons la masse M de la figure page suivante. En considérant comme instant initial le moment où la masse remonte et passe à l'origine, la position de la masse au temps t est décrite par :

$$y = r \sin \omega t.$$

C'est la projection verticale du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sur le cercle représenté à droite. (La résistance de l'air et le frottement vont finir par arrêter le mouvement, mais nous ne tenons pas compte de ces facteurs ici.)

La position du point $P(x; y)$ est donnée par :

$$x = r \cos \omega t \text{ et } y = r \sin \omega t.$$

Lorsque le point P se déplace sur le cercle, le point Q, projection de P sur l'axe vertical, monte et descend. En dérivant la fonction donnant la position du point Q, soit $y = r \sin \omega t$, on obtient la fonction décrivant la vitesse du point, ce qui donne :

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(r \sin \omega t) = r\frac{d}{dt}(\sin \omega t) = r(\cos \omega t)\frac{d}{dt}(\omega t) \\ &= r(\cos \omega t) \times \omega = \omega r \cos \omega t. \end{aligned}$$

Et, en dérivant la vitesse, on a l'accélération du point Q, ce qui donne :

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\omega r \cos \omega t) = \omega r(-\sin \omega t)\frac{d}{dt}(\omega t) \\ &= \omega r(-\sin \omega t) \times (\omega) = -\omega^2 r \sin \omega t. \end{aligned}$$

On constate que l'accélération est proportionnelle à la position, soit :

$$a_y = -\omega^2 y.$$

Dans cette égalité, le signe négatif signifie que le sens de l'accélération est opposé à la position y. Si $y > 0$, l'accélération a_y est négative peu importe que la masse monte ou descende.

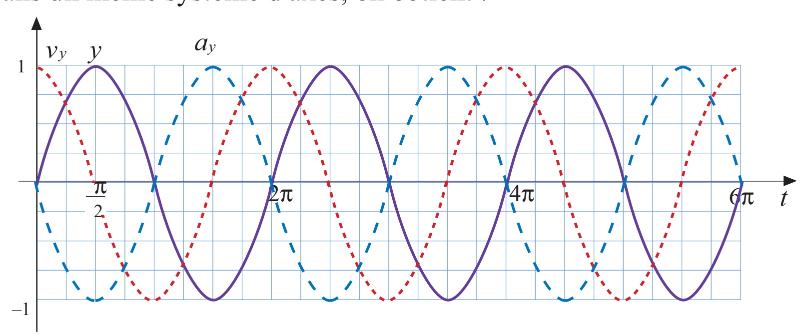
Les courbes de la position, de la vitesse et de l'accélération sont des sinusoïdes déphasées l'une par rapport à l'autre sur l'axe du temps. Si on considère le mouvement décrit par :

$$y = \sin t$$

dont l'amplitude est 1 et $\omega = 1$ rad/s. En représentant graphiquement les trois courbes :

$$y = \sin t,\ v_y = \cos t \text{ et } a_y = -\sin t$$

dans un même système d'axes, on obtient :



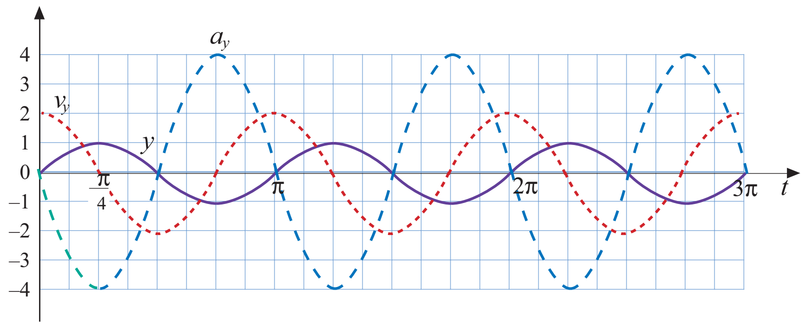
Si on considère le mouvement décrit par :

$$y = \sin 2t$$

dont l'amplitude est 1 et $\omega = 2$ rad/s. En représentant graphiquement les trois courbes :

$$y = \sin 2t,\ v_y = 2 \cos 2t \text{ et } a_y = -4 \sin 2t$$

dans un même système d'axes, on obtient :



Dans ce cas, l'amplitude de la fonction position est la même que dans l'illustration précédente, mais le mouvement est deux fois plus rapide car ω = 2 rad/s. L'accélération est quatre fois plus grande.

TIC

```
> a:=1;
  f:=x->sin(a*x);
  g:=x->a*cos(a*x);
  h:=x->-a^2*sin(a*x);
  plot({f(x),g(x),h(x)},x=0..8);
```

Modifier la valeur assignée au paramètre a, par exemple $a = 2$ et presser la touche retour pour visualiser les modifications aux graphiques.

Mouvement harmonique simple

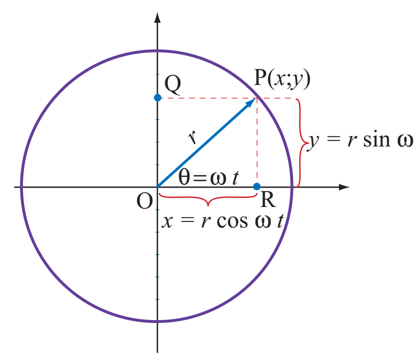
Le mouvement d'un point sur une droite est un **mouvement harmonique simple** si l'accélération du point est toujours proportionnelle à sa position par rapport à un centre O et est toujours de sens contraire à sa position.

En dérivant la fonction $x = r \cos \omega t$, on peut montrer que le mouvement du point R est également un mouvement harmonique simple. En effet, on trouve :

$$a_x = -\omega^2 x.$$

DerivComposeSCN05

Rappelons que le temps nécessaire pour compléter un cycle s'appelle la **période** du mouvement, le nombre de cycles par seconde s'appelle la **fréquence** et le déplacement maximal par rapport au point O s'appelle l'**amplitude** du mouvement. Dans le cas présent, l'amplitude est r. De plus, $x^2 + y^2 = r^2$. On peut donc, connaissant la position d'un point en mouvement harmonique simple, calculer sa vitesse et son accélération sans avoir à dériver. En effet, on a :



$$y = r \sin \omega t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega r \cos \omega t = \omega x = \omega\left(\pm\sqrt{r^2 - y^2}\right),$$

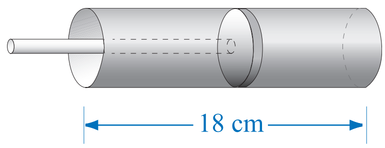
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 r \sin \omega t = -\omega^2 y.$$

De la même façon, pour un mouvement horizontal (mouvement du point R), on a :

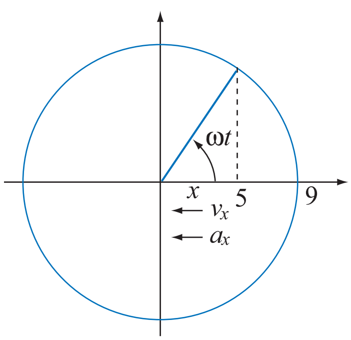
$$x = r \cos \omega t,$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin \omega t = -\omega y = -\omega\left(\pm\sqrt{r^2 - x^2}\right),$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x.$$



REMARQUE
Dans l'exemple 5.1.8, la vitesse du piston est négative lorsque celui-ci s'approche du point de référence et positive lorsqu'il s'en éloigne.



EXEMPLE 5.1.8

La vitesse de rotation d'un moteur est de 500 t/min. La course d'un piston de ce moteur est de 18 cm et son mouvement est un mouvement harmonique simple.

a) Décrire la position du piston en fonction du temps.
b) Calculer la vitesse et l'accélération du piston lorsque celui-ci est à 9 cm du point de référence.
c) Calculer la vitesse et l'accélération du piston lorsque celui-ci est à 5 cm à droite du point de référence et s'en approche.
d) Calculer la vitesse et l'accélération du piston lorsque celui-ci est au point de référence.

Solution

a) Le piston oscille autour du point milieu de la course du piston, l'amplitude est de 9 cm. De plus,
$$\omega = 500 \text{ t/min} = 52{,}4 \text{ rad/s}.$$
La position du piston au temps t est alors décrite par :
$$x = 9 \cos (52{,}4t) \text{ cm}.$$
b) Lorsque le piston est à 9 cm du point de référence, sa vitesse est :
$$v_x = 52{,}4(9^2 - 9^2)^{1/2} = 0 \text{ cm/s}.$$
Son accélération est :
$$a_x = -(52{,}4)^2 \times 9 \approx -24\ 712 \text{ cm/s}^2.$$
c) Lorsque le piston est à 5 cm du point de référence et s'approche du point de référence, sa vitesse est négative, on obtient :
$$v_x = -52{,}4\ (9^2 - 5^2)^{1/2} = -392 \text{ cm/s}.$$
Son accélération est :
$$a_x = -(52{,}4)^2 \times 5 \approx -13\ 729 \text{ cm/s}^2.$$
d) Lorsque le piston est au point de référence. Sa vitesse est :
$v_x = 52{,}4(9^2 - 0^2)^{1/2} \approx \pm 472$ cm/s, selon la direction du mouvement, son accélération est :
$$a_x = -(52{,}4)^2 \times 0 = 0 \text{ cm/s}^2.$$

Retour sur l'apprentissage

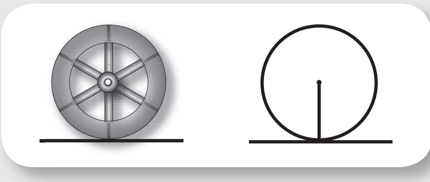
La procédure de dérivation en chaîne permet de dériver une fonction composée en appliquant l'opérateur de dérivation d'abord à la fonction usuelle extérieure, puis à la fonction intérieure suivante jusqu'à ce que toutes les composantes soient correctement dérivées. On procède ensuite au regroupement des termes et à la simplification.

La dérivée d'une fonction composée est porteuse de la même information que la dérivée d'une fonction usuelle simple, elle décrit le comportement du taux de variation ponctuel en fonction de l'abscisse du point. On peut à l'aide de ce taux de variation déterminer un modèle d'approximation affine pour estimer la variation sur un petit intervalle. Le recours à cette démarche est d'ailleurs surtout utilisée pour des fonctions composées d'une certaine complexité.

Un peu *d'histoire*

LA TANGENTE À UNE COURBE

La notion de tangente est apparue très tôt en géométrie. Certaines des caractéristiques de la tangente au cercle ont probablement été obtenues par une abstraction découlant de l'observation de la roue par Thalès de Milet (NH Thalès01).



Euclide, dans les *Éléments*, décrit la tangente comme suit :

Une droite qui rencontre un cercle et ne le coupe pas lorsqu'elle est prolongée est dite *tangente* au cercle.

Euclide, Les Éléments, Livre III, définition 2.

Si une droite est tangente à un cercle, et si du centre on mène une droite (rayon) au point de tangence, cette droite sera perpendiculaire à la tangente.

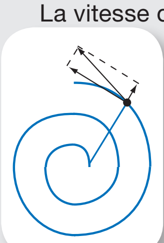
Euclide, Les Éléments, Livre III, proposition 18.

Grâce à cette proposition, il est assez simple de déterminer la tangente à un cercle en un point sur la circonférence. Il suffit de tracer le rayon aboutissant au point sur la circonférence. On trace ensuite la perpendiculaire au rayon passant par ce point. La droite perpendiculaire à la tangente au point de tangence est maintenant appelée la **normale** et elle joue un rôle important en optique.

Pour déterminer la tangente à une autre courbe qu'un cercle, une ellipse ou une parabole, par exemple, on ne peut appliquer la propriété démontrée par Euclide qui n'est valide que pour le cercle.

La première démarche fructueuse pour déterminer la tangente à une autre courbe qu'un cercle est due à Archimède (vers ~287 à ~212) (NH Archimède01). Il a déterminé la tangente à la courbe appelée **spirale d'Archimède**. Cette spirale est la courbe engendrée par un point qui se déplace à une vitesse constante sur un rayon tournant également à une vitesse constante (NH Archimède02).

La vitesse du point dans le sens du rayon est constante et sa vitesse perpendiculairement au rayon est proportionnelle à la vitesse angulaire du rayon et à la distance du point mobile à l'extrémité fixe du rayon. La composition de ces deux mouvements, dans le sens moderne de la somme des vecteurs, donne la direction de la tangente, soit la direction de la diagonale du parallélogramme.



Au XVII^{e} siècle, il se forme des cercles de savants qui se réunissent autour d'un mécène ou d'une personnalité érudite. Ces savants échangent sur leurs travaux et découvertes et chacun essaie de résoudre les problèmes présentés et de répondre aux objections soulevées. Ces cercles de savants donnent naissance à des sociétés scientifiques permanentes, l'Accademia dei Lincei à Rome (1603) et la Royal Society à Londres (1645).

En France, Colbert crée l'Académie des sciences en 1666 pour assurer le développement des sciences et conseiller le pouvoir en ce domaine. Avant la création de cette Académie, plusieurs savants européens correspondent avec le père Marin Mersenne (NH Mersenne01) qui soumet aux uns les problèmes rencontrés par les autres et transmet les découvertes.

Un des problèmes qui suscite l'intérêt des savants de l'époque est celui de déterminer la tangente à une courbe.

Galilée avait adopté la théorie héliocentrique et pour répondre aux objections basées sur la théorie du mouvement d'Aristote, il a développé la notion de composition des mouvements ce qui entraînait que la direction du mouvement d'un projectile est la tangente à la courbe de sa trajectoire, c'est-à-dire la tangente à une parabole. Comment procéder pour déterminer la tangente en un point quelconque d'une parabole ?

Kepler a publié ses deux premières lois en 1609 et la troisième en 1618. Sa première loi est à l'effet que la trajectoire d'une planète est une ellipse dont le Soleil est un des foyers. La direction du mouvement de la planète est en tout temps la tangente à l'ellipse. Comment procéder pour déterminer la tangente en un point quelconque d'une ellipse ?

Gilles Personne de Roberval (NH Roberval01) a développé une méthode mécanique pour tracer les tangentes, méthode qui a été publiée dans les Mémoires de l'Académie des Sciences en 1693 mais dont le contenu était, semble-t-il, enseigné au Collège Royal beaucoup plus tôt (NH Roberval02). Par cette méthode, il considère que la direction du mouvement d'un point qui décrit une courbe est la tangente à cette courbe. La direction de ce mouvement est cependant la composition de deux mouvements qui sont spécifiques à la courbe. En d'autres mots, toute courbe est engendrée par la composition de deux mouvements et la tangente est la bissectrice de l'angle formé par les directions de ces deux mouvements. Roberval faisait partie du groupe de savants qui correspondaient avec le père Marin Mersenne. Il était en fait le seul mathématicien professionnel du groupe, mais par l'entremise de Mersenne, il a échangé avec Descartes, Fermat, Pascal et Torricelli. La méthode de composition des mouvements utilisée par Roberval a d'ailleurs fait l'objet d'une dispute avec Torricelli (NH Torricelli01).

5.2 EXERCICES

Dans les exercices suivants, on donne les fonctions $y = f(u)$ et $u = g(x)$.

a) Trouver $\dfrac{dy}{dx}$. b) Calculer $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_c$.

c) Déterminer l'équation de la tangente au point $(c; f(c))$.

1. $y = u^3 - 3u$, $u = x^2 - 1$ et $c = 1/2$.
2. $y = u^{1/3}$ et $u = x^3 + 2x - 4$ et $c = 2$.
3. $y = \cos u$, $u = 2x$ et $c = \pi/4$.
4. $y = e^u$, $u = \cos x$ et $c = \pi/2$.
5. $y = e^u$, $u = -x^2 + 3$ et $c = -2$.
6. $y = \ln u$, $u = x^2 - 2$ et $c = 2$.

Dans les exercices suivants, on donne les fonctions $y = f(u)$, $u = g(x)$ et $x = h(t)$.

a) Trouver $\dfrac{dy}{dt}$. b) Calculer $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_c$.

c) Déterminer l'équation de la tangente au point $(c; f(c))$.

7. $y = u^3$, $u = 2 + 3x$, $x = \sin t$ et $c = 0$.
8. $y = u^{1/3}$, $u = e^x$, $x = 3t$ et $c = 1$.
9. $y = \ln u$, $u = x^2 + x$, $x = 1/t$ et $c = 1$.
10. $y = u^2$, $u = \sin x$, $x = \pi t$ et $c = 1/4$.

Trouver la dérivée des fonctions composées suivantes :

11. $f(x) = (2x - 5)^2$
12. $f(x) = (3x - 2)^3$
13. $f(x) = e^{3x-2}$
14. $f(x) = e^{3x+5}$
15. $f(x) = \ln(5x - 3)$
16. $f(x) = \ln(2x + 7)$
17. $f(x) = \sin(5x - 3)$
18. $f(x) = \cos(3x + 1)$
19. $f(t) = \sin(2\pi t + \pi/2)$
20. $f(t) = \cos(20\pi t - 3\pi/2)$
21. $f(t) = 50\, e^{5t-2}$
22. $f(t) = 24\, e^{-4t+5}$
23. $f(t) = (\sin t)^2$
24. $f(t) = \cos^2(2t)$

Dans les exercices suivants, trouver la pente et l'équation de la tangente au point d'abscisse c.

25. $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ et $c = 3$
26. $f(x) = x^2(2 - x)^2$ et $c = 1/2$
27. $f(x) = \sin^2(2\pi x - \pi/4)$ et $c = 1/2$
28. $f(x) = x^2 e^{2x-1}$ et $c = 1$
29. $f(x) = \dfrac{\ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x}$ et $c = e$

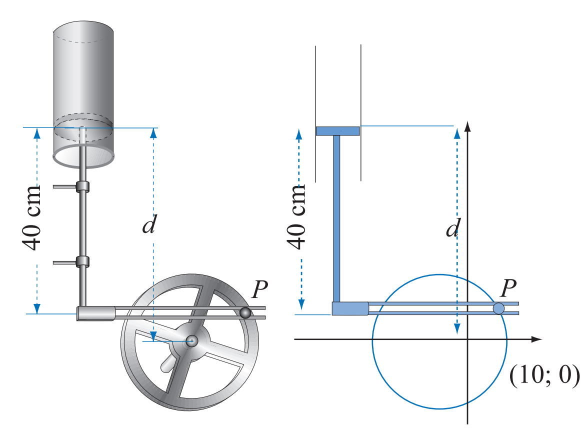
Dans les exercices suivants, déterminer les zéros de la fonction dérivée.

30. $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{e^x}$
31. $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)^3$
32. $f(x) = e^{2x}(x + 2)^3$
33. $f(x) = \dfrac{(x^2+4)^2}{e^x}$
34. $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x^2}$
35. $f(x) = e^{-2x}(x^2 + 1)^2$
36. $f(x) = x^2\sqrt{2-x}$
37. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+3)^3}$

Utiliser les diverses propriétés de l'opérateur de dérivation pour trouver la dérivée des fonctions suivantes et simplifier l'expression obtenue :

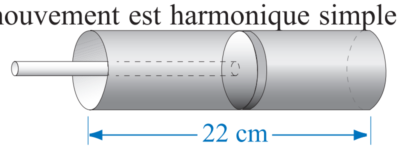
38. $f(x) = (3x + 2)^2\,(x^2 - 5)^3$
39. $f(x) = e^{4x}\,(x^3 - 2x)^3$
40. $f(x) = e^{x^2}\sin x^2$
41. $f(x) = \dfrac{(x^3+2x)^2}{(2x^2-3x)^3}$
42. $f(x) = \dfrac{(x^3-5)^3}{(x^2+4)^4}$
43. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-8x}}{(x-4)^2}$
44. $f(x) = \dfrac{(x^3+2x)^2}{\sin x^2}$
45. $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{\sin x^2}$
46. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x^2+2)^3}{(3x-4)}}$
47. $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+2x)}{(x^3-3x^2)}$

48. Une extrémité d'un arbre de 40 cm est fixée à un piston dont la course est verticale. L'autre extrémité est fixée à l'aide d'une fourche à la jante d'une roue de 10 cm de rayon. La roue tourne dans le sens antihoraire à 200 t/min.



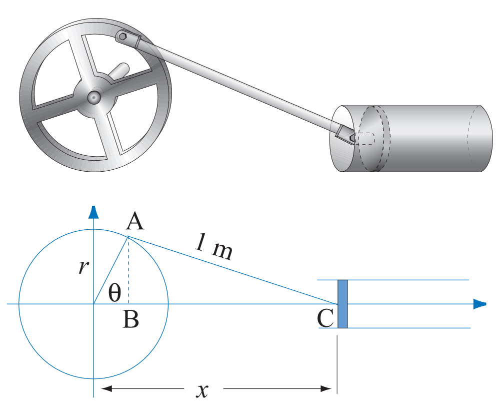
a) Décrire la position du piston en fonction du temps par rapport au point milieu de sa course.
b) Le mouvement du piston est-il harmonique? Justifier.
c) Calculer la vitesse et l'accélération du piston lorsque celui-ci est à 2 cm de la fin de sa course.
d) Déterminer un modèle d'approximation linéaire de la position avec le temps 0 s comme centre d'approximation.
e) Calculer la différentielle de la position dans l'intervalle de temps [0; 0,025].

49. Un moteur tourne à une vitesse de 400 t/min. La course d'un piston de ce moteur est de 22 cm et son mouvement est harmonique simple.



a) Décrire la position du piston en fonction du temps.
b) Calculer la vitesse et l'accélération du piston lorsque celui-ci est à 4 cm de la fin de sa course.

50. Une tige de 1 m de longueur a une extrémité fixée à un piston et l'autre extrémité à la jante d'une roue de 0,25 m de rayon qui tourne dans le sens antihoraire.



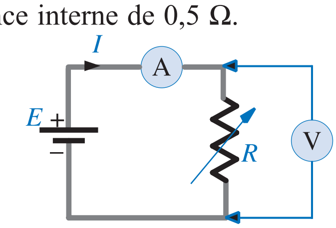
a) Exprimer la position x en fonction de l'angle θ.
b) Exprimer la position x en fonction du temps lorsque la roue tourne à raison de 2π rad/s.
c) En considérant que le temps est mesuré à partir du moment où l'angle $\theta = 0$, trouver la position et la vitesse de déplacement du point C au temps $t = 0$ s.
d) Trouver la position et la vitesse de déplacement du point C au temps $t = 1/4$ s.
e) Trouver la position et la vitesse de déplacement du point C au temps $t = 1/2$ s.
f) Trouver la position et la vitesse de déplacement du point C au temps $t = 3/4$ s.
g) Trouver la position et la vitesse de déplacement du point C au temps $t = 1$ s.

51. Cent grammes de carbone 14 radioactif se décomposent selon le modèle :

$$Q(t) = 100\ e^{-0{,}000\ 121t},$$

où Q est la quantité en grammes après t années.
a) Trouver la fonction décrivant le taux de décomposition en fonction du temps t.
b) Quelle est la quantité restante et le taux de décomposition au bout de 1 000 ans?

52. Une résistance variable de R ohms (Ω) est reliée à une source de tension de 12 volts (V) ayant une résistance interne de 0,5 Ω.



La loi d'Ohm et les lois de Kirchhoff permettent d'établir que le courant en ampères (A) dans le circuit dépend de la résistance variable et est décrit par :

$$I = \frac{12}{R+0{,}5} = \frac{24}{2R+1}\ \text{A}.$$

De plus, la puissance P (en watts) dans la résistance externe est donnée par :

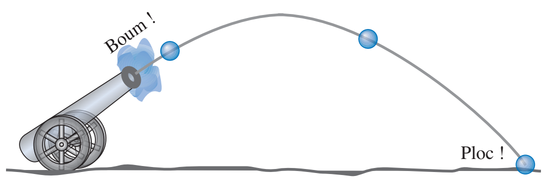
$$P = RI^2.$$

a) Déterminer le taux de variation du courant lorsque la résistance variable est de 1 Ω, 2 Ω. Interpréter le résultat selon le contexte.
b) Déterminer le taux de variation de la puissance lorsque la résistance variable est de 1 Ω, 2 Ω. Interpréter le résultat selon le contexte.
c) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de la résistance variable le taux de variation de la puissance est nulle. Interpréter le résultat selon le contexte.

53. La portée d'un projectile est donnée par :

$$P(\theta) = \frac{v^2 \sin(2\theta)}{g},$$

où θ est l'angle de tir par rapport au sol, v est la vitesse initiale du projectile et g est l'accélération due à la gravité.



a) Calculer la portée pour un angle de 30°.
b) Calculer la portée pour un angle de 60°.
c) Déterminer un modèle d'approximation affine de la portée avec un angle de 30° comme centre d'approximation.
d) Utiliser ce modèle pour estimer la portée si on porte l'angle à 31°.
e) Déterminer un modèle d'approximation affine de la portée avec un angle de 60° comme centre d'approximation.
f) Utiliser ce modèle pour estimer la portée si on porte l'angle à 61°.
g) Calculer la différence de portée lorsqu'on augmente l'angle de 30° à 31°, de 60° à 61°.

54. Des chercheurs ont développé un modèle qui, selon eux, permet de prédire le nombre de personnes qui seront affectées par la prochaine épidémie de grippe. Ce modèle est :

$$N(t) = 30t^3e^{-t/3},$$

où N est le nombre de personnes affectées et t le temps en jours à partir du début de l'épidémie.

a) Déterminer le nombre de personnes malades trois jours après le début de l'épidémie.
b) Déterminer le taux de variation du nombre de personnes malades trois jours après le début de l'épidémie.
c) Déterminer un modèle d'approximation affine du nombre de personnes malades avec la troisième journée comme centre d'approximation. En utilisant ce modèle, estimer le nombre de personnes malades 5 jours après le début de l'épidémie, 6 jours après le début de l'épidémie.
d) Déterminer un modèle d'approximation affine du nombre de personnes malades avec la dixième journée comme centre d'approximation. En utilisant ce modèle, estimer le nombre de personnes malades 12 jours après le début de l'épidémie, 13 jours après le début de l'épidémie.
e) Déterminer un modèle d'approximation affine du nombre de personnes malades avec la quinzième journée comme centre d'approximation. En utilisant ce modèle, estimer le nombre de personnes malades 17 jours après le début de l'épidémie, 18 jours après le début de l'épidémie.

55. Soit la fonction définie par $f(x) = 3 + 3e^x - xe^x$.

a) Déterminer la différentielle de la fonction au voisinage de $x = 0$ et au voisinage de $x = 1$.
b) Calculer la variation de la fonction sur l'intervalle [0; 0,5] et sur l'intervalle [1; 1,25].
c) Déterminer un modèle d'approximation affine de la fonction au voisinage de 0 et au voisinage de 1.
d) Utiliser le premier modèle pour estimer l'image de la fonction à 0,5 et le second pour estimer l'image de la fonction à 1,5.

56. Soit la fonction définie par $f(x) = 4e^{-x/4} \sin x$.

a) Déterminer la dérivée de la fonction.
b) Évaluer la différentielle de la fonction au voisinage de $c = 0$ et $c = 1$.
c) Calculer la variation de la fonction sur l'intervalle [0; 0,25].
d) Déterminer un modèle d'approximation affine de la fonction au voisinage de 0.
e) Utiliser ce modèle pour estimer l'image de la fonction à 0,5.

57. Déterminer l'équation de la tangente et de la normale à la courbe de la fonction au point indiqué.

a) $f(x) = (x^2 - 3)e^{x/2}$ au point d'abscisse 2.
b) $f(x) = \sin^3 x$ au point d'abscisse $\pi/3$.

58. Déterminer un modèle d'approximation affine pour les fonctions suivantes et utiliser ce modèle pour estimer les images demandées.

a) $f(x) = (x^2 - 5)e^x$. En considérant $(2; -e^2)$ comme centre d'approximation, estimer $f(1{,}9)$ et $f(2{,}1)$.
b) $f(x) = 4x\,(3 - \ln x)$. En considérant (1; 12) comme centre d'approximation affine, estimer $f(0{,}85)$ et $f(1{,}15)$.
c) $f(x) = \sin^3 x$. En considérant le point d'abscisse $\pi/3$ comme centre d'approximation affine, estimer $f(1{,}04)$ et $f(1{,}06)$.

5.3 Dérivation implicite

Nous avons développé une méthode permettant de dériver la plupart des fonctions. La procédure de dérivation d'une fonction composée va maintenant nous permettre de dériver des relations dans lesquelles aucune des variables n'est exprimée explicitement comme fonction de l'autre variable.

Dérivation d'une relation

DérivImplicite01

Pour dériver une relation dans laquelle aucune des variables n'est exprimée explicitement comme fonction de l'autre variable, il nous suffit de traiter toutes les variables, sauf celle par rapport à laquelle on dérive, comme une fonction extérieure dans la procédure de dérivation d'une fonction composée.

EXEMPLE 5.3.1

Soit la relation définie par $y^3 - 2x^2 = 6$.

a) Déterminer $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Déterminer le taux de variation ponctuel au point d'abscisse 1. Interpréter géométriquement le résultat.

DérivImplicite02

Solution

a) On doit considérer implicitement que y est une fonction de x. En appliquant l'opérateur de dérivation aux deux membres de l'équation, on obtient alors :

$$\frac{d}{dx}(\underbrace{y}_{\substack{\text{Fonction}\\\text{composée,}\\\text{forme } u^3}})^3 - \frac{d}{dx}\underbrace{(2x^2)}_{\substack{\text{Fonction}\\\text{simple}}} = \frac{d}{dx}(6)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 4x = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{3y^2}.$$

b) Le taux de variation est décrit en fonction des coordonnées du point, pas seulement de son abscisse. Il faut donc déterminer l'ordonnée du point pour calculer le taux de variation. En posant $x = 1$ dans la relation, on obtient :

$$y^3 - 2 = 6, \text{ d'où } y^3 = 8 \text{ et } y = 2.$$

Les coordonnées du point sont donc (1; 2). En substituant, on trouve :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1;2)} = \frac{4\times 1}{3\times 2^2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

C'est la pente de la tangente au point d'abscisse (1; 2).

REMARQUE

En dérivation implicite, on applique la procédure de dérivation des fonctions composées en traitant simplement les variables, sauf celle par rapport à laquelle on dérive, comme fonction extérieure d'une fonction composée.

TIC

```
> restart;
  eq:=y^3-2*x^2=6;
  Diff(y(x),x)=implicitdiff(eq,y,x);
  pente:=subs(x=1,y=2,rhs(%));
```

DérivImplicite3

REMARQUE

En dérivation implicite, la règle du produit et celle du quotient s'appliquent comme à l'habitude. Cependant, on peut modifier l'équation à dériver pour ne pas avoir à utiliser la règle du quotient. Par exemple,

$$\frac{x^2}{x+y} = y^2 \text{ donne } x^2 = xy^2 + y^3.$$

TIC

```
> restart;
  eq:=x^2*y+x^3=6-x;
  Diff(y(x),x)=implicitdiff(eq,y,x);
  pente:=subs(x=1,y=4,rhs(%));
```

EXEMPLE 5.3.2

Soit la relation définie par :

$$y + x = \frac{6-x}{x^2}.$$

a) Déterminer $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Déterminer le taux de variation ponctuel au point d'abscisse 1. Interpréter géométriquement le résultat.

Solution

a) On peut modifier l'expression à dériver en multipliant les deux membres de l'égalité par x^2. Cela donne :

$$x^2y + x^3 = 6 - x.$$

Dans cette expression, il faut appliquer la règle du produit pour dériver le terme x^2y. En appliquant l'opérateur de dérivation aux deux membres, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\left(x^2y\right)}_{\substack{\text{Produit}\\\text{de fonctions,}}} + \frac{d}{dx}\underbrace{\left(\ x^3\ \right)}_{\substack{\text{Fonction}\\\text{intérieure}}} = \frac{d}{dx}\underbrace{\left(\ 6\ \right)}_{\substack{\text{Fonction}\\\text{constante}}} - \frac{d}{dx}\underbrace{\left(\ x\ \right)}_{\substack{\text{Fonction}\\\text{intérieure}}}.$$

$$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}(6) - \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)y + x^2\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(x^3) = 0 - 1$$

$$2x \times y + x^2\frac{dy}{dx} + 3x^2 = -1$$

$$x^2\frac{dy}{dx} = -1 - 2xy - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-2xy-3x^2}{x^2}.$$

b) Déterminons l'ordonnée du point en posant $x = 1$ dans la relation, cela donne :

$$y + 1 = \frac{6-1}{1^2}, \text{ d'où } y + 1 = 5 \text{ et } y = 4.$$

On cherche donc le taux de variation ponctuel au point (1; 4). En substituant, on obtient :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1;\ 4)} = \frac{-1-2\times1\times4-3\times1^2}{1^2} = \frac{-1-8-3}{1} = -12.$$

Le taux de variation au point d'abscisse 1 est donc égal à –12, c'est la pente de la tangente en ce point.

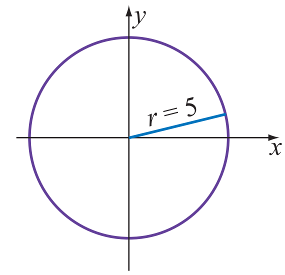
EXEMPLE 5.3.3

Soit la relation définie par l'équation du cercle de rayon 5 centré à l'origine :

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Déterminer l'équation des tangentes aux points d'abscisse 4.

DérivImplicite04



Solution

En appliquant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=0$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}.$$

Déterminons l'ordonnée des points en posant $x = 4$ dans la relation, cela donne :

$$y^2 + 16 = 25, \text{ d'où } y^2 = 9 \text{ et } y = \pm 3.$$

On cherche donc l'équation des tangentes aux points (4; 3) et (4; –3). On détermine la pente des tangentes en substituant dans l'expression du taux de variation en fonction des coordonnées du point. Cela donne :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4;\,3)}=\frac{-4}{3} \text{ et } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4;\,-3)}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}.$$

Au point (4; 3), la pente de la tangente est –4/3 et son équation est :

$$y-3=\frac{-4}{3}(x-4), \text{ d'où } y=\frac{-4x}{3}+\frac{25}{3}.$$

Au point (4; –3), la pente de la tangente est 4/3 et son équation est :

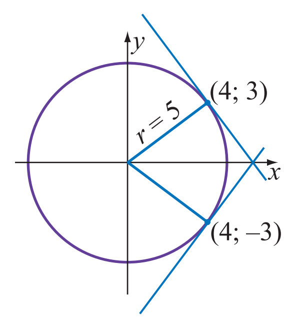
$$y+3=\frac{4}{3}(x-4), \text{ d'où } y=\frac{4x}{3}-\frac{25}{3}.$$

REMARQUE

En dérivation implicite, on peut avoir plusieurs points de même abscisse sur une courbe.

TIC

```
> restart;
  eq:=x^2+y^2=25;
  Diff(y(x),x)=implicitdiff(eq,y,x);
  pente1:=subs(x=4,y=3,rhs(%));
  pente2:=subs(x=4,y=-3,rhs(%%));
```



Il est possible de résoudre le problème de l'exemple 5.3.3 sans avoir recours à la dérivation implicite. Cependant, la procédure est plus longue. En effet, on doit alors considérer deux fonctions distinctes, celle dont le graphique est l'arc de cercle en-haut de l'axe des x et celle dont le graphique est l'arc de cercle sous l'axe des x.

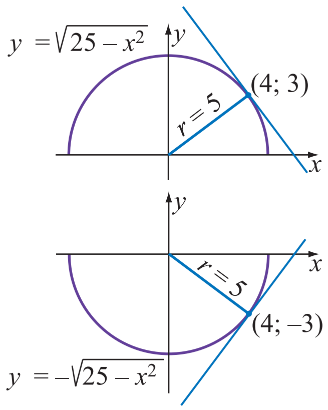
L'arc de cercle en-haut de l'axe des x est décrit par :

$$y=\sqrt{25-x^2}=(25-x^2)^{1/2}.$$

Sa dérivée est $\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{-2x(25-x^2)^{-1/2}}{2}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}.$

Pour trouver l'équation de la tangente au point d'abscisse 4, on calcule alors sa pente et on obtient :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_4 = \frac{-4}{\sqrt{25-4^2}} = \frac{-4}{3}.$$



L'arc de cercle en-dessous de l'axe des x est décrit par :

$$y = -\sqrt{25-x^2} = -(25-x^2)^{1/2}.$$

Sa dérivée est $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x \times -(25-x^2)^{1/2}}{2} = \dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}.$

En calculant la pente au point d'abscisse 4, on obtient :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_4 = \frac{4}{\sqrt{25-4^2}} = \frac{4}{3}.$$

La pente de la tangente en un point de la partie supérieure du cercle est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{y}.$$

Celle d'un point de la partie inférieure du cercle est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{-\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{y}.$$

En dérivation implicite, le taux de variation est décrit en fonction des coordonnées x et y du point alors qu'en dérivant une fonction, il est décrit seulement en fonction de l'abscisse du point.

EXEMPLE 5.3.4

Soit la relation définie par $y + 4x^2 = 6$.

a) Déterminer $\dfrac{dy}{dt}$.

DérivImplicite05

b) On donne $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{(1;\,2)} = \dfrac{1}{8}$ unité par seconde, évaluer $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{(1;\,2)}$.

REMARQUE
En dérivation implicite, la variable par rapport à laquelle on dérive peut ne pas apparaître dans la relation.

Solution

a) Dans cette situation, on doit considérer que x et y sont des fonctions implicites de t. En appliquant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(y+4x^2\right) = \frac{d}{dt}(6)$$
$$\frac{d}{dt}(y) + \frac{d}{dt}\left(4x^2\right) = 0$$
$$\frac{dy}{dt} + 8x\frac{dx}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = -8x\frac{dx}{dt}.$$

b) En substituant les données, on obtient :

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{(1;\,2)} = -8x\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(1;\,2)} = -8 \times 1 \times \frac{1}{8} = -1.$$

Le taux de variation instantané cherché est égal à –1, soit une diminution de une unité par seconde.

Tangente verticale

Lorsque le dénominateur du taux de variation d'une relation s'annule, la tangente à la courbe est verticale.

EXEMPLE 5.3.5

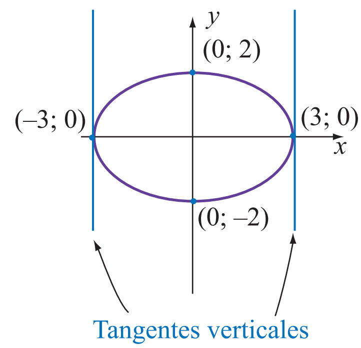
Soit la relation définie par $4x^2 + 9y^2 = 36$.

a) Déterminer $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Calculer $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}$.

c) Déterminer en quels points de la courbe la tangente est verticale.

DérivImplicite06



Solution

a) En appliquant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\left(4x^2+9y^2\right)=\frac{d}{dx}(36)$$

$$8x+18y\frac{dy}{dx}=0.$$

En isolant $\dfrac{dy}{dx}$, on obtient $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-8x}{18y}=\dfrac{-4x}{9y}$.

b) Lorsque $x = 2$, on a $16 + 9y^2 = 36$, d'où $y=\pm 2\sqrt{5}/3$.

On trouve alors :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,\ 2\sqrt{5}/3)}=\frac{-4}{3\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,\ -2\sqrt{5}/3)}=\frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

c) Le dénominateur s'annule lorsque $y = 0$. En substituant dans la relation $4x^2 + 9y^2 = 36$, on obtient :

$$x = \pm 3.$$

La tangente est donc verticale en (–3; 0) et en (3; 0).

EXEMPLE 5.3.6

Soit la relation définie par $e^y - \ln x = y^3$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$.

DérivImplicite07

Solution

On applique d'abord l'opérateur de dérivation aux deux membres de l'équation.

$$\frac{d}{dx}(e^y-\ln x)=\frac{d}{dx}(y^3)$$

$$\frac{d}{dx}(e^y)-\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{d}{dx}(y^3)$$

$$e^y\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}=3y^2\frac{dy}{dx}$$

Pour isoler dy/dx, on regroupe à gauche de l'égalité les termes comportant ce facteur et à droite de l'égalité les termes ne comportant pas ce facteur.

$$e^y\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

On met dy/dx en évidence dans le membre de gauche et on divise les deux membres de l'équation par le facteur de dy/dx pour isoler celui-ci.

$$(e^y - 3y^2)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(e^y - 3y^2)}$$

Exponentielle et logarithmique de base *a*

Nous utiliserons maintenant la dérivation des fonctions composées et la dérivation implicite pour élargir notre éventail de fonctions usuelles. Nous déterminerons la dérivée des fonctions exponentielle de base a et logarithmique de base a.

DérivImplicite08

THÉORÈME

Dérivée de la fonction exponentielle de base *a*

Si $y = a^x$, alors $\dfrac{dy}{dx} = a^x \ln a.$

Démonstration

Soit $y = a^x$, puisque $a = e^{\ln a}$, on a $y = e^{x \ln a}$. En dérivant cette fonction composée, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\ln a}\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = e^{x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a)$$
$$\frac{dy}{dx} = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

La dérivée de $y = a^x$ est donc $\dfrac{dy}{dx} = a^x \ln a.$

Pour déterminer la dérivée de la fonction logarithmique de base a, nous allons l'exprimer sous forme exponentielle, puis nous dériverons implicitement. Appliquons d'abord cette procédure à l'exponentielle de base e.

THÉORÈME

Dérivée de la fonction logarithmique de base e

Si $y = \ln x$, alors $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}.$

Démonstration

Soit $y = \ln x$, on a alors $x = e^y$. En dérivant implicitement par rapport à x, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(e^y)$$
$$1 = e^y \frac{d}{dx}(y)$$
$$1 = e^y \frac{dy}{dx}.$$

En isolant $\frac{dy}{dx}$ on obtient $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$.

La dérivée de $y = \ln x$ est donc $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

THÉORÈME

Dérivée de la fonction logarithmique de base *a*

Si $y = \log_a x$, alors $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$.

Démonstration

Soit $y = \log_a x$, alors $x = a^y$. Puisque $a = e^{\ln a}$, on peut écrire :

$$x = e^{y \ln a}.$$

En dérivant par rapport à x, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(e^{y \ln a})$$
$$1 = e^{y \ln a} \frac{d}{dx}(y \ln a)$$
$$1 = e^{y \ln a} \ln a \frac{dy}{dx}.$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{y \ln a} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Par conséquent, la dérivée de $y = \log_a x$ est $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$.

Les fonctions exponentielle et logarithmique de base a, sont des fonctions dérivables, elles satisfont donc aux conditions d'application de règles de dérivation des sommes, produits et quotients de fonctions ainsi qu'à la procédure de dérivations des fonctions composées. On peut ajouter les dérivées suivantes à notre banque de fonctions usuelles.

DÉRIVATION DES FONCTIONS COMPOSÉES

Notation des fonctions	Opérateur de dérivation
$(a^u)' = a^u \ln a$	$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$	$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}$

EXEMPLE 5.3.7

DérivImplicite09

Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3^x \sin 3x$ b) $f(x) = \log_4(x^2 - 4)$

Solution

a) En appliquant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3^x \sin 3x\right) = \frac{d}{dx}\left(3^x\right)\sin 3x + 3^x \frac{d}{dx}(\sin 3x)$$
$$= 3^x \ln 3 \times \sin 3x + 3^x \cos 3x \times 3$$
$$= 3^x\left(\ln 3 \ \sin 3x + 3\cos 3x\right).$$

La dérivée est donc $f'(x) = 3^x(\ln 3 \sin 3x + 3\cos 3x)$.

b) En appliquant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\log_4(x^2-4)\right) = \frac{1}{(x^2-4)\ln 4}\frac{d}{dx}\left(x^2-4\right)$$
$$= \frac{1}{(x^2-4)\ln 4} \times 2x = \frac{2x}{(x^2-4)2 \ \ln 2} = \frac{x}{(x^2-4)\ln 2}.$$

La dérivée est donc :

$$f'(x) = \frac{x}{(x^2-4)\ln 2}.$$

Taux liés

TauxLiens01

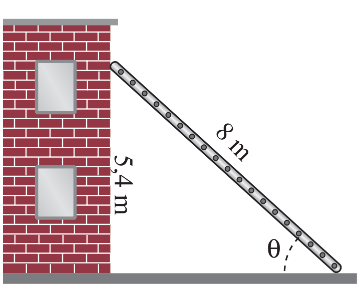
Dans l'analyse de nombreux phénomènes physiques, il faut tenir compte du fait que les variables varient dans le temps tout en étant interdépendantes. Il faut alors établir la relation entre les variables, appliquer la procédure de dérivation implicite pour obtenir la relation entre les taux de variation, puis utiliser l'information pour résoudre.

Dans l'exemple qui suit, nous calculerons un taux de variation lié par deux méthodes différentes;

- par une approximation numérique sur un petit intervalle de temps,
- en utilisant la dérivée de la relation entre les variables en cause.

L'échelle glisse

EXEMPLE 5.3.8



Une échelle de 8 m est appuyée contre un mur. Le haut de l'échelle glisse au taux de 0,8 m/s vers le sol. Trouver le taux de variation par rapport au temps de l'angle que fait l'échelle avec le sol quand le haut de celle-ci est à 5,4 m du sol.

Solution

Approximation numérique

Identifions d'abord les variables du problème. L'angle θ dépend de la hauteur *h*. Cependant, puisque le haut de l'échelle glisse à un taux de

0,8 m/s, la hauteur dépend du temps t. Pour calculer une approximation numérique, nous allons considérer un petit intervalle de temps et calculer l'angle θ après cet intervalle de temps, ce qui nous permettra de calculer le taux de variation de l'angle.

Lorsque le haut de l'échelle est à 5,4 m du sol, on a h_1 = 5,4 m et :

$$\sin(\theta_1) = \frac{5{,}4}{8} \text{ d'où } \theta_1 = \arcsin\left(\frac{5{,}4}{8}\right) = 42{,}454°.$$

Pour évaluer le taux de variation de l'angle, considérons un petit intervalle de temps Δt = 0,01 s et calculons l'angle après cet intervalle de temps. Puisque le haut de l'échelle glisse à un taux de 0,8 m/s, durant l'intervalle Δt, la variation de la hauteur de l'échelle sera :

$$\Delta h = (0{,}01 \text{ s})(-0{,}8 \text{ m/s}) = -0{,}008 \text{ m}$$

À la fin de l'intervalle Δt, la hauteur est :

$$h_2 = h_1 + \Delta h = 5{,}4 - 0{,}008 = 5{,}392 \text{ m}.$$

et : $\sin(\theta_2) = \dfrac{5{,}392}{8}$, $\theta_2 = 42{,}377$.

On peut alors estimer le taux de variation ponctuel de l'angle à l'aide du taux de variation moyen durant l'intervalle de temps Δt. On obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{\theta}{t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t} = \frac{42{,}377° - 42{,}454°}{0{,}01 \text{ s}} = -7{,}7°/\text{s}.$$

On estime donc le taux de variation de l'angle à –7,7°/s.

Utilisation de la dérivée

On peut exprimer le lien entre les variables h et θ à l'aide de la trigonométrie, ce qui donne :

$$\sin\theta = \frac{1}{8}h.$$

En dérivant les deux membres de la relation par rapport au temps t, on obtient :

$$\cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{8}\frac{dh}{dt},$$

en isolant $d\theta/dt$, on a : $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{8\cos\theta}\dfrac{dh}{dt}$.

Cette équation décrit la relation entre les taux de variation, celui du haut de l'échelle et celui de l'angle. Comme on veut calculer le taux de variation de l'angle en fonction du temps au moment où le haut de l'échelle est à 5,4 m, on a dh/dt = –0,8 m/s et :

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{5{,}4}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{8^2-5{,}4^2}{8^2}} = \frac{\sqrt{8^2-5{,}4^2}}{8}$$

en substituant dans l'équation établissant la relation entre les taux de variation, on obtient :

TIC

```
> restart;
> eq:=y^3-2*x^2=6;
> Diff(y(x),x)=implicitdiff(eq,y,x);
> pente:=subs(x=1,y=2,rhs(%));
```

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{h=5,4} = \frac{1}{8} \times \frac{8}{\sqrt{8^2 - 5,4^2}} \times -0,8 = -0,13553\ldots \text{ rad/s}$$

En effet, les formules de dérivation que nous avons étudiées ne sont valides que pour des angles en radians. Il nous faut maintenant exprimer ce taux en degrés par seconde. Il suffit, pour ce faire, de multiplier par 180°/(π rad), ce qui donne –7,7656...°/s.

PROCÉDURE

Calcul d'un taux lié par la dérivée

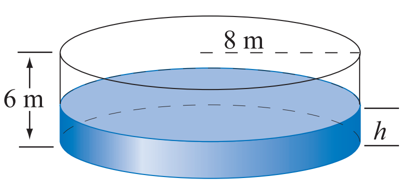
1. Identifier toutes les variables du problème et le taux de variation connu.
2. Identifier le taux de variation cherché.
3. Établir une relation entre les variables du problème.
4. Dériver chacun des membres de la relation par rapport au temps.
5. Substituer les données du problème pour calculer le taux de variation cherché.

Le réservoir

Lorsqu'on emplit un réservoir, il faut s'attendre à ce qu'il y ait un lien entre le volume de liquide que l'on verse dans le réservoir par unité de temps (taux de variation du volume de liquide) et le taux de variation du niveau de liquide dans le réservoir. Le liquide versé prend la forme du réservoir et c'est en considérant cette forme que l'on peut établir le lien entre le volume de liquide et le niveau du liquide dans le réservoir.

TauxLiens02

EXEMPLE 5.3.9



On verse, à un taux de 5 m³/min, un liquide dans un réservoir de forme cylindrique dont le rayon est de 8 m et la hauteur 6 m.

a) Déterminer le taux de variation de la hauteur du liquide dans le réservoir.

b) À l'aide de ce taux de variation, déterminer le temps nécessaire pour remplir le réservoir.

Solution

a) **Identification des variables**

Les variables sont le volume de liquide dans le réservoir, la hauteur du liquide et le temps. On donne le taux de variation du volume par rapport au temps, soit :

$$\frac{dV}{dt} = 5 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Taux cherché

On demande de déterminer le taux de variation de la hauteur par rapport au temps, soit dh/dt.

Relation entre les variables

Pour trouver la relation entre ces taux de variation, il faut dériver par rapport à t la relation entre le volume V et la hauteur h. Nous établirons cette relation à l'aide de la formule donnant le volume d'un cylindre, soit :

$$V = \pi r^2 h.$$

Dans la situation que nous analysons, lorsque le liquide est versé dans le réservoir, les variables sont le volume du liquide et la hauteur du liquide; le rayon est constant et égal à 8 m. Par substitution, on obtient alors la relation entre le volume et la hauteur, soit :

$$V = 64\pi h \text{ m}^3.$$

Dérivée de la relation

En dérivant cette relation par rapport à t, on obtient :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = 64\pi\frac{dh}{dt}$$

et, en isolant dh/dt, on obtient :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{64\pi}\frac{dV}{dt}.$$

Le taux de variation de la hauteur est alors :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{64\pi \text{ m}^2} \times 5 \ \frac{\text{m}^3}{\text{min}} = 0{,}025 \ \text{m/min}.$$

b) La hauteur du réservoir étant de 6 mètres, le temps nécessaire pour le remplir est :

$$\frac{h}{dh/dt} = \frac{6}{0{,}025} \ \frac{\text{m}}{\text{m/min}} = 240 \text{ min}.$$

REMARQUE

Pour interpréter correctement une relation obtenue par dérivation, il faut se rappeler que :

- le taux de variation d'une position par rapport au temps est une vitesse;
- le taux de variation d'une vitesse par rapport au temps est une accélération;
- le taux de variation d'un volume de liquide par rapport au temps est un débit;
- le taux de variation de la charge électrique par rapport au temps est un courant.

La nappe de pétrole

EXEMPLE 5.3.10

Du carburant s'échappe d'un pétrolier au taux de 60 m^3/min et forme une nappe circulaire de 0,25 m d'épaisseur.

a) Trouver la relation entre le taux de variation du volume de carburant et le taux de variation du rayon de la nappe.

b) Trouver le taux d'accroissement du rayon de la nappe de pétrole lorsque celui-ci est de 25 m, 50 m, 100 m. Que constate-t-on?

TauxLiens03

■ ***Solution***

a) **Identification et relation entre les variables**

Les variables sont le volume de carburant, le rayon de la nappe de carburant et le temps t. Le volume occupé par la nappe est celui d'un cylindre de 0,25 m d'épaisseur et de rayon r. En posant $h = 0{,}25$ dans la formule décrivant le volume d'un cylindre, on trouve :

$$V = 0{,}25\pi r^2 \text{ m}^3.$$

Dérivée de la relation

En dérivant implicitement par rapport à t, on obtient alors :

REMARQUE

La formule décrivant le volume du cylindre peut également être utilisée en considérant que la hauteur est constante et que le rayon varie. C'est le cas lorsqu'une nappe de carburant est due à une fuite. Une telle nappe aura une épaisseur relativement constante alors que le rayon de la nappe augmentera.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 0{,}5\pi r\frac{dr}{dt}.$$

b) **Substitution des données**

On donne le taux de variation du volume de carburant par rapport au temps *t*, soit :

$$\frac{dV}{dt} = 60 \ \ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}.$$

et on demande de trouver le taux de variation du rayon par rapport au temps *t*, soit :

$$\frac{dr}{dt}.$$

On isole donc *dr/dt*, ce qui donne :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{0{,}5\pi r}\frac{dV}{dt} = \frac{2}{\pi r}\frac{dV}{dt},$$

ce qui donne :

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=25} = \frac{2}{25\pi \ \mathrm{m}^2}\left(60\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\right) = 1{,}53 \ \ \mathrm{m/min},$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=50} = \frac{2}{50\pi \ \mathrm{m}^2}\left(60\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\right) = 0{,}76 \ \ \mathrm{m/min},$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=100} = \frac{2}{100\pi \ \mathrm{m}^2}\left(60\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\right) = 0{,}38 \ \ \mathrm{m/min}.$$

On constate que le taux de variation du rayon diminue à mesure que la nappe s'agrandit, ce qui est le résultat attendu puisque le taux de variation du volume de pétrole est constant et que la quantité de pétrole qui s'ajoute se répartit sur une plus grande circonférence.

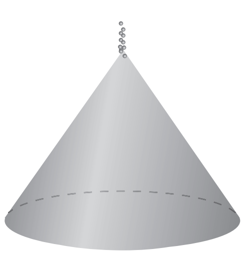
REMARQUE

Les seules valeurs que l'on peut substituer avant de dériver sont les constantes. Toutes les variables doivent être traitées comme tel dans le processus de dérivation.

Le tas de sable

Le sable versé sur un tas, comme dans un sablier, prend la forme d'un cône. Le volume dépend alors du rayon et de la hauteur du tas.

TauxLiens04



EXEMPLE 5.3.11

On verse du sable sur un tas de forme conique à un taux de 3 m^3/min et le sable se répartit sur le tas de telle sorte que le rayon du cône est toujours la moitié de sa hauteur.

a) Utiliser la dérivée pour calculer le taux de variation de la hauteur lorsque celle-ci est de 2 m.

b) Utiliser la dérivée pour calculer le taux de variation de la hauteur lorsque celle-ci est de 4 m. Que constate-t-on?

Solution

a) Les variables sont le volume de sable, la hauteur du tas et son rayon. La relation entre les variables est :

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Le rayon du cône est la moitié de sa hauteur. On a donc :

$$V = \frac{\pi h^3}{12}.$$

En dérivant par rapport au temps t, on a :

$$\frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right) = \frac{\pi}{12}\frac{d}{dt}\left(h^3\right) = \frac{\pi}{12}3h^2\frac{dh}{dt},$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}.$$

En isolant dh/dt, on obtient $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$.

Lorsque la hauteur est de 2 m, son taux de variation est alors :

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2} = \frac{4}{4\pi\ \mathrm{m}^2}\left(3\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\right) = 0{,}9549\ \mathrm{m/min}.$$

b) Pour calculer le taux de variation lorsque la hauteur est de 4 m, on utilise la même expression. Ce qui donne :

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4} = \frac{4}{16\pi\ \mathrm{m}^2}\left(3\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{min}}\right) = 0{,}2387\ \mathrm{m/min}.$$

On constate que le taux de variation de la hauteur diminue à mesure que le volume augmente, ce qui est le résultat attendu puisque le taux de variation du volume de sable est constant et que la quantité de sable qui s'ajoute par unité de temps se répartit sur une plus grande surface.

REMARQUE

Dans cette situation, le volume dépend du rayon r et de la hauteur h. Cependant, le rayon dépend de la hauteur h. Puisqu'on ne connaît pas dr/dt, il faut exprimer le rayon en fonction de h pour décrire le volume en fonction d'une seule variable, la hauteur.

Un peu d'histoire

LA RECHERCHE DE LA TANGENTE

Approches de géométrie analytique

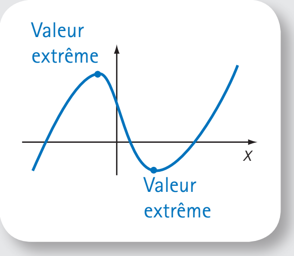
La cinématique et l'optique ont apporté des motivations nouvelles à la recherche de la tangente et de la normale à la courbe. Les méthodes qui se développent au XVIIe siècle nécessitent une réflexion sur le langage. La définition des mathématiciens grecs selon laquelle la tangente est « une droite touchant un cercle et qui étant prolongée ne le coupe point » n'est plus adaptée. Jusqu'au XVIIe siècle, la recherche de la tangente est un problème qui n'a été traité que pour le cercle d'abord, puis dans l'étude des coniques par Apollonius et par Archimède pour la spirale.

Avec Torricelli et Roberval, la courbe est devenue la trajectoire d'un point mobile et la tangente est la direction du mouvement de ce point. Dans cette optique, Roberval et Torricelli ont développé une méthode de résolution du problème de la tangente qui ne peut cependant se généraliser à toutes les courbes.

Il fallait innover dans la représentation des courbes et dans le langage utilisé. C'est ce que font René Descartes et Pierre de Fermat en développant les fondements de la géométrie analytique.

La démarche de Descartes est cependant limitée, il n'accepte dans sa géométrie que les courbes algébriques, c'est-à-dire les courbes qui sont exprimables par un nombre fini de combinaisons des quatre opérations de base, addition soustraction, multiplication et division.

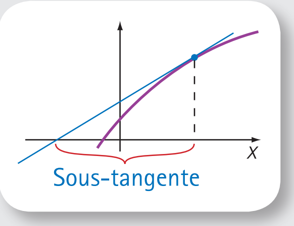
Grâce aux travaux de Fermat, la famille des courbes étudiées s'agrandit. Cette famille ne se restreint plus aux courbes que l'on peut obtenir par un procédé géométrique ou par un procédé mécanique. Pour Fermat, une équation qui contient deux quantités inconnues définit un lieu géométrique, c'est-à-dire une courbe. On peut donc considérer une équation quelconque et représenter celle-ci graphiquement. C'est une approche totalement nouvelle. Plutôt que d'établir l'équation d'une courbe à partir de ses propriétés géométriques, on écrit une équation et on cherche à en déterminer les caractéristiques graphiques. Parmi ces caractéristiques, Fermat s'intéresse aux « valeurs extrêmes » c'est-à-dire les valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction atteint sa valeur maximale ou sa valeur minimale (NH Fermat02).



Fermat utilisait la notation de François Viète qui ne nous est pas familière, mais en traduisant sa méthode dans la notation moderne, on constate qu'il est passé très proche de la méthode moderne pour déterminer la dérivée d'une fonction.

En considérant que la tangente est une droite qui coïncide avec une partie indéfiniment petite de la courbe, Fermat pose $f(x + h) = f(x)$, conscient du fait que pour « adégaler » des expressions, il faut que leur différence soit nulle, il utilise le terme » adégaler » pour désigner l'action de poser $f(x + h) = f(x)$. Cette façon de faire lui permet de déterminer les valeurs extrêmes de la fonction puisqu'au voisinage d'une valeur extrême, l'ordonnée de la courbe varie peu.

Fermat adapte ensuite cette méthode pour déterminer la tangente à une courbe. Il note d'abord que la tangente est entièrement connue si on peut déterminer son point de rencontre avec un axe et développe une approche se fondant sur cette observation. Il cherche donc la sous-tangente, c'est-à-dire la projection de la tangente sur un axe (NH Fermat03).



D'autres acteurs entrent en scène qui vont exploiter la représentation des courbes et franchir un pas de plus. Le mathématicien anglais Isaac Barrow (NH Barrow01) fait la même observation que Fermat et développe aussi une méthode pour déterminer la sous-tangente qu'il publie en 1670, un an après avoir démissionné de son poste de professeur. Isaac Newton (NH Newton01) lui succède à ce poste. Celui-ci reprend le concept de point générateur dans un contexte de géométrie analytique et, en décomposant le mouvement en déplacements parallèles aux axes, il développe la « méthode des fluxions » (NH Newton02). Par cette méthode, il considère que la variation de x et de y se fait en fonction du temps et la tangente est donnée par le rapport des vitesses de variation ou fluxions.

En Allemagne, Wlilhelm Gottfried von Leibniz pousse plus loin la réflexion sur le langage. Il précise ce qu'il faut entendre par « égalité » dans le contexte du calcul différentiel (NH Leibniz01) et s'inspire du triangle arithmétique de Pascal (NH Pascal04)pour développer le triangle harmonique (NH Leibniz02) qui est à la base de sa réflexion sur les séries infinies. Préoccupé par l'efficacité, Leibniz développe une notation qui facilite le traitement des problèmes (NH Leibniz03).

5.4 Exercices

1. Déterminer $\frac{dy}{dx}$ par dérivation implicite dans les relations suivantes :

a) $2x^2 + 3y^2 = 4$
b) $x^3 - xy = -6$
c) $x^2y^2 = 16$
d) $e^y - x^2 = 12$
e) $x^2e^y = x + y^2$
f) $e^{\sin y} - 3x^2 = y^2$
g) $y \ln x^2 + xy^2 = 0$

2. Dériver les expressions suivantes par rapport à t, puis isoler $\frac{dy}{dt}$.

a) $x^2 + y^2 = 9$
b) $x^2y^2 = 16$
c) $x^2e^{y^2} = 1$

3. Dans les situations suivantes, trouver la pente de la tangente à la courbe aux points indiqués si cette tangente est définie.

a) $xy^3 = 1$, aux points (1; 1) et (–1; –1).
b) $16x^2 + 4y^2 = 32$, aux points (1; 2) et (1; –2).
c) $y^2 + x^2y = 3x^2$, aux points (2; 2) et (0; 0).
d) $\ln(xy) = 2x$, aux points (1/2; 2e) et (1; e^2).
e) $2y^2 - xy^2 = x^3$, aux points (1; 1) et (1; –1).

4. Dans les situations suivantes, déterminer dans les conditions données, la valeur de $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{(a;b)}$.

a) $x^2 + y^2 = 10$, $a = 1$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(a;b)} = -1$.

b) $x^2y^2 = 16$, $a = 2$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(a;b)} = -1$.

c) $y^2 = x^3$, $a = 1$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(a;b)} = \frac{1}{2}$.

d) $\ln(xy) = 2x$, $a = 1$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(a;b)} = -1$.

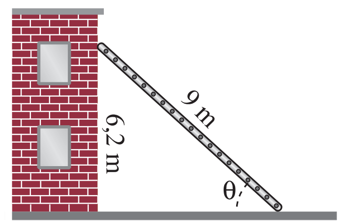
5. Dans les situations suivantes, déterminer en quels points la tangente à la courbe est horizontale et en quels points elle est verticale.

a) $x^2 + y^2 = 25$
b) $y^2 - 4y - 4x = 8$

6. Dans les situations suivantes, déterminer en quels points la tangente à la courbe est horizontale et en quels points elle est verticale et trouver l'équation de la tangente aux points dont l'abscisse est donnée.

a) $y^2 - 4y - 2x = 1$, abscisse –2.
b) $x^2 + xy - y^2 = 1$, abscisse 2.

7. Une échelle de 9 m est appuyée contre un mur. Le haut de l'échelle glisse au taux de 0,9 m/s vers le sol.



a) Estimer le taux de variation ponctuel en considérant un petit intervalle de temps $\Delta t = 0{,}01$ s.
b) Utiliser la dérivation implicite pour calculer le taux de variation de l'angle par rapport au temps t.

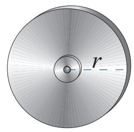
8. Du carburant s'échappe d'un pétrolier à un taux de 150 m^3/min et forme une nappe circulaire de 0,15 m d'épaisseur.

a) Estimer le taux de variation ponctuel en considérant un petit intervalle de temps $\Delta t = 0{,}01$ min.
b) Utiliser la dérivation implicite le taux d'accroissement du rayon de la nappe lorsque celui-ci est de 20 m; 40 m; 80 m.

9. On verse un liquide dans un réservoir de forme cylindrique dont le rayon est de 2 mètres et la hauteur, 6 mètres.

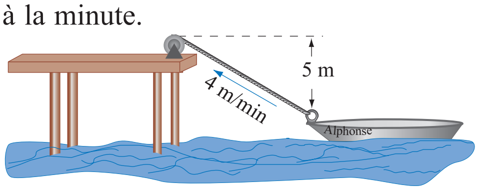
Si le liquide est versé à un taux de 3 m^3/min, déterminer à quel taux la hauteur du liquide s'élève dans le réservoir et le temps nécessaire pour remplir le réservoir.

10. Une plaque circulaire se dilate sous l'effet de la chaleur de telle sorte que son rayon croît uniformément de 0,2 cm/s.



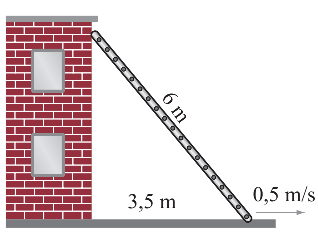
Quel est le taux de variation de l'aire de la surface du disque lorsque le rayon est de 10 cm?

11. La différence de niveau entre un quai et un bateau est de 5 mètres. Le bateau est tiré vers le quai par un câble qui s'enroule sur une poulie au taux de 4 m à la minute.



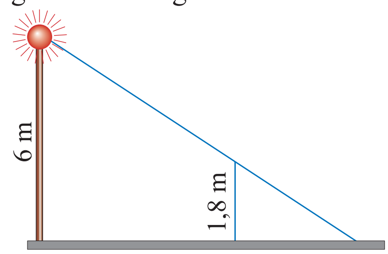
a) Estimer le taux de variation ponctuel lorsque le bateau est à 8 m du quai en considérant un petit intervalle de temps $\Delta t = 0{,}01$ min.
b) Estimer le taux de variation ponctuel lorsque le bateau est à 8 m du quai en considérant un petit intervalle de temps $\Delta t = 0{,}01$ min.
c) Calculer la vitesse du bateau lorsqu'il se trouve à 8 mètres du quai.
d) Calculer la vitesse du bateau lorsqu'il se trouve à 4 mètres du quai.

12. Une échelle de 6 mètres de long est appuyée contre un mur vertical. Le pied de l'échelle glisse à raison de 0,5 m/s.

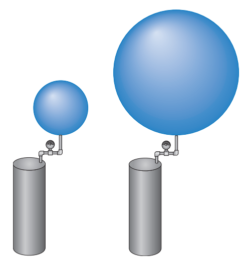


a) Estimer le taux de variation ponctuel lorsque le pied est à 3,5 m du mur en considérant un petit intervalle de temps $\Delta t = 0{,}01$ s.
b) Calculer par dérivation implicite la vitesse à laquelle glisse le haut de l'échelle lorsque le pied est à 3,5 m du mur

13. Un piéton mesurant 1,8 m s'éloigne d'un lampadaire de 6 m de haut à une vitesse de 3 km/h. Utiliser la dérivée pour calculer la vitesse à laquelle s'allonge son ombrage.



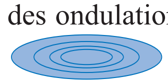
14. Un ballon sphérique est gonflé au taux de 100 cm^3/min. En supposant que la pression du gaz demeure constante,



a) Quel est le taux d'accroissement du rayon lorsque celui-ci est de 3 cm? 5 cm? 7 cm?
b) Quel est le taux d'accroissement de l'aire de la surface lorsque le rayon est de 3 cm? 5 cm? 7 cm? (Volume de la sphère, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ et l'aire de sa surface $A = 4\pi r^2$.)

15. Un cube de glace fond au taux de 20 cm^3/h. Trouver le taux de variation de la longueur d'une de ses arêtes lorsque celle-ci est de 10 cm; de 6 cm.

16. On lance une pierre dans l'eau et le taux de croissance du rayon des ondulations est de 0,2 m/s.



Quel est le taux de variation de l'aire de la surface ondulante lorsque le rayon est de 2 m? 4 m? 6 m?

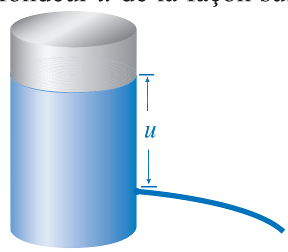
17. Le taux de variation du courant dans une résistance de 3 Ω est de 0,5 A/s. Trouver le taux de variation de la tension par rapport au temps.

18. La puissance dissipée dans une résistance de 2 Ω est décrite par $P = 2I^2$.
a) Exprimer le taux ponctuel de variation de la puissance en fonction du courant et du taux de variation du courant.

b) Si le courant est de 0,5 A et qu'il s'accroît de 0,02 A/s, trouver le taux ponctuel de variation de la puissance.

19. Considérons le réservoir d'eau illustré ci-dessous. L'équation de Bernoulli régissant le mouvement des liquides incompressibles décrit la vitesse d'éjection de l'eau par une petite ouverture aménagée dans la paroi à une profondeur u de la façon suivante :

$$v = (2gu)^{1/2}$$



En supposant que $g = 9{,}8$ m/s^2, on a alors :

$$v(u) = (19{,}6\ u)^{1/2} = 4{,}43\ u^{1/2}$$

À mesure que le liquide est éjecté, la hauteur u diminue et la vitesse d'éjection également. Le taux ponctuel de variation de la vitesse d'éjection v dépend de la variable u, mais celle-ci dépend du temps t.

a) Déterminer le taux de variation de la vitesse d'éjection en fonction du temps t.
b) Quelle est la vitesse d'éjection de l'eau lorsque la profondeur u est de 2 m?

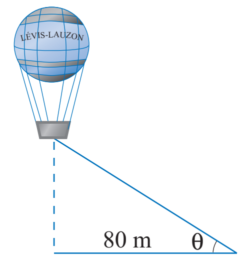
20. On verse du sable sur un tas de forme conique à un taux de 2 m^3/min et le sable se répartit sur le tas de telle sorte que le rayon du cône est toujours la moitié de sa hauteur.

a) Estimer le taux de variation de la hauteur lorsque celle-ci est de 1,5 m.
b) Utiliser la dérivée pour calculer le taux de variation de la hauteur lorsque celle-ci est de 1,5 m.
c) Utiliser la dérivée pour calculer le taux de variation de la hauteur lorsque celle-ci est de 3 m.

21. Considérons un circuit dont la résistance totale est de 2 Ω. La relation $V = 2I$ décrit alors la relation entre la tension et le courant dans ce circuit.

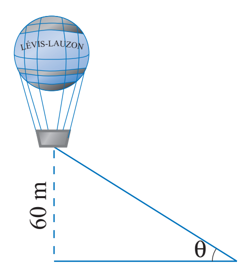
a) Représenter graphiquement le taux de variation du courant par rapport au temps durant l'intervalle de [0; 30], sachant que durant l'intervalle de temps [0; 10[, le taux de variation du courant est de 0,2 A/s et qu'il est nul durant l'intervalle [10, 20[et qu'il est égal à –0,2 A/s durant l'intervalle [20, 30].
b) Trouver le taux de variation de la tension durant l'intervalle de [0;30] et représenter graphiquement ce taux.

22. On filme une montgolfière qui s'élève verticalement de 10 m/min. La distance entre la caméra et la verticale du ballon est de 80 m.



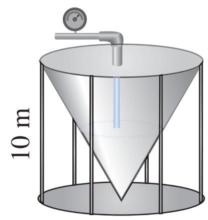
a) Déterminer le taux de variation de l'angle θ lorsque l'angle est de 30°, de 45°, de 60°.
b) Déterminer le taux de variation de l'angle θ lorsque la montgolfière est à une altitude de 30 m, de 50 m.
c) Comment expliquer le fait que le taux de variation de l'angle ne soit pas constant?
d) Comment expliquer le signe du taux de variation de l'angle?
e) Quelle devrait-être la position du ballon pour que le taux de variation de l'angle soit maximal?

23. Une montgolfière qui se déplace horizontalement s'éloigne d'un observateur à une vitesse constante de 8 m/min et en conservant une altitude constante de 60 m.



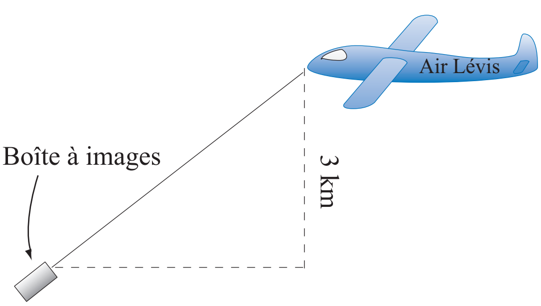
a) Déterminer le taux de variation de l'angle θ lorsque l'angle est de 90°, 60°, de 45°, de 30°.
b) Déterminer le taux de variation de l'angle θ lorsque la montgolfière est à une distance de 30 m de l'observateur, 60, 90 m.
c) Comment expliquer le fait que le taux de variation de l'angle ne soit pas constant?
d) Comment expliquer le signe du taux de variation de l'angle?
e) Quelle devrait-être la position du ballon pour que le taux de variation de l'angle soit maximal?

24. Un réservoir a la forme d'un cône inversé. de 10 m de diamètre et de 10 m de hauteur. On y verse de l'essence au taux de 0,2 m^3/s.



a) Déterminer la vitesse à laquelle monte le niveau d'essence lorsqu'il est à 2 m, à 4 m et à 8 m.
b) Comment expliquer le fait que le taux de variation du niveau ne soit pas constant?

25. Un avion vole à une vitesse de 800 km/h, selon une trajectoire horizontale à une altitude constante de 3 km. Un appareil photographique, installé au sol, dirige son objectif vers l'avion afin de prendre une série de photos.



a) Quel est le taux de variation instantané de l'angle d'élévation de l'appareil photographique au moment où la distance entre l'avion et l'appareil photographique est de 5 km?
b) Quel est le taux de variation de la distance entre l'appareil photographique et l'avion au même moment?

Dériver les fonctions suivantes :

26. $f(x) = \log_2 (2x^2 - 3)$

27. $f(x) = x^4 \log_3 (x^2)$

28. $f(x) = \log_3 (\sin x)$

29. $f(x) = 2^x \log_2 x^2$

30. $f(x) = \log_2\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$

31. $f(x) = \sqrt{\log_2 (x^2)}$

32. $f(x) = \sin(\log_2 x^2)$

33. $f(x) = \sin x(\log_3 x^3)$

34. $f(x) = \log_5\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

Utiliser la procédure de dérivation implicite pour déterminer $\dfrac{dy}{dx}$.

35. $e^y - \ln x = e^x$
36. $\log_2 y = x \ln x$
37. $x \cos y = \ln x$
38. $x \sin y = \ln xy$
39. $y \cos x = e^x \ln x$
40. $y \sin x = x^2 \ln y$

41. En appliquant la procédure de changement de base à la fonction définie par $y = \log_a x$, montrer que :

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

Sachant que $\ln e = 1$, utiliser la formule de changement de base pour montrer que :

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e.$$

42. Des chercheurs ont réalisé une étude sur la concentration d'alcool en fonction du temps écoulé depuis son ingestion. Ils ont obtenu le modèle suivant.

$$C(t) = 5(3^{-1,8t} - 3^{-2,7t}) \text{ g/dl},$$

où t est le temps en heures et C, la concentration en g/dl. Déterminer combien de temps après son ingestion la concentration dans le sang atteint un maximum.