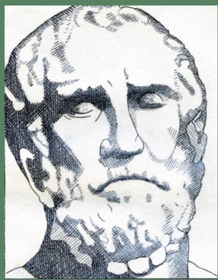
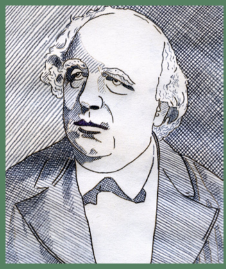


Zénon
vers ~495

Le concept de limite joue un rôle majeur en mathématiques et ce, depuis l'Antiquité. Les paradoxes de Zénon sont la première manifestation de ce concept qui ne fut défini de façon satisfaisante que par les contributions de Cauchy et de Weierstrass.



Karl Weierstrass
1815-1897

Concept de limite de Zénon à Weierstrass

Zénon01 - 02

Zénon, dichotomie

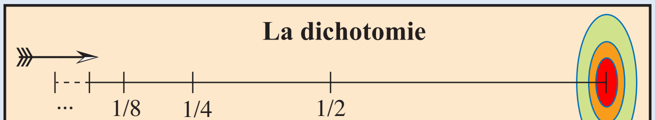
Eudoxe

La dichotomie de Zénon

Le paradoxe de la dichotomie est formulé de la façon suivante par Zénon (vers -495) :

Si un segment de droite est infiniment divisible, alors le mouvement est impossible, car pour parcourir ce segment, il faut d'abord en atteindre le point milieu. Mais, avant d'en atteindre le point milieu, il faut d'abord parcourir le quart de la distance. Avant de parcourir le quart de la distance, il faut en parcourir le huitième et ainsi de suite à l'infini. Il s'ensuit que le mouvement ne peut jamais commencer.

La dichotomie



Avant d'atteindrela cible, la flèche devraitt parcourir la moitié de la distance, mais avant elle devrait parcourir le quart de la distance, le huitième, le seizième, ... Si la distance est infiniment divisible, la flèche ne part jamais et le mouvement est impossible.

Le problème soulevé par ce paradoxe est le suivant :

La somme d'une infinité de termes peut-elle donner un nombre fini ? Symboliquement, pour le paradoxe de Zénon, la somme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

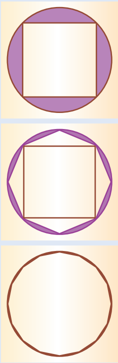
est-elle égale à 1 ou à l'infini ?

Postulat d'Eudoxe

Si on soustrait d'une grandeur donnée une partie supérieure ou égale à sa moitié, et que du reste, on soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié et ainsi de suite, à la longue, la grandeur restante peut être rendue plus petite que n'importe quelle grandeur prédéfinie de même nature.

Le postulat d'Eudoxe (-408 à -355) est une reformulation du postulat d'Antiphon (-480 à -411) qui s'énonce :

En doublant le nombre de côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle et en répétant successivement l'opération, on peut rendre nulle la différence entre l'aire du cercle et l'aire du polygone.



Ce postulat a été reformulé par Eudoxe parce qu'admettre qu'un processus infini, doubler le nombre de côtés, puisse donner un résultat fini, l'aire du cercle, était impensable pour les philosophes grecs. La formulation d'Eudoxe est celle utilisée par Euclide dans les *Éléments*. On la retrouve dans la proposition 1 du livre X :

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie *plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.*

Euclide utilise cette formulation pour démontrer diverses propositions sur les rapports et proportions et, à la proposition 2 du livre XII, il démontre que les aires de deux cercles sont dans le rapport des aires des carrés construits sur leurs diamètres. C'est également la formulation utilisée par Archimède pour établir certains de ses résultats sur l'aire du cercle, l'aire d'un segment de parabole et le volume de la sphère. La notion d'infini actuel n'est pas envisageable pour Archimède mais la notion de convergence d'une suite de nombres est concevable sans la notion d'infini.

Postulat d'Eudoxe

Considérons la suite :

$$\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$$

Chaque terme de cette suite est obtenu en soustrayant itérativement les deux tiers de la valeur du terme précédent. On obtient successivement :

$$1-\frac{2}{3}\times 1=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{9}-\frac{2}{27}=\frac{1}{27}$$

Le postulat affirme qu'en poursuivant le processus, on peut rendre le reste plus petit que toute grandeur prédéfinie. Par exemple, on peut le rendre plus petit que 1/1 000. Il suffit de déterminer n tel que :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{1\,000} \text{ et } 3^n > 1\,000.$$

Il suffit donc que :

$$\ln 3^n > \ln 1\,000 \text{ et } n \ln 3 > \ln 1\,000$$

d'où $$n > \frac{\ln 1\,000}{\ln 3} \approx 6{,}29.$$

Il suffit de 7 itérations pour que le reste soit rendu plus petit que 1/1000. Le postulat affirme que quelle que soit la grandeur prédéfinie, il est toujours possible de rendre le reste plus petit que cette grandeur en effectuant ces soustractions successives.

Dans les premiers développements du calcul infinitésimal, on ne se préoccupait pas des fondements de la théorie. Leibniz et Newton ont énoncé les règles de dérivation sans vraiment définir ce qu'est une dérivée. Dans leur démarche, les grandeurs infinitésimales sont supposées non nulles tant qu'il y a des manipulations algébriques à effectuer, puis elles sont considérées comme nulles pour obtenir le résultat final que l'on appelle maintenant la dérivée.

Cauchy a voulu doter le calcul infinitésimal de fondements solides. Il lui fallait définir la notion de limite de façon rigoureuse pour ensuite définir la dérivée de façon tout aussi rigoureuse.

Définition de Cauchy

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.

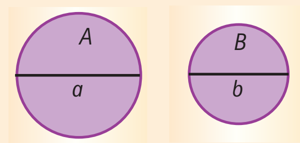
La définition de Cauchy ne parle que de quantités finies et est assez proche, conceptuellement, du travail d'Archimède et d'Eudoxe. Sa définition faisait quand même appel à une intuition géométrique qui fut ébranlée par l'avènement des géométries non euclidiennes. Pour établir de façon rigoureuse les fondements du calcul infinitésimal, il ne fallait plus avoir recours à la géométrie. Les mathématiciens se sont tournés vers l'arithmétique. C'est dans cette optique que s'inscrivent les travaux de Weierstrass qui réussit à définir la notion de limite sans avoir recours à des notions vagues comme « indéfiniment » ou des « quantités infiniment petites »,

Définition de Weierstrass

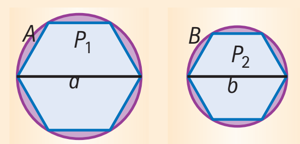
On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels admet pour limite le réel L si, pour tout réel strictement positif ε, aussi petit que l'on veut, il est possible de déterminer un entier naturel N, tel qu'au-delà du rang N, tous les termes de la suite u sont éloignés de L d'une distance inférieure ou égale à ε.

Aire du cercle et diamètre

Le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport du carré de leurs diamètres.



La preuve de cette propriété, que l'on retrouve dans *Les Éléments* d'Euclide, consiste à montrer, en utilisant le postulat d'Eudoxe et la similitude des polygones inscrits, que le rapport des aires ne peut être ni plus grand ni plus petit que le rapport du carré des diamètres.



NH Cauchy

NH Weierstrass

Définition de Weierstrass

Considérons à nouveau la suite de l'encadré à gauche. Pour pouvoir affirmer que la limite de la suite est 0, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^N - 0 < \varepsilon.$$

En résolvant pour N, on obtient :

$$3^N > \frac{1}{\varepsilon} \text{ et } N > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln 3} = \frac{-\ln\varepsilon}{\ln 3}.$$

Quelque soit ε, il suffit de prendre un entier N plus grand que $-\ln\varepsilon/\ln 3$ pour que « *tous les termes de la suite u sont éloignés de 0 d'une distance inférieure ou égale à ε.* »

Cela permet de conclure que la limite de la suite

$$\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$$

est 0.