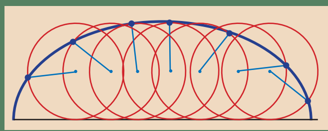


Pour décrire la fascination qu'elle a exercée sur les mathématiciens, la cycloïde a déjà été appelée l'*Hélène des mathématiques.* En référence bien sûr à Hélène, fille de Lynda et de Tyndare. Courtisée par tous les rois grecs, elle a choisi comme époux Ménélas, le roi de Sparte. L'enlèvement d'Hélène par le prince Troyen Pâris, qui en était follement amoureux, a causé la guerre de Troie. La cycloïde n'a pas déclenché de guerre, mais elle a été courtisée par plusieurs mathématiciens.

La cycloïde

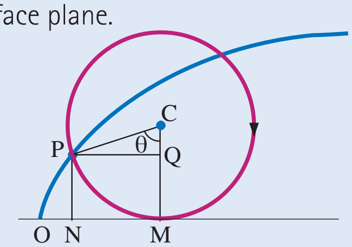
NH Mersenne

NH Galilée

La cycloïde est la courbe décrite par un point sur la circonférence d'un cercle qui roule en ligne droite sans glisser. Elle fut étudiée pour la première fois par Nicolas de Cues (1401-1464) dans une tentative pour calculer l'aire d'un cercle. C'est Galilée (1564-1642) qui a nommé la courbe[1] en 1599. Marin Mersenne (1588-1648) en a énoncé les propriétés évidentes comme le fait que la longueur de la base est égale à la circonférence du cercle générateur. Il a tenté de trouver l'aire sous la courbe mais n'y parvenant pas il a posé le problème aux mathématiciens de son époque.

Description paramétrique de la cycloïde

On obtient assez facilement une description paramétrique de la cycloïde en considérant un point P sur un cercle de rayon r qui roule sans glisser sur une surface plane.



Puisque le cercle roule sans glisser,

$$\overline{OM} = \text{arc}\,\widehat{MP} = r\theta,$$

où θ est en radians.

1. Pascal appelait cette courbe *La Roulette* et il a fait paraître en 1658 le traité *Histoire de la roulette* sous le pseudonyme Amos Dettonville.

Dans le triangle CPQ, on a :

$$\overline{PQ} = r\sin\theta \text{ et } \overline{QC} = r\cos\theta,$$

$$\text{où } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

En représentant le point P par $(x;\, y)$, on a :

$$x = \overline{ON} = \overline{OM} - \overline{MN} = \text{arc}\,\widehat{MP} - \overline{PQ}$$
$$= r\theta - r\sin\theta$$
$$y = \overline{NP} = \overline{MQ} = \overline{MC} - \overline{QC}$$
$$= r - r\cos\theta$$

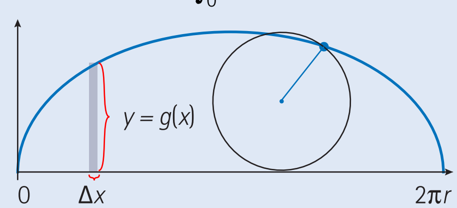
La description paramétrique de la cycloïde est donc :

$$x = r\,(\theta - \sin\theta)$$
$$y = r\,(1 - \cos\theta).$$

Aire sous la courbe

L'aire sous l'arc de cycloïde engendrée par la rotation d'un cercle de rayon r est définie par :

$$A = \int_0^{2\pi r} g(x)\,dx$$



La fonction $y = g(x)$ n'est pas connue de façon explicite, mais elle est définie par la description paramétrique de la cycloïde. Pour intégrer, on effectue le changement de variable suivant :

$$g(x) = y(\theta) \text{ et } dx = x'(\theta)\,d\theta$$

Puisqu'on effectue un changement de variable, il faut redéfinir l'intervalle d'intégration :
si $x = 0$, on a $\theta = 0$ et si $x = 2\pi r$, $\theta = 2\pi$.
Ce qui donne :

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi r} g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} y(\theta)\,x'(\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\times r(1-\cos\theta)\,d\theta \\ &= r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta \\ &= r^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta\end{aligned}$$

L'intégrale d'une somme de fonctions est égale à la somme des intégrales de ces fonctions. En effectuant séparément ces intégrales, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} d\theta = \theta]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi,$$

$$\begin{aligned}-2\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta &= -2\sin\theta]_0^{2\pi} \\ &= -2(\sin 2\pi - \sin 0) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi}\cos 2\theta d\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\theta]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{2\pi}\right) \\ &= \frac{1}{2}(2\pi - 0) + \frac{1}{2}(\sin 4\pi - \sin 0) \\ &= \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \pi.\end{aligned}$$

La somme de ces intégrales donne alors :

$$\begin{aligned}A &= r^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right)d\theta \\ &= r^2(2\pi+\pi) = 3\pi r^2.\end{aligned}$$

C'est le résultat auquel était parvenu Gilles Personne de Roberval (1602-1675). L'aire sous la cycloïde est trois fois l'aire du cercle générateur. Le calcul intégral confirme le résulta que Roberval a obtenu par la méthode des indivisibles.

Rectification de la cycloïde

La *rectification d'une courbe* signifie le calcul de sa longueur. Celle de la cycloïde est due à l'architecte et mathématicien anglais sir Christopher Wren. Par les méthodes modernes, on dispose d'une description paramétrique de la courbe, la longueur de celle-ci dans l'intervalle $[0;\, 2\pi]$ est obtenue par l'intégrale :

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

En substituant les dérivées de x et de y dans cette expression, on obtient :

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(1-\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta^2+\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta^2+\sin^2\theta}\,d\theta \\ &= r\int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+1}\,d\theta \\ &= r\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta \\ &= r\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta \\ &= r\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta \\ &= 2r\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta\end{aligned}$$

L'intervalle de variation de θ est $[0;\, 2\pi]$, celui de $\theta/2$ est donc $[0;\, \pi]$ et dans cet intervalle, $\sin(\theta/2) \geq 0$. Par conséquent :

$$\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

En effectuant l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}L &= 2r\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta \\ &= 2r\left(-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\Bigg]_0^{2\pi} \\ &= -4r(-1-1) = 8\pi.\end{aligned}$$

La longueur de l'arc de la cycloïde est dont huit fois le rayon du cercle générateur. C'est le résultat très simple obtenu par Christopher Wren. Descartes croyait que la longueur d'une ligne courbe n'était jamais commensurable à une ligne droite. Le résultat de Wren prouvait le contraire, la cycloïde et le rayon de son cercle générateur ont une commune mesure.

Preuve par contre-exemple
Le résultat obtenu par Wren constitue un contre-exemple de la conjecture de Descartes sur la non commensurabilité d'une ligne courbe et d'une ligne droite.

NH Roberval
NH Descartes