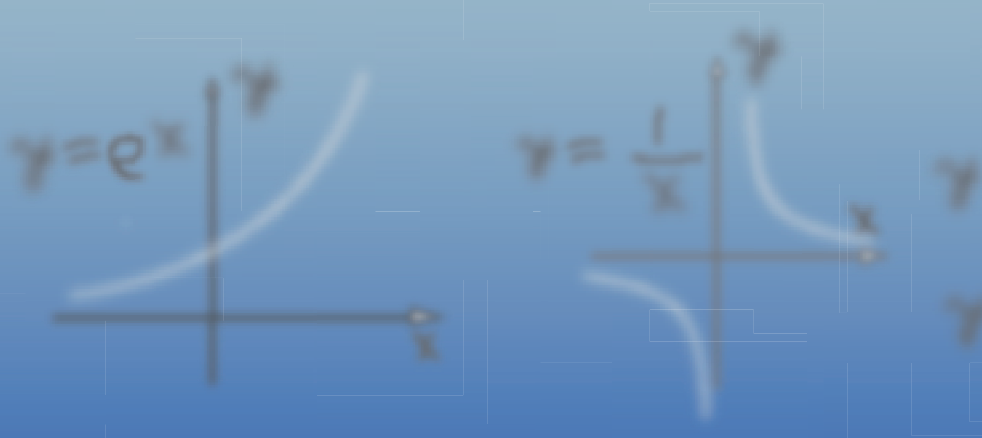


MATRICES *et* DÉTERMINANTS

CHAPITRE 11

Résoudre des problèmes en utilisant les matrices et les déterminants.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- l'utilisation des matrices pour structurer de l'information;
- l'exécution d'opérations sur des matrices;
- l'utilisation des propriétés des opérations matricielles;
- le calcul d'un déterminant d'ordre 2 ou 3;
- la résolution de problèmes à l'aide de déterminants.

OBJECTIFS

11.1 Effectuer les opérations d'addition de matrices et de multiplication d'une matrice par un scalaire.

11.2 Effectuer la multiplication de matrices.

11.3 Interpréter selon le contexte le résultat d'opérations sur des matrices.

11.3 Résoudre des systèmes d'équations à l'aide de la méthode de Cramer.

11.1 MATRICE

Lorsqu'on doit traiter de l'information portant sur plusieurs variables, il est parfois très efficace de représenter les valeurs des différentes variables sous forme de tableaux de nombres appelés **matrices**. Dans un tableau de ce type, une position précise est assignée à chaque valeur. Nous allons présenter les opérations sur des matrices et employer celles-ci pour traiter de l'information.

Mise en situation

Matrices01

Une petite entreprise emploie deux marchands ambulants qui vendent des jus dans les parcs de la municipalité la fin de semaine. Les tableaux suivants indiquent le nombre de bouteilles vendues en une fin de semaine.

PARC BEAUSÉJOUR

	Jus		
Jour	Orange	Raisin	Pomme
Vendredi	27	43	33
Samedi	36	68	58
Dimanche	39	55	49

PARC DE LA MAIRIE

	Jus		
Jour	Orange	Raisin	Pomme
Vendredi	38	63	43
Samedi	46	72	65
Dimanche	42	63	58

Le tableau qui suit donne le prix de vente et le coût unitaire de chaque sorte de jus.

Jus	Prix	Coût
Orange	1,00	0,40
Raisin	1,40	0,60
Pomme	1,20	0,50

REMARQUE
Toute information concernant les composantes d'une matrice sont données dans l'ordre ligne-colonne.

On structure de diverses façons l'information contenue dans les tableaux, selon le traitement désiré. Comme les en-têtes ne sont pas indispensables au traitement des données, on note simplement :

$$B = \begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 38 & 63 & 43 \\ 46 & 72 & 65 \\ 42 & 63 & 58 \end{pmatrix}$$

De tels tableaux de nombres sont appelés des **matrices**. On emploie souvent une lettre majuscule pour désigner une matrice particulière. Ainsi, la matrice qui donne les ventes au parc Beauséjour est représentée par la lettre B, et la matrice M indique les ventes au parc de la Mairie.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrice m par n

Matrice

On appelle **matrice** tout tableau rectangulaire ayant la forme illustrée ci-contre, où les a_{ij} sont les **éléments**; l'indice i indiquant la ligne de l'élément et l'indice j sa colonne. Ces indices donnent l'**adresse** de chacun des éléments. Une matrice formée de m lignes et de n colonnes est dite de **dimension** $m \times n$ (qui se lit « m par n »).

Ainsi, la matrice donnée ci-contre est une matrice de dimension 3×4 (qui se lit « 3 par 4 »), puisqu'elle est formée de trois lignes et de quatre colonnes. Dans cette matrice, l'élément a_{23} est –2 : c'est l'élément de la deuxième ligne et de la troisième colonne. On dit que l'élément a_{23} est l'élément d'*adresse* 23, qui se lit « deux trois » et non « vingt-trois ».

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de dimension 3 par 4.

Notation

On représente généralement une matrice par une lettre majuscule A, B, C, etc. Lorsqu'il est nécessaire de préciser la dimension d'une matrice, on écrit $A_{m\times n}$, qui désigne une matrice A de dimension $m \times n$. L'ensemble des matrices de dimension $m\times n$ est noté $\mathbf{M}_{m\times n}$. Ainsi, on note $\mathbf{M}_{2\times 3}$ l'ensemble de toutes les matrices de dimension 2×3. Pour des matrices dont les éléments sont inconnus, on emploie la majuscule X, Y ou Z. On peut également représenter par (a_{ij}) ou $(a_{ij})_{m\times n}$ la matrice de dimension m par n formée des éléments a_{ij}. Dans une matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

les éléments de la ligne i

$$(a_{i1}; a_{i2}; ...; a_{ij}; ...; a_{in})$$

forment le i^{e} **vecteur ligne** de la matrice. De façon analogue, les éléments de la colonne j

$$(a_{1j}; a_{2j}; ...; a_{ij}; ...; a_{mj})$$

forment le j^{e} **vecteur colonne** de la matrice.

REMARQUE
On ne doit pas confondre a_{ij}, qui représente un élément, avec (a_{ij}), qui représente une matrice dont les éléments sont les a_{ij}. Dans la plupart des situations présentées dans le présent ouvrage, les éléments des matrices seront des nombres réels ou des lettres représentant des nombres réels.

Égalité de matrices

Deux matrices $A_{m\times n}$ et $B_{p\times q}$ sont **égales** si et seulement si :

- les deux matrices ont la même dimension ($m = p$ et $n = q$);
- les éléments de même adresse sont égaux ($a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et pour tout j).

On emploie le signe d'égalité usuel comme symbole de l'égalité de deux matrices.

REMARQUE
Dans la définition de l'égalité de deux matrices, a_{ij} et b_{ij} désignent les éléments de même adresse des matrices A et B respectivement. La condition $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et pour tout j signifie que tous les éléments ayant la même adresse doivent être égaux pour que les matrices soient égales.

EXEMPLE 11.1.1

Déterminer les éléments a_{ij} tels que les matrices A et B suivantes sont égales

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution

Les matrices A et B sont égales *si et seulement si*

$$a_{11} = 5, a_{12} = -2, a_{21} = 3 \text{ et } a_{22} = 4.$$

REMARQUE

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Opérations sur des matrices

On peut effectuer directement des opérations permettant sur des matrices pour en tirer différents éléments d'information. Dans la mise en situation, si on veut connaître, pour chaque journée et chaque sorte de jus, le total des ventes dans les deux parcs, on fait la somme des éléments de même adresse des matrices B et M.

Matrices02

$$B+M=\begin{pmatrix}27 & 43 & 33\\ 36 & 68 & 58\\ 39 & 55 & 49\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}38 & 63 & 43\\ 46 & 72 & 65\\ 42 & 63 & 58\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}65 & 106 & 76\\ 82 & 140 & 123\\ 81 & 118 & 107\end{pmatrix}$$

REMARQUE

La **somme** de deux matrices est définie si et seulement si elles ont la même dimension. On l'obtient en additionnant les éléments de même adresse. Deux matrices de même dimension sont dites **compatibles** pour l'addition matricielle.

Addition de matrices

Somme de matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, deux matrices de dimension $m\times n$. La **somme** de ces matrices, notée $A + B$, est une matrice de dimension $m\times n$ définie par

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

EXEMPLE 11.1.2

Effectuer la somme des matrices A et B suivantes.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 2 & -7 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 5 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Solution

Matrices03

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 2 & -7 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\ 5 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ 7 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

Multiplication d'une matrice par un scalaire

On peut tirer plusieurs matrices du tableau des prix et des coûts de la mise en situation. Par exemple, on peut écrire une matrice des prix de dimension 3×1, une matrice des coûts de dimension 3×1 ou simplement une matrice des prix et des coûts de dimension 3×2.

$$P=\begin{pmatrix}1{,}00\\ 1{,}40\\ 1{,}20\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}0{,}40\\ 0{,}60\\ 0{,}50\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1{,}00 & 0{,}40\\ 1{,}40 & 0{,}60\\ 1{,}20 & 0{,}50\end{pmatrix}$$

Supposons que le propriétaire de l'entreprise envisage de majorer ses prix de 20%. Quelle serait alors la nouvelle matrice des prix? On l'obtient en multipliant simplement chaque élément de la matrice des prix par 1,2,

$$(1+0{,}20)P=1{,}2P=\begin{pmatrix}1{,}2\times 1{,}00\\ 1{,}2\times 1{,}40\\ 1{,}2\times 1{,}20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}20\\ 1{,}68\\ 1{,}44\end{pmatrix}$$

L'opération qui a servi à calculer le nouvelle matrice des prix tenant compte de l'augmentation et qui consiste à multiplier chaque élément d'une matrice par un scalaire (ou nombre) s'appelle **multiplication par un scalaire**. Elle est définie comme suit.

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})$, une matrice $m \times n$ et k, un scalaire (ou nombre). La **multiplication** de la matrice A par le scalaire k donne une matrice, notée kA, définie par l'égalité

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij}).$$

Cette équation signifie que chaque élément de la matrice A est multiplié par le scalaire k.

REMARQUE
Dans la plupart des cas étudiés dans le présent ouvrage, les scalaires sont des nombres réels.

EXEMPLE 11.1.3

Calculer $3A$ et kA, sachant que

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution

$$3A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ 12 & -6 & 15 \end{pmatrix} \text{ et } kA = \begin{pmatrix} -2k & 3k & k \\ 4k & -2k & 5k \end{pmatrix}.$$

En multipliant la matrice A par le scalaire –1, on obtient une matrice notée $-A$. Il suffit en fait d'inverser le signe de chacun des éléments de la matrice A. Ainsi, en multipliant par le scalaire –1 la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \text{ on obtient la matrice } -A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

L'addition de ces deux matrices donne

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat est une matrice dont tous les éléments sont nuls. On l'appelle **matrice nulle**.

REMARQUE
La matrice nulle de dimension $m \times n$ est l'élément neutre pour l'addition de matrices de dimension $m \times n$. Cela signifie qu'en additionnant une matrice $A_{m\times n}$ et la matrice $0_{m\times n}$ on obtient la matrice $A_{m\times n}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrice nulle

La **matrice nulle** de dimension $m \times n$ est la matrice, notée $0_{m\times n}$, dont tous les éléments sont nuls.

Propriétés des opérations

Les propriétés des opérations d'addition de matrices et de multiplication d'une matrice par un scalaire sont présentées ci-dessous. Il est à noter que les propriétés de l'addition de matrices sont analogues à celles de l'addition de nombres réels.

PROPRIÉTÉS

Opérations d'addition et de multiplication par un scalaire

Pour tout A, B et $C \in \mathbf{M}_{m\times n}$ et pour tout p et $q \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Fermeture de l'addition :
$$A + B \in \mathbf{M}_{m\times n}.$$
2. Commutativité de l'addition :
$$A + B = B + A.$$
3. Associativité de l'addition des matrices
$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$
4. Existence d'un élément neutre pour l'addition :
Il existe, dans $\mathbf{M}_{m\times n}$, une matrice nulle, notée 0, telle que :
$$A + 0 = 0 + A = A.$$
5. Existence d'un élément opposé pour l'addition:
Pour toute matrice $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$, il existe, dans $\mathbf{M}_{m\times n}$, une matrice opposée, notée $-A$, telle que :
$$A + (-A) = (-A) + A = 0.$$
6. Fermeture de la multiplication par un scalaire sur l'ensemble des matrices :
$$pA \in \mathbf{M}_{m\times n}.$$
7. Distributivité de la multiplication d'une matrice par un scalaire par rapport à l'addition de scalaires :
$$(p + q)A = pA + qA.$$
8. Distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition de matrices :
$$p(A + B) = pA + pB.$$
9. Associativité de la multiplication d'une matrice avec le produit de scalaires :
$$(pq)A = p(qA).$$
10. Existence d'un élément neutre pour la multiplication d'une matrice par un scalaire :
$$1A = A.$$

REMARQUE

Une **structure algébrique** est un ensemble muni d'opérations qui satisfont à certaines conditions. La qualité d'une structure dépend des propriétés des opérations définies sur les éléments de l'ensemble. Ainsi, un ensemble muni d'une opération d'addition pour laquelle les cinq premières propriétés de la liste ci-contre sont satisfaites a une **structure de groupe abélien**.

ProduitMatrice03

Transposition d'une matrice

Matrice transposée

Soit A, une matrice de dimension $m\times n$. On appelle **matrice transposée** de A, notée A^t, la matrice de dimension $n\times m$ dont la i^e ligne est la i^e colonne de A pour $i = 1, 2, ..., m$. Ainsi, la matrice transposée de la $A = (a_{ij})_{m\times n}$ est la matrice définie par
$$A^t = (b_{ij})_{n\times m} \text{ où } b_{ij} = a_{ji}.$$

REMARQUE

Il est à noter que si $A = (a_{ij})_{m\times n}$, la transposée de A est $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ où j désigne une colonne de A et i une ligne de A. On peut décrire l'effet de la transposition sur les éléments de A de la façon suivante :
$$[(a_{ij})_{m\times n}]^t = (a_{ji})_{n\times m}$$
Il est facile de se convaincre que
$$[A^t]^t = A.$$

Autrement dit, l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice A est l'élément de la ligne j et de la colonne i de la matrice transposée. De plus, si la matrice A est de dimension $m \times n$, la dimension de la matrice transposée est $n \times m$. Les matrices suivantes sont la transposée l'une de l'autre :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^{t} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices particulières

Il existe plusieurs matrices particulières auxquelles on donne un nom descriptif.

Matrice carrée et diagonales principale et secondaire

Une **matrice carrée d'ordre n** est une matrice formée de n lignes et n colonnes. Dans une matrice carrée, les éléments a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} constituent la **diagonale principale**. L'autre diagonale est appelée **diagonale secondaire**.

Diagonale principale

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \\ -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonale secondaire

Matrice triangulaire

Une matrice carrée est dite **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$, pour tout $i > j$, c'est-à-dire que tous les éléments situés sous la diagonale principale sont nuls.

Une matrice carrée est dite **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$, pour tout $i < j$, c'est-à-dire que tous les éléments situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

Les matrices A et B ci-dessous sont respectivement triangulaire supérieure, et triangulaire inférieure.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matrice symétrique et matrice antisymétrique

Une matrice carrée est dite **symétrique** si :

$$A^{t} = A.$$

Une matrice carrée est dite **antisymétrique** si :

$$A^{t} = -A.$$

REMARQUE

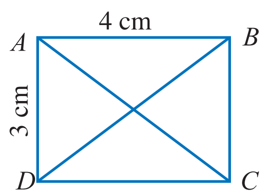
Sur une carte routière, dans la matrice des distances entre deux villes, on omet généralement soit la partie supérieure, ou la partie inférieure, car ce type de matrice est symétrique.

La diagonale principale d'une matrice antisymétrique ne comporte que des zéros.

Les matrices C et D ci-dessous sont respectivement symétrique et antisymétrique.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -5 \\ 6 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices ont de nombreuses applications, voici un exemple.



REMARQUE

La matrice donnée ci-contre correspond au tableau suivant, les en-têtes de lignes et de colonnes représentant les sommets du rectangle en moins.

	A	B	C	D
A	0	4	5	3
B	4	0	3	5
C	5	3	0	4
D	3	5	4	0

EXEMPLE 11.1.4

Soit un rectangle dont les côtés mesurent respectivement 3 cm et 4 cm. Construire une matrice M dont l'élément a_{ij} représente la distance géométrique entre les sommets i et j du rectangle.

Solution

Puisque la figure a quatre sommets, la matrice est de dimension 4×4. La distance du sommet A au sommet C est donnée par le théorème de Pythagore; elle est de 5 cm.

La matrice recherchée est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice symétrique, comme on s'y attend dans le cas d'une matrice donnant les distances entre différents points.

Matrice diagonale et matrice scalaire

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice scalaire

Une matrice carrée est une **matrice diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$, c'est-à-dire si tous les éléments situés hors de la diagonale principale sont nuls.

Si tous les éléments non nuls d'une matrice diagonale sont égaux, elle est dite **scalaire**.

Matrice identité

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice identité

Une **matrice identité d'ordre** n, notée I_n, est une matrice scalaire où tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Multiplication de matrices

Revenons à la petite entreprise qui emploie deux marchands ambulants pour vendre du jus dans les parcs de la municipalité la fin de semaine. Les tableaux suivants indiquent le nombre de bouteilles vendues en fin de semaine.

ProduitMatrice01

PARC BEAUSÉJOUR

Jour	Jus Orange	Raisin	Pomme
Vendredi	27	43	33
Samedi	36	68	58
Dimanche	39	55	49

PARC DE LA MAIRIE

Jour	Jus Orange	Raisin	Pomme
Vendredi	38	63	43
Samedi	46	72	65
Dimanche	42	63	58

Le prix de vente et le coût unitaire des jus (en dollars) sont les suivants.

Jus	Prix	Coût
Orange	1,00	0,40
Raisin	1,40	0,60
Pomme	1,20	0,50

Le propriétaire de l'entreprise veut calculer les revenus quotidiens au parc Beauséjour durant une fin de semaine. Pour ce faire, il doit additionner les produits du nombre de jus de chaque sorte par le prix de vente correspondant. En notant P la matrice 3×1 des prix de vente, il obtient

$$B \bullet P = \begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}40 \\ 1{,}20 \end{pmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 126{,}80 \\ 200{,}80 \\ 174{,}80 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Vendredi} \\ \text{Samedi} \\ \text{Dimanche} \end{array} \end{array}$$

REMARQUE
Il est à noter que la matrice B comprend une ligne pour chaque jour de fin de semaine et qu'il en est de même de la matrice produite $B \bullet P$.

Il est à noter qu'il s'agit du produit d' une matrice 3×3 et d'une matrice 3×1, et que le résultat est une matrice 3×1. Si on effectue la même opération en remplaçant la matrice des prix par celle des prix et des coûts unitaires, on obtient simultanément les revenus et les coûts quotidiens.

$$B \bullet A = \underbrace{\begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix}}_{3\times3} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}40 \\ 1{,}40 & 0{,}60 \\ 1{,}20 & 0{,}50 \end{pmatrix}}_{3\times2} = \begin{array}{cl} \begin{array}{cc} \text{Revenus} & \text{Coûts} \end{array} & \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 126{,}80 & 53{,}10 \\ 200{,}80 & 84{,}20 \\ 174{,}80 & 73{,}10 \end{pmatrix}}_{3\times2} & \begin{array}{l} \text{Vendredi} \\ \text{Samedi} \\ \text{Dimanche} \end{array} \end{array}$$

Compatibilité

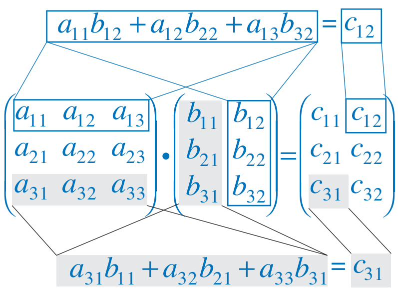
Dimension du produit

REMARQUE
Si, pour résoudre un problème concret, on se demande quelle opération il faut effectuer, on doit examiner la dimension des matrices. Dans la mise en situation, on multiplie une matrice 3×3 et une matrice 3×2; il est à noter que le 3 indiquant le nombre de colonnes correspond aux trois sortes de jus, tout comme le 3 dans les dimensions de la matrice 3×2.

REMARQUE

La multiplication de deux matrices est définie seulement si le nombre de colonnes de la matrice à gauche du symbole d'opération est égal au nombre de lignes de la matrice à droite du symbole d'opération.

$$A_{m\times p} \bullet B_{p\times n} = C_{m\times n}$$



Multiplication de matrices

ProduitMatrice02

Multiplication de deux matrices

Soit $A = (a_{ik})_{m\times p}$ et $B = (b_{kj})_{p\times n}$, deux matrices. Le **produit** de ces matrices, noté $A \bullet B$ (ou simplement AB), est une matrice $C = (c_{ij})_{m\times n}$ dont les éléments c_{ij} sont définis par

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} \text{ pour tout } i \text{ et pour tout } j.$$

La dernière égalité signifie que l'élément c_{ij} résulte du produit scalaire du i^e vecteur ligne de la matrice A et du j^e vecteur colonne de la matrice B. Ainsi, l'élément de la première ligne et de la deuxième colonne, soit c_{12}, s'obtient en effectuant le produit de la première ligne de la matrice à gauche du symbole d'opération par la deuxième colonne de la matrice à droite du symbole d'opération. De même, l'élément c_{31} résulte du produit de la troisième ligne de la matrice à gauche du symbole d'opération par la première colonne de la matrice à droite du symbole d'opération.

EXEMPLE 11.1.5

Effectuer l'opération matricielle indiquée sur les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

a) $A \bullet B$ b) $B \bullet A$ c) $A^t \bullet B^t$ d) $B^t \bullet A^t$

Solution

a) Les matrices sont compatibles et le produit est

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3} \bullet \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

b) Les matrices sont compatibles et le produit est

$$B \bullet A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 13 & -10 & 51 \\ -1 & -2 & 57 \\ -1 & 0 & 13 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

c) Les matrices sont compatibles et le produit est

$$A^t \bullet B^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} \bullet \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 13 & -1 & -1 \\ -10 & -2 & 0 \\ 51 & 57 & 13 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

c) Les matrices sont compatibles et le produit est

$$B^t \bullet A^t = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Propriétés des opérations matricielles

En examinant les résultats des opérations du dernier exemple, on constate que

$$A \bullet B \neq B \bullet A$$

La multiplication de matrice n'est donc pas une opération commutative. On constate également que

$$(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t$$

et : $$(B \bullet A)^t = A^t \bullet B^t.$$

Cet exemple illustre des propriétés de la multiplication de matrice que nous énonçons sans les démontrer.

REMARQUE

La matrice identité d'ordre n est l'élément neutre de la multiplication des matrices du même ordre. Cela signifie que lorsqu'on multiplie une matrice $A_{n \times n}$ par la matrice identité $I_{n \times n}$, le résultat est la matrice $A_{n \times n}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Elle est également neutre pour la multiplication à droite et la multiplication à gauche avec des matrices compatibles.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉS

Propriétés de la multiplication de matrice

Pour toutes matrices A, B et C de dimensions appropriées et pour tout scalaire p et q, la multiplication de matrice possède les propriétés suivantes.

1. Distributivité à gauche sur l'addition matricielle :
$$A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C).$$
2. Distributivité à droite sur l'addition matricielle :
$$(A + B) \bullet C = (A \bullet C) + (B \bullet C).$$
3. Associativité de la multiplication de matrices :
$$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C.$$
4. Existence d'un élément neutre pour la multiplication de matrices :
$$A_{m \times n} \bullet I_n = A_{m \times n}$$
$$I_n \bullet B_{n \times m} = B_{n \times m}.$$
5. Associativité pour la multiplication par un scalaire :
$$pA \bullet qB = pq(A \bullet B).$$

PROPRIÉTÉS

Propriétés de la transposition des matrices

Pour toutes matrices A et B de dimensions appropriées et pour tout scalaire k, la transposition possède les propriétés suivantes.

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t$
4. $(kA)^t = kA^t$

Résolution de problèmes

Revenons à la mise en situation (marchands ambulants). En multipliant les matrices transposées A et B^t, on obtient

REMARQUE

La poursuite de la mise en situation montre bien qu'il est possible d'utiliser plus d'une opération matricielle pour répondre à une question.

$$A^t \bullet B^t = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1{,}00 & 1{,}40 & 1{,}20 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}50 \end{pmatrix}} \bullet \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 27 & 36 & 39 \\ 43 & 68 & 55 \\ 33 & 58 & 49 \end{pmatrix}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Vendredi} & \text{Samedi} & \text{Dimanche} \end{array} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 126{,}80 & 200{,}80 & 174{,}80 \\ 53{,}10 & 84{,}20 & 73{,}10 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \end{array} \begin{array}{l} \text{Revenus} \\ \text{Coûts} \end{array}$$

Compatibilité

Dimension du produit

Le produit est une matrice 2×3 qui donne les revenus et les coûts pour chacun des jours de fin de semaine. Elle est effectivement égale à la transposée de la matrice donnant la même information sur deux colonnes, calculée plus haut. :

ProduitMatrice04

$$B \bullet A = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix}} \bullet \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}40 \\ 1{,}40 & 0{,}60 \\ 1{,}20 & 0{,}50 \end{pmatrix}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Revenus} & \text{Coûts} \end{array} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 126{,}80 & 53{,}10 \\ 200{,}80 & 84{,}20 \\ 174{,}80 & 73{,}10 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \end{array} \begin{array}{l} \text{Vendredi} \\ \text{Samedi} \\ \text{Dimanche} \end{array}$$

Compatibilité

Dimension du produit

REMARQUE

Ne pas oublier que pour établir l'opération à effectuer, il faut tenir compte des dimensions des matrices et des unités associées à ces dimensions.

$1 \times 3 \bullet 3 \times 3$

$Q \times M \quad M \times P$

Si le propriétaire de l'entreprise souhaite déterminer la quantité de chaque sorte de jus vendus au parc Beauséjour durant la fin de semaine, il doit effectuer une multiplication de matrices ayant pour effet d'additionner les éléments de chaque colonne de la matrice *B*. C'est-à-dire qu'il doit effectuer la multiplication suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Orange} & \text{Raisin} & \text{Pomme} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 102 & 166 & 140 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si le propriétaire veut déterminer la quantité totale de jus vendue au parc Beauséjour chaque jour de fin de semaine, il doit additionner les éléments de chaque ligne de la matrice *B*. C'est-à-dire qu'il doit effectuer la multiplication suivante :

$$B \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 103 \\ 162 \\ 143 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Vendredi} \\ \text{Samedi} \\ \text{Dimanche} \end{array}$$

Le propriétaire peut aussi calculer le profit réalisé chaque jour à l'aide d'une opération matricielle. Puisque le profit est égal aux revenus moins les coûts, il doit effectuer la multiplication suivante.

$$\begin{pmatrix} 126{,}80 & 53{,}10 \\ 200{,}80 & 84{,}20 \\ 174{,}80 & 73{,}10 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73{,}70 \\ 116{,}60 \\ 101{,}70 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Vendredi} \\ \text{Samedi} \\ \text{Dimanche} \end{array}$$

EXEMPLE 11.1.6

Vous avez besoin de matériaux pour isoler votre sous-sol, soit 18 montants, 8 panneaux de placoplâtre et 2 sacs de laine isolante. Vous téléphonez à quatre quincailliers locaux pour savoir lequel offre les meilleurs prix. À votre grande surprise, ceux-ci varient beaucoup d'une quincaillerie à l'autre. Vous regroupez les informations que vous avez obtenues dans un tableau semblable au suivant.

Matériau	Quincaillerie			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Montant	1,10 $	0,99 $	0,94 $	0,82 $
Panneau de placoplâtre	5,95 $	5,70 $	5,99 $	6,25 $
Sac d'isolant	27,95 $	28,09 $	27,95 $	27,99$

Déterminer le coût total des matériaux requis pour chacune des quincailleries et indiquer laquelle offre le meilleur prix s'il faut acheter tous les matériaux au même endroit.

Solution

1. Structurer les données

Les informations sur les prix des matériaux selon les quincailleries sont déjà structurées. L'information sur les quantités de matériaux est donnée sous forme structurée dans le tableau suivant.

Matériau	Quantités requises
Montant	18
Panneau de placoplâtre	8
Sac d'isolant	2

2. Associer une matrice à chacun des tableaux

$$A = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1{,}10 & 0{,}99 & 0{,}94 & 0{,}82 \\ 5{,}95 & 5{,}70 & 5{,}99 & 6{,}25 \\ 27{,}95 & 28{,}09 & 27{,}95 & 27{,}99 \end{pmatrix}$$

3. Établir les opérations à effectuer

On peut déterminer le coût total des matériaux pour chaque quincaillerie en calculant le produit matriciel $A^t \bullet B$, c'est-à-dire le produit de la transposée de la matrice des quantités par la matrice des coûts.

4. Effectuer l'opération

$$A^t \bullet B = (18 \quad 8 \quad 2) \bullet \begin{pmatrix} 1{,}10 & 0{,}99 & 0{,}94 & 0{,}82 \\ 5{,}95 & 5{,}70 & 5{,}99 & 6{,}25 \\ 27{,}95 & 28{,}09 & 27{,}95 & 27{,}99 \end{pmatrix}$$

$$= (123{,}30 \quad 119{,}60 \quad 120{,}74 \quad 120{,}74)$$

5. Répondre à la question

Puisqu'il faut acheter tous les matériaux au même endroit, c'est à la deuxième quincaillerie qu'on peut se les procurer au coût le plus bas.

Matrices carrées

Deux matrices carrées de même ordre sont toujours compatibles pour la multiplication matricielle et le produit est toujours une matrice du même ordre que les matrices multipliées.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \bullet \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -35 & 39 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Les matrices carrées sont intéressantes à plusieurs égards. En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même. On emploie un exposant pour désigner un tel produit. Par exemple, si A est une matrice carrée, on écrit

$$A^2 = A \bullet A \quad \text{et} \quad A^3 = A \bullet A \bullet A$$

En général, $$A^n = \underbrace{A \bullet A \bullet \ldots \bullet A}_{n \text{ facteurs}}$$

EXEMPLE 11.1.7

Calculer A^2, B^2 et C^3 où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■ ***Solution***

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = C^2 \bullet C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice idempotente

Une matrice carrée A est dite **idempotente** si et seulement si

$$A^2 = A.$$

REMARQUE

La matrice B de l'exemple 11.1.7 est idempotente, et la matrice C de est nilpotente. L'indice de nilpotence de C est 3. Il est à noter que, pour tout $n \geq 3$, on a $C^n = 0$. Le nombre 3 est le plus petit entier pour lequel $C^n = 0$.

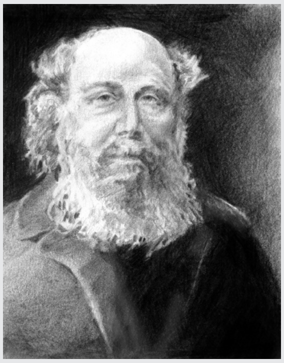
Matrice nilpotente

Une matrice carrée A est dite **nilpotente** s'il existe un entier positif n tel que $A^n = 0$. Le plus petit entier positif tel que $A^n = 0$ est appelé **indice de nilpotence** de la matrice.

Un peu *d'histoire*

JAMES JOSEPH SYLVESTER

1814-1897



James Joseph Sylvester naquit en 1814. Il fut admis au St. John's College, à Cambridge, en 1833. Malgré de brillantes études, il n'obtint pas de diplôme car, à l'époque, il fallait prêter allégeance à l'Église d'Angleterre pour recevoir un diplôme et Sylvester, qui était juif, refusa.

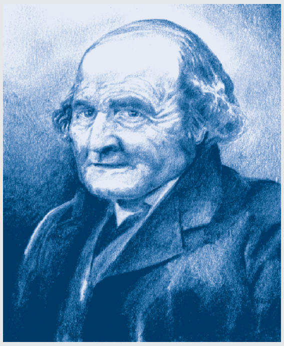
À partir de 1838, il enseigna la physique trois ans au University College de Londres, un des seuls établissements qui n'exerçait pas de discrimination religieuse. En 1841, il accepta un poste à l'Université de Virginie, mais l'abandonna au bout de trois mois à cause de conflits avec des élèves. De retour en Angleterre, il ne parvint pas à trouver un emploi à la mesure de son talent et il pratiqua le droit et l'actuariat tout en donnant des cours privés de mathématiques. Durant cette période, il fit la connaissance d'Arthur Cayley qui exerçait lui aussi le droit. Quoique de tempéraments différents, ils devinrent amis et échangèrent sur des problèmes mathématiques.

Toujours attiré par la carrière de professeur de mathématiques, Sylvester réussit à obtenir un poste au Royal Military Academy de Woolwich en 1854. Il y demeura jusqu'en 1869, l'âge de la retraite étant de 55 ans dans cet établissement. En 1877, il accepta la chaire de mathématiques du John Hopkins University et, en 1878, il fonda l'*American Journal of Mathematics*, soit le premier périodique mathématique aux États-Unis. En 1884, alors âgé de 70 ans, il retourna en Angleterre et occupa la chaire de géométrie d'Oxford. Il se retira en 1892; il souffrait de pertes de mémoire et était presque aveugle. Sylvester réalisa d'importants travaux sur la théorie des matrices après avoir été sensibilisé à ce sujet lors de ses échanges avec Cayley. En particulier, il utilisa la théorie des matrices pour étudier les géométries de dimension supérieure.

Un peu *d'histoire*

ARTHUR CAYLEY

1821-1895



Arthur Cayley, un mathématicien anglais, débuta ses études au Trinity College de Cambridge en 1838 où il obtint un diplôme en 1842. Il enseigna d'abord à Cambridge mais, pour subvenir à ses besoins, il s'initia au droit et fut admis au barreau en 1849. Durant ses études de droit, il assista à des conférences de Hamilton sur les quaternions. Il fit ainsi la connaissance de Salmon et de Sylvester, qui pratiquaient également le droit. Cayley exerça le métier d'avocat durant 14 ans, sans jamais négliger ses recherches en mathématiques. Il publia environ 250 mémoires. Il effectua un retour à Cambridge en 1863, où il occupa un poste d'enseignant en mathématiques pures jusqu'en 1895. Ce changement entraîna une importante diminution de rémunération, mais Cayley fut heureux d'avoir la chance de se consacrer entièrement aux mathématiques. Durant cette période, il publia plus de 900 articles sur la plupart des sujets mathématiques. Ses principales contributions portent sur l'algèbre des matrices, la géométrie non euclidienne et les géométries à n dimensions. En 1854, il rédigea deux articles donnant un aperçu intéressant sur la théorie des groupes. Le sujet était nouveau et les seuls groupes connus étaient des groupes de permutations. Cayley définit les groupes abstraits et en dressa une table de multiplication. Il constata que les quaternions et les matrices forment des groupes. C'est dans un mémoire publié en français en 1855, intitulé *Remarques sur la notation des fonctions algébriques,* qu'il introduisit les notions de base de l'algèbre des matrices. Cependant, c'est dans un article paru en 1858, *Memoir on the Theory of Matrices,* qu'il définit la somme de deux matrices, la multiplication d'une matrice par un scalaire et la multiplication de deux matrices. Il énonça également les propriétés de ces opérations.

11.2 EXERCICES

1. Effectuer, si possible, les opérations suivantes.

   a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

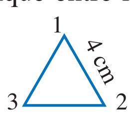
   b) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

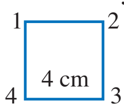
   c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

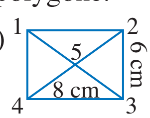
   d) $-5\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & -3 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

   e) $3\begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 \\ 3 & -8 & 10 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

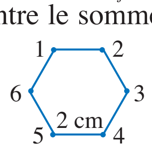
2. Pour chacune des figures suivantes, construire une matrice M où l'élément a_{ij} est la distance géométrique entre les sommets i et j du polygone.

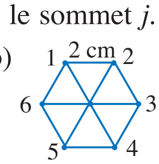
   a) 

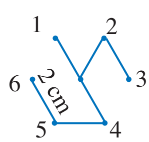
   b) 

   c) 

3. Les figures suivantes comportent 6 sommets, numérotés de 1 à 6. Construire une matrice M où l'élément a_{ij} est la longueur du plus court chemin entre le sommet i le sommet j.

   a) 

   b) 

   c) 

4. Le tableau suivant présente les échelles de salaire des employés d'une entreprise selon le diplôme et le nombre d'années de service.

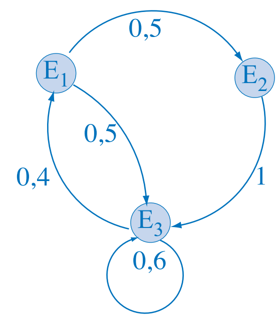
Diplôme	Nombre d'années de service			
	0 à 5	5 à 10	10 à 15	Plus de 15
Sans DES	15 500	16 800	18 200	19 300
DES	18 300	19 700	22 600	24 500
DEC	24 000	26 500	29 400	31 200
Universitaire	35 000	39 500	43 200	46 800

   a) Représenter les échelles salariales par une matrice.

   b) Des négociations sont en cours pour le renouvellement de la convention collective et le syndicat demande des augmentations de salaire de 4,5 % la première année, de 4 % la deuxième année et de 3,5 % la troisième année. Déterminer la matrice des échelles salariales de la troisième année de la convention dans le cas où les demandes du syndicat seraient acceptées.

   c) La partie patronale propose plutôt des augmentations forfaitaires intégrées aux échelles salariales; elle offre 850 $ la première année, 700 $ la deuxième année et 600 $ la troisième année. Déterminer la matrice des échelles salariales pour la troisième année de la convention dans le cas où cette offre serait acceptée.

5. Un système peut être dans trois états différents, soit E_1, E_2 et E_3. Il peut changer d'état lorsqu'il est soumis à une excitation suffisante. Le graphe suivant donne les probabilités de transition d'un état vers un autre. Déterminer la matrice M où l'élément a_{ij} est la probabilité de passer de l'état i à l'état j.



6. Vous êtes responsable de la gestion des stocks dans une entreprise de production de vaisselle en plastique de différents formats. Le nombre de caisses en entrepôt est donné dans le tableau suivant.

Article	Format		
	petit	moyen	grand
Verre	8	5	12
Assiette	10	4	8
Tasse	2	3	1
Bol	1	4	5

Le département de production vous achemine la vaisselle fabriquée au cours de la journée; les quantités sont données dans la matrice R (réception). De plus, au cours de la journée, vous avez expédié plusieurs caisses et ces envois sont consignés dans la matrice E (expédition).

$$R = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

   a) Calculer les quantités en entrepôt à la fin de la journée.

   b) La matrice C suivante représente les commandes que vous devriez expédier le lendemain. Indiquer quels articles il est urgent de produire pour répondre à la demande.

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

   Déterminer lesquelles des opérations suivantes sont définies et les effectuer

   a) $2A^t$ c) $3C^t$
   b) $3B^t$ d) $(A + B)^t$

8. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer $A + A^t$.
   b) Qu'est-ce qui caractérise $A + A^t$ dans le cas où A est une matrice carrée ?

9. Quatre fioles contiennent chacune 20 mL d'un mélange de trois substances. La composition (en millilitres) du contenu de chaque fiole est donnée dans le tableau suivant.

	S_1	S_2	S_3
F_1	4	10	6
F_2	2	8	10
F_3	6	12	2
F_4	10	2	8

   a) On ajoute dans chaque fiole les quantités de S_1 et S_3 indiquées dans le tableau suivant. Déterminer la matrice T des nouvelles quantités des substances dans chacune des fioles.

	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1	2	1	3	2
S_3	4	2	6	2

   b) Après l'ajout, les fioles contiennent-elles toutes le même volume de mélange?
   c) Après avoir effectué l'opération décrite en a), on retire 20% du volume de chacune des fioles après les avoir agitées afin que le mélange soit homogène. Déterminer la matrice R qui des nouvelles quantités des substances dans chacune des fioles.

10. Effectuer les opérations suivantes, si elles sont définies.

    a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

    c) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -14 & -6 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

    d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -31 & -17 & 22 \\ 6 & 3 & -4 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

11. Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

    Est-ce que $A \bullet B = B \bullet A$?

12. Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

    Dire lesquelles des opérations suivantes sont définies et effectuer celles qui le sont.

    a) $A \bullet B$ c) $B \bullet C$
    b) $A^t \bullet B$ d) $A \bullet C$

13. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Construire une matrice non nulle $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    Dans ce cas, est-ce que $A \bullet B = B \bullet A = 0$?

14. Illustrer à l'aide des matrices A et B la non-commutativité du produit matriciel.

    a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

    b) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

    c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

    d) Existe-t-il des matrices A et B telles que $A \bullet B = B \bullet A$? Justifier la réponse.

15. Vérifier si les matrices A et B possèdent les propriétés suivantes de la transposition $(A + B)^t = A^t + B^t$ et $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t$.

    a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

    b) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

16. Une usine de meubles non peints fabrique des bureaux, des chaises et des tables. Le temps, en heures, que met chaque atelier pour fabriquer ces meubles est donné dans le tableau suivant.

Atelier	Bureau	Chaise	Table
Sciage	3	2	3
Assemblage	2	1	2
Sablage	2	1	1

a) La compagnie a reçu des commandes pour 25 bureaux, 32 chaises et 16 tables. Déterminer le temps requis par chaque atelier pour produire les meubles commandés.
b) Sachant que le salaire des travailleurs de l'atelier de sciage est de 10,75 \$/h, alors que les assembleurs gagnent 7,53 \$/h et les sableurs 8,25 \$/h, déterminer les coûts de main-d'œuvre des meubles commandés.
c) Déterminer les coûts de main-d'œuvre unitaires pour chaque type de meubles.

17. Une usine de meubles fabrique trois modèles de bureaux, soit M_1, M_2 et M_3. La fabrication des divers modèles nécessite des quantités différentes de bois, de contreplaqué et de panneaux d'aggloméré, comme l'indique le tableau suivant. La quantité de bois est en unités de longueur, alors que celles de contreplaqué et d'aggloméré sont en unités de superficie.

Matériau	Modèle		
	M_1	M_2	M_3
Bois	9	12	11
Contreplaqué	1,2	2	1,6
Aggloméré	1,2	0,8	1,4

a) L'usine a des commandes pour 50 bureaux du modèle M_1, 65 bureaux du modèle M_2 et 52 bureaux du modèle M_3. Quelles quantités de matériaux doit-elle acheter pour réaliser ces commandes?
b) Le temps de production des bureaux (en minutes) est donné dans le tableau suivant, pour chaque atelier. Déterminer le temps requis par chaque atelier pour réaliser les commandes.

Atelier	Modèle		
	M_1	M_2	M_3
Sciage	60	70	65
Assemblage	35	40	45
Sablage	40	55	70

18. Montrer que les matrices suivantes sont idempotentes.

a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

19. Montrer que les matrices suivantes sont nilpotentes et donner leur indice de nilpotence.

a) $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a & 5a & -2a \\ a & 2a & -a \\ 3a & 6a & -3a \end{pmatrix}$

c) Si A est une matrice nilpotente d'indice 3, est-ce que la matrice aA est nilpotente? Si oui, les matrices A et aA ont-elles le même indice de nilpotence pour tout scalaire a ?
d) Montrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice 3, alors la matrice aA est également une matrice nilpotente d'indice 3 quel que soit le scalaire a.
e) Montrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice n, alors la matrice aA est également une matrice nilpotente d'indice n quel que soit le scalaire a.

20. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A \bullet A^t$ et $A^t \bullet A$.
b) Qu'est-ce qui caractérise $A \bullet A^t$ et $A^t \bullet A$ quelle que soit la matrice A ?
c) Démontrer la propriété des matrices énoncée en b).

21. Pourquoi la formule $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, vérifiée pour les nombres réels, n'est-elle pas valable pour les matrices carrées d'ordre n ?

22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3 et A^4. Que suggèrent ces calculs ?

11.3 DÉTERMINANT

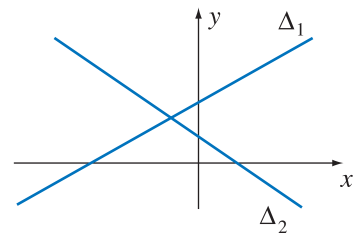
Mise en situation

Soit le système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} x-2y=-8 \\ 3x+5y=9 \end{cases}$$

La représentation graphique de chacune de ces équations est une droite et résoudre le système signifie trouver les valeurs des variables qui satisfont aux deux équations. La marche à suivre consiste à construire un second système d'équations en éliminant une inconnue de la deuxième équation. Dans le cas présent, en soustrayant trois fois la première équation de la deuxième, n obtient

Déterminant01



$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} x-2y=-8 \\ 3x+5y=9 \end{cases} \approx \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-3L_1 \end{array} \begin{cases} x-2y=-8 \\ 11y=33 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on tire $y = 3$ et, en remplaçant y par sa valeur dans la première équation, on obtient $x = -2$.

Il est souvent intéressant d'employer des lettres, au lieu de nombres lorsqu'on applique une procédure. Cela permet de découvrir des aspects que l'emploi des nombres ne met pas en évidence. Si on prend les lettres a, b, c et d comme coefficients non nuls des variables x et y et e et f comme constantes, on obtient le système de deux équations linéaires à deux inconnues

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

L'élimination de la variable x de la deuxième équation donne

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \approx \begin{array}{l} L_1 \\ aL_2-cL_1 \end{array} \begin{cases} ax+by=e \\ (ad-cb)y=af-ce \end{cases}$$

Si $ad - cb \neq 0$, on peut isoler y et on obtient

$$y=\frac{af-ce}{ad-bc}$$

et en substituant cette expression à y dans la première équation, puis en isolant x, on obtient :

$$x=\frac{ed-fb}{ad-bc}$$

La solution du système est donc

$$x=\frac{ed-fb}{ad-bc} \quad \text{et} \quad y=\frac{af-ce}{ad-bc}.$$

On remarque que le dénominateur des deux expressions est $ad - bc$. Il doit être différent de 0 pour que le système ait une solution unique. De plus, les paramètres sont les coefficients des variables du système d'équations

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Il est possible d'écrire un système d'équations de ce type à l'aide de matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

On représente la différence de produits $ad - bc$ par un tableau de nombres bordé de droites verticales afin de le distinguer de la matrice des coefficients :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

La valeur de l'expression $ad - cb$ est appelé **déterminant** de la matrice des coefficients du système d'équations, on note celui-ci « det A ». Le système d'équations a une solution unique si det $A \neq 0$.
Les numérateurs des expressions de x et de y respectifs s'expriment aussi sous forme de déterminants :

REMARQUE
Pour obtenir le déterminant du numérateur de x, on remplace la colonne des coefficients de cette variable par la colonne des constantes dans le déterminant de la matrice des coefficients.

Pour obtenir le déterminant du numérateur de y, on remplace la colonne des coefficients de cette variable par la colonne des constantes dans le déterminant de la matrice des coefficients.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Il suffit de calculer ces déterminants pour résoudre le système d'équations La méthode de résolution d'un système d'équations décrite ci-dessus est appelée **méthode de Cramer**. Elle se fonde sur le calcul de déterminants, procédure que nous allons décrire en posant quelques définitions.

Déterminant d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, une matrice carrée d'ordre 2.

Le **déterminant** de la matrice A est défini par :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

EXEMPLE 11.3.1

Calculer le déterminant de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solution

Le déterminant est

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=[3\times 4]-[1\times(-2)]=12+2=14.$$

PROCÉDURE

Méthode de Cramer

1. Calculer le déterminant de la matrice des coefficients des variables afin de s'assurer que le système d'équations a une solution unique, c'est-à-dire que det $A \neq 0$ où A est la matrice des coefficients.
2. Construire et calculer le déterminant associé à la i^e inconnue en substituant la colonne des constantes à la colonne des coefficients de cette inconnue. On obtient ainsi det A_i pour i = 1, 2.
3. Calculer le quotient du déterminant associé à l'inconnue sur le déterminant de la matrice des coefficients : x_i = (det A_i)/(det A).
4. Répéter les étapes 2 et 3 pour chaque inconnue.

EXEMPLE 11.3.2

Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$$

Solution

Le déterminant de la matrice des coefficients est

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=8-9=-1\neq 0.$$

Le déterminant étant différent de zéro, le système a une solution unique :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{20-24}{-1}=4 \quad \text{et} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{16-15}{-1}=-1.$$

La solution unique est donc le couple (4; –1).

Déterminant02

REMARQUE

La signature est positive lorsque $i + j$ est pair, et négative lorsque $i + j$ est impair. En pratique, lorsque la signature d'un élément est négative, on change le signe de son mineur pour obtenir le cofacteur. Si la signature est positive, on conserve le même signe. La signature des éléments alterne d'un élément à l'autre lorsqu'on se déplace sur une même ligne ou une même colonne. Les illustrations ci-dessous donnent la signature des éléments d'une matrice carrée d'ordre 3 et celle des éléments d'une matrice carrée d'ordre 4.

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Déterminant d'ordre *n*

On généralise la notion de déterminant à une matrice carrée d'ordre n à l'aide des notions de sous-matrice et de cofacteur qui servent à ramener le calcul d'un déterminant d'ordre n au calcul de déterminants d'ordre 2.

Sous-matrice d'une matrice carrée

Soit $A_{n\times n}$, une matrice carrée telle que $n \geq 2$. On appelle **sous-matrice** A_{ij} la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne de la matrice A.

Mineur et signature d'un élément d'une matrice carrée

Soit $A_{n\times n}$, une matrice carrée telle que $n \geq 2$. Le **mineur** d'un élément a_{ij} de A est le déterminant de la sous-matrice A_{ij}. On note M_{ij} le mineur de l'élément a_{ij}.

La **signature** d'un élément a_{ij} le nombre $(-1)^{i+j}$.

Cofacteur d'un élément d'une matrice carrée

Le **cofacteur** d'un élément a_{ij} d'une matrice carrée A se note C_{ij} et il est égal au produit du mineur M_{ij} par la signature de a_{ij}, soit :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

EXEMPLE 11.3.3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -6 & 4 & 7 \\ 8 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Déterminer :

a) la sous-matrice A_{23};

b) le mineur de a_{12};

c) le cofacteur de a_{32}.

Solution

a) Pour obtenir la sous-matrice A_{23}, on élimine la deuxième ligne et la troisième colonne de la matrice A, ce qui donne

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) En éliminant la première ligne et la deuxième colonne de A, on obtient la sous-matrice A_{12} :

$$A_{12} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Le mineur de a_{12} est le déterminant de la sous-matrice A_{12},

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 24 - 56 = -32.$$

c) Le cofacteur de l'élément a_{32} est le produit du mineur M_{32} et de la signature a_{32}

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} = -1(35 - 18) = -17.$$

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Le **déterminant** d'une matrice carrée d'ordre n s'obtient en calculant les produits de chaque élément d'une ligne (ou d'une colonne) quelconque par son cofacteur, puis en additionnant tous les produits

REMARQUE
Nous avons déjà calculé des déterminants dans le chapitre précédent, quand nous avons effectué le produit vectoriel et le produit mixte de vecteurs.

EXEMPLE 11.3.4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Développer le déterminant A selon la première ligne.

b) Développer le déterminant A selon la deuxième colonne.

Solution

a) En développant le déterminant suivant la première ligne, on obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3C_{11} - 2C_{12} + 1C_{13}$$
$$= 3(-1)^2 M_{11} + (-2)(-1)^3 M_{12} + 1(-1)^4 M_{13}$$
$$= 3(-6+4) + 2(4-20) + 1(-2+15) = -6 - 32 + 13 = -25.$$

b) En développant le déterminant suivant la deuxième colonne, on obtient :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2C_{12} - 3C_{22} - 1C_{32}$$
$$= -2 \times (-1)^3 M_{12} + (-3) \times (-1)^4 M_{22} + (-1)(-1)^5 M_{32}$$
$$= 2(4-20) - 3(6-5) + 1(12-2) = -32 - 3 + 10 = -25.$$

Développement de Laplace

Déterminant d'une matrice (développement de Laplace)

Le **déterminant** d'une matrice carrée A d'ordre n est

si on le développe selon une ligne p quelconque,
$$\det A = a_{p1}C_{p1} + a_{p2}C_{p2} + \ldots + a_{pn}C_{pn}.$$
si on le développe selon une colonne r quelconque,
$$\det A = a_{1r}C_{1r} + a_{2r}C_{2r} + \ldots + a_{nr}C_{nr}.$$

Déterminant03

REMARQUE
Cette définition indique comment calculer un déterminant. On choisit d'abord une ligne (ou une colonne), puis on multiplie chaque élément de cette ligne (ou de cette colonne) par son cofacteur et on fait la somme de tous les produits.

À première vue, il est étonnant qu'on obtienne le même résultat en développant suivant n'importe quelle une ligne ou colonne. On découvre la clé de l'énigme en développant un déterminant dont les éléments sont des lettres plutôt que des nombres. Soit le déterminant

REMARQUE
Dans le terme $a_{12}a_{31}a_{23}$, le facteur a_{12} provient de la première ligne et de la deuxième colonne, le facteur a_{31} de la troisième ligne et de la première colonne, et le facteur a_{23} de la deuxième ligne et de la troisième colonne.

Dans le terme $a_{13}a_{21}a_{32}$, le facteur a_{13} provient de la première ligne et de la troisième colonne, le facteur a_{21} de la deuxième ligne et de la première colonne, et le facteur a_{32} de la troisième ligne et de la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Le développement comprend six termes contenant chacun trois facteurs. De plus, les trois facteurs de n'importe quel terme proviennent de trois lignes et de trois colonnes distinctes. Que le développement se fasse suivant n'importe quelle ligne ou colonne, on obtient toujours les mêmes six termes et les le mêmes signes, c'est-à-dire la même valeur pour le déterminant. De plus, on peut regrouper les six termes deux à deux de manière à mettre en évidence les éléments d'une ligne ou d'une colonne, et c'est ce qui explique que le déterminant est identique quelle que soit la ligne ou la colonne choisie. Le truc du magicien est dévoilé!

REMARQUE
Puisque le déterminant d'une matrice carrée est unique, on peut définir le déterminant comme une fonction qui associe à toute matrice carrée un nombre réel donné par le développement de Laplace.

PROCÉDURE

Calcul d'un déterminant à l'aide des cofacteurs

1. Choisir une ligne ou une colonne pour calculer le déterminant.
2. Multiplier chaque élément de la ligne ou de la colonne choisie par son cofacteur (ne pas oublier la signature).
3. Faire la somme des produits obtenus.

EXEMPLE 11.3.5

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

■ *Solution*

Puisqu'on peut calculer le déterminant selon n'importe quelle ligne ou colonne, on choisit celle qui comporte le plus de zéros. On développe donc le déterminant suivant la troisième colonne :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -3C_{13} + 0C_{23} + 0C_{33} + 2C_{43}.$$

On développe ensuite chaque déterminant que sont les cofacteurs suivant leur première colonne :

$$\det A = -3\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & -5 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= -3[2(46) - 3(35) + 4(32)] - 2[2(32) - 2(-2) + 3(-21)]$$
$$= -3[92 - 105 + 128] - 2[64 + 4 - 63] = -355.$$

Le déterminant de A est donc -355.

Méthode de Cramer

On peut résoudre un système d'équations à l'aide des déterminants, en appliquant la méthode de Cramer, seulement si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations et que le déterminant de la matrice des coefficients est différent de 0. Ainsi, la méthode de Cramer permet de résoudre un système ayant une solution unique, puisque la condition nécessaire et suffisante pour que le système ait une solution unique est que le déterminant soit non nul.

THÉORÈME

Méthode de Cramer

Soit un système de trois équations à trois inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ce système admet une solution unique $(x_1; x_2; x_3) = (k_1; k_2; k_3)$ si et seulement si le déterminant de la matrice des coefficients est différent de 0. La solution est alors

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A},\ k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A},\ k_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\det A}.$$

Déterminant04

EXEMPLE 11.3.6

Résoudre le système d'équations : $\begin{cases} 2x-3y+5z=-8 \\ 4x-2y+z=12 \\ x+5y-z=-3 \end{cases}$

■ ***Solution***

On calcule d'abord le déterminant de la matrice des coefficients :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 89 \neq 0$$

Le déterminant étant non nul, le système admet une solution est unique, soit

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -8 & -3 & 5 \\ 12 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{89} = \frac{267}{89} = 3,\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 4 & 12 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{89} = \frac{-178}{89} = -2$$

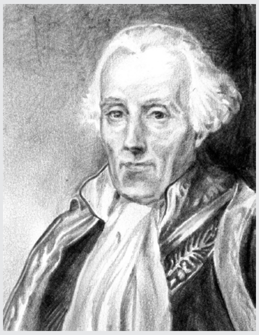
$$\text{et } z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -8 \\ 4 & -2 & 12 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}}{89} = \frac{-356}{89} = -4.$$

Donc, l'unique solution du système est (3; –2; –4).

Un peu *d'histoire*

PIERRE SIMON DE LAPLACE

1749-1827



Pierre Simon, marquis de Laplace, fut astronome, physicien et mathématicien. Il naquit en 1749 à Beaumont-en-Auge, en Normandie, et mourut à Paris en 1827. Il étudia au collège bénédictin de son village natal, puis entra à l'Université de Caen à 16 ans. Attiré par une carrière ecclésiastique, il étudia d'abord la théologie mais découvrit ses aptitudes en mathématiques pendant son séjour à Caen, il publia un mémoire sur les différences finies dans le bulletin édité par Lagrange.

Ayant décidé de faire carrière en mathématiques, Laplace quitta Caen pour se rendre à Paris. Sur la recommandation de l'un de ses professeurs de mathématiques, il rencontra d'Alembert, qui le guida dans son apprentissage des mathématiques et l'aida à trouver un emploi comme professeur de mathématiques à l'École militaire royale. À cette époque, il publia plusieurs mémoires dans lesquels il appliqua ses connaissances mathématiques à l'étude de questions relatives à la théorie planétaire. Laplace entra à l'Académie des sciences en 1773 et à l'Académie française en 1816. Ses travaux portèrent sur deux domaines précis : la mécanique céleste et le calcul des probabilités.

Lors de la Révolution, Laplace fut d'abord membre de la Commission des poids et mesures, qui avait pour mandat d'établir un système unique dans toutes les régions du pays. Pendant la Terreur, il se réfugia à Melun. Il enseigna ensuite les mathématiques à l'École normale de la Convention et fit partie, tout comme Lagrange (Joseph Louis, 1736-1813), de l'Institut national et du Bureau des longitudes. Il effectua des travaux en mécanique céleste et en calcul des probabilités, et s'intéressa aux systèmes d'équations, il généralisa la méthode de Vandermonde (Alexandre Théophile, 1735-1796) pour le calcul d'un déterminant à l'aide des mineurs.

Un peu *d'histoire*

GABRIEL CRAMER

1704-1752

Le mathématicien Gabriel Cramer naquit en 1704 à Genève, en Suisse et il mourut en 1752 à Bagnols, en France. En 1722, à l'âge de 18 ans, il reçut un doctorat, sa thèse portait sur la théorie des sons. Deux ans plus tard, il convoita la chaire de philosophie d'une académie genevoise. Sa candidature fut retenue, tout comme celle de deux autres candidats, soit Amédée de la Rive et Giovanni Ludovico Calandrini. Ne voulant rejeter aucun des candidats, les administrateurs de l'Académie décidèrent de scinder la chaire en une chaire de philosophie et une de mathématiques. La chaire de philosophie fut confiée à de la Rive. La chaire de mathématiques fut offerte conjointement à Cramer et Calandrini, à la condition qu'ils partagent les tâches et le salaire. De plus, les deux titulaires devaient voyager durant des périodes de deux à trois ans et, pendant le voyage de l'un, l'autre cumulait les tâches et recevait le plein salaire.

L'Académie retint ainsi les services de trois excellents candidats et elle permit à Cramer de voyager beaucoup et de rencontrer la plupart des grands mathématiciens de son époque.

En 1750, Cramer publia un ouvrage intitulé *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, dans lequel il classait les lignes courbes planes selon le degré de leur équation. Il procède par élimination successive pour résoudre des systèmes d'équations et affirme qu'il croit avoir trouvé une règle assez simple pour la résolution de systèmes d'équations du premier degré. On a donné son nom à cette méthode de résolution fondée sur les déterminants. Elle avait en fait été présentée par Colin Maclaurin dans un traité d'algèbre publié deux ans plus tôt, mais la notation de Cramer était supérieure, ce qui facilita la compréhension des concepts et contribua ainsi à l'acceptation générale de la méthode.

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

11.4 EXERCICES

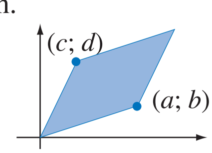
1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & -9 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$.
   a) Construire les sous-matrices A_{31} et A_{23}.
   b) Calculer les mineurs M_{22} et M_{32}.
   c) Calculer les cofacteurs C_{33} et C_{12}.

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes.
   a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
   d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$
   e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
   f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

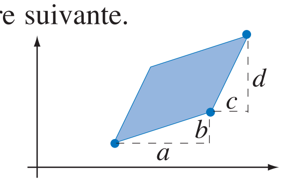
3. Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode de Cramer si celle-ci est applicable.
   a) $x - 2y = 1$
      $3x + 2y = 13$
   b) $2x + y = 7$
      $5x + 4y = 13$
   c) $x + 2y = 8$
      $2x + 4y = 16$
   d) $2x + 3y = 22$
      $5x - 4y = 32$
   e) $3x - 2y = 12$
      $6x - 4y = 8$
   f) $x + 2y = 10$
      $3x - y = 9$
      $4x + y = 19$

4. Calculer le déterminant des matrices suivantes.
   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$
   d) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{pmatrix}$
   e) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$
   f) $\begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$

5. Soit $(a; b)$ et $(c; d)$, deux points quelconques d'un plan cartésien.



   a) Trois des sommets d'un parallélogramme sont $(0; 0)$, $(a; b)$ et $(c; d)$. Montrer que l'aire du parallélogramme est égale à la valeur absolue du déterminant
   $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
   b) Généraliser la formule donnée en a) à l'aide de la figure suivante.



6. À l'aide de la formule donnée dans l'exercice 5, calculer l'aire du parallélogramme dont trois des sommets sont les points donnés et représenter graphiquement le problème.
   a) $(0; 0)$, $(2; 5)$ et $(-3; 4)$
   b) $(2; 4)$, $(-3; 6)$ et $(4; 7)$

7. Calculer l'aire du triangle dont les sommets sont donnés et représenter graphiquement le problème.
   a) $(0; 0)$, $(6; 2)$ et $(2; -4)$
   b) $(1; 4)$, $(3; 7)$ et $(7; 5)$

8. Soit les matrices
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$
   a) Évaluer det A et det B.
   b) Effectuer les produits $A \bullet B$ et $B \bullet A$.
   c) Est-ce que $A \bullet B = B \bullet A$?
   d) Évaluer $\det(A \bullet B)$ et $\det(B \bullet A)$.
   e) Est-ce que $\det(A \bullet B) = \det(B \bullet A)$?

9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,
   dont deux lignes sont proportionnelles. Calculer le déterminant de A.
   a) Quelles observations peut-on faire ?
   b) Quelle explication peut-on en donner?
   c) Que peut-on dire du déterminant d'une matrice carrée ayant deux lignes identiques?

10. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$,
    dont une ligne est la somme des deux autres. Calculer le déterminant de A.

a) Quelles observations peut-on faire ?
b) Quelle explication peut-on en donner ?

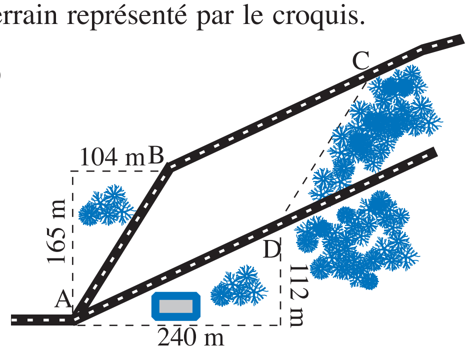
11. Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de Cramer si elle est applicable.
a) $x + 2y - 3z = 33$
$3x - 5y + 2z = -33$
$2x + 4y - 3z = 45$
b) $2x - y + 4z = 27$
$5x - 2y + 3z = 37$
$4x + 2y - z = -2$
c) $x + 3y - 2z = 7$
$2x - 2y + 4z = 6$
$5x + 7y - 2z = 27$

12. En calculant un déterminant, déterminer un vecteur $\vec{w}$ perpendiculaire aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
a) $\vec{u} = (3; -2; 5)$ et $\vec{v} = (-2; 4; -1)$
b) $\vec{u} = (4; -3- 5)$ et $\vec{v} = (5; 0; 2)$
c) $\vec{u} = (1; 0; 2)$ et $\vec{v} = (7; 0; 3)$

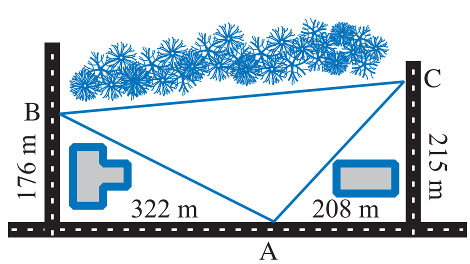
13. Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ou non et dire pourquoi.
a) $\vec{u} = (1;-2;3)$, $\vec{v} = (1;4;-1)$ et $\vec{w} = (2;3;5)$
b) $\vec{u} = (2;-1;4)$, $\vec{v} = (5;1;-3)$ et $\vec{w} = (4;-2;6)$
c) $\vec{u} = (1;3;-2)$, $\vec{v} = (2;-5;-1)$ et $\vec{w} = (5;4;-7)$

14. Utiliser les déterminants pour calculer l'aire du terrain représenté par le croquis.

a)

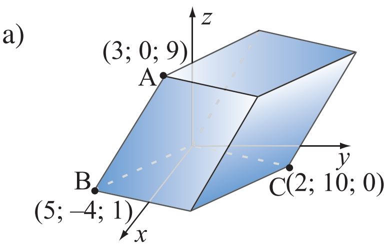


b)

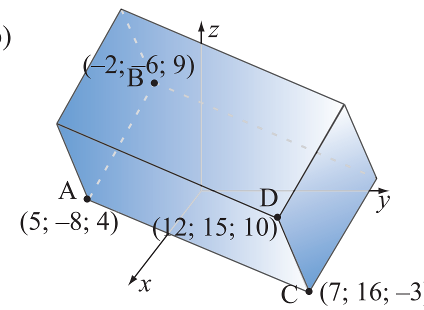


15. En effectuant le calcul d'un déterminant, déterminer le volume du solide illustré et déterminer l'équation du plan passant par les points A, B et C

a)



b)



16. Montrer que :

a) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$ est l'équation d'une droite passant par les points (3; 2) et (–5; 7).

b) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ est l'équation d'une droite passant par les points $(a; b)$ et $(c; d)$.

c) Utiliser le résultat démontré en b) pour déterminer l'équation de la droite passant par les points (5; –2) et (4; 7).

17. Résoudre les équations suivantes par rapport à x.

a) $\begin{vmatrix} x+7 & x+7 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x-5 & 7-4x \\ 2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x-4 & 7-4x & 2+x \\ 0 & x+2 & 5-2x \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$