

Analyse de circuits

Nous allons présenter quelques exemples d'utilisation des systèmes d'équations linéaires pour analyser des circuits électriques. L'analyse d'un circuit vise à trouver les éléments inconnus de celui-ci qui peuvent être des courants ou des tensions. Il y a différentes méthodes pour y parvenir. Nous allons présenter les méthodes qui font appel aux systèmes d'équations par les mailles et par les nœuds. Pour établir ces équations, nous utiliserons une approche programmée basée sur la loi d'Ohm et les lois de Kirchhoff. La première analyse que nous présentons est une analyse par les branches et notre objectif est d'illustrer que l'on peut faire la même analyse en utilisant moins d'équations si l'on considère des courants de maille plutôt que des courants de branches.

Circuit électrique

Un **circuit électrique** est un ensemble d'éléments (sources de tension, sources de courant, résistances, etc.) reliés par des conducteurs (fils).

Branche d'un circuit

Une **branche d'un circuit** est une partie d'un circuit constituée d'un ou de plusieurs éléments montés en série.

Maille

Une **maille** d'un circuit est un trajet fermé et conducteur.

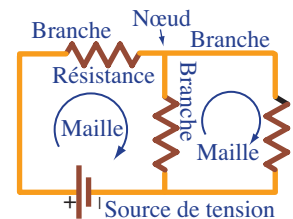
Nœud

Un **nœud** d'un circuit est un point ou un conducteur auquel différentes branches du circuit sont reliées.

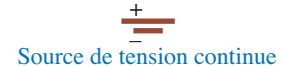
Lexique et notations :



Analyse-de-circuits01



SYMBOLES GRAPHIQUES



Lois d'Ohm et de Kirchhoff



Analyse-de-circuits02

LOIS DES CIRCUITS

Loi des tensions de Kirchhoff

Dans toute maille d'un circuit, ou dans tout circuit fermé, la somme algébrique des différences de potentiel est nulle.

Loi des courants de Kirchhoff

La somme algébrique des courants qui entrent dans un nœud est égale à la somme algébrique des courants qui en sortent.

Loi d'Ohm

Dans un circuit à courant continu constant, l'intensité du courant est directement proportionnelle à la tension appliquée et inversement proportionnelle à la résistance. Cette loi s'écrit :

$$I = V/R,$$

où I est l'intensité du courant en ampères (A), V la tension appliquée en volts (V) et R la résistance en ohms (Ω).

Analyse par les branches

Le circuit illustré ci-contre comporte trois branches, B_1 , B_2 et B_3 . La branche B_1 est constituée de la source de tension E_1 de 15 V et de la résistance de $4\ \Omega$. La branche B_2 est constituée de la source de tension E_2 de 5 V et de la résistance de $5\ \Omega$. La branche B_3 est constituée de la source de tension E_3 de 18 V et de la résistance de $2\ \Omega$. Ces trois branches sont reliées aux deux nœuds N_1 et N_2 pour constituer deux mailles, M_1 et M_2 . Dans ce circuit, les courants et les tensions aux bornes des résistances sont les inconnues. Nous allons utiliser les lois de Kirchhoff pour construire un système d'équations linéaires qui va nous permettre de les trouver.

Attribuons un courant de sens arbitraire à chaque branche du circuit illustré : notons-les I_1 , I_2 et I_3 , et notons V_1 , V_2 et V_3 les tensions aux bornes des résistances. Peu importe si le sens attribué aux courants à cette étape n'est pas le bon, car toute hypothèse incorrecte donnera un signe négatif dans les valeurs numériques. C'est au moment de l'interprétation des résultats que nous pourrions déterminer le sens réel.

On établit ensuite les polarités des chutes de tension aux bornes de chaque résistance à partir du sens arbitraire donné aux courants. On indique la polarité par un signe + à la borne d'entrée du courant dans la résistance et un signe - à la borne de sortie. Pour faire la somme algébrique des différences de potentiel (équations de mailles), une composante (source ou résistance) traversée de la borne négative à la borne positive est affectée du signe positif et une composante traversée de la borne positive à la borne négative est affectée du signe négatif.

Équation du nœud N_1

Considérons le nœud N_1 . Selon la loi des courants de Kirchhoff, la somme algébrique des courants qui entrent dans un nœud est égale à la somme algébrique des courants qui en sortent. On obtient donc l'équation :

$$I_1 + I_2 = I_3$$

ou encore : $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Équation de la maille M_1

Considérons la maille M_1 . Selon la loi des tensions de Kirchhoff, la somme algébrique des différences de potentiel dans une maille est nulle. On obtient donc :

$$E_1 - V_1 + V_2 - E_2 = 0$$

D'où : $V_1 - V_2 = E_1 - E_2$

Par la loi d'Ohm, $V = RI$, on a $V_1 = 4I_1$ et $V_2 = 5I_2$. De plus, $E_1 - E_2 = 10$.

On a donc : $4I_1 - 5I_2 = 10$

Équation de la maille M_2

En appliquant la loi des tensions à la maille M_2 , on a :

$$E_2 - V_2 - V_3 + E_3 = 0$$

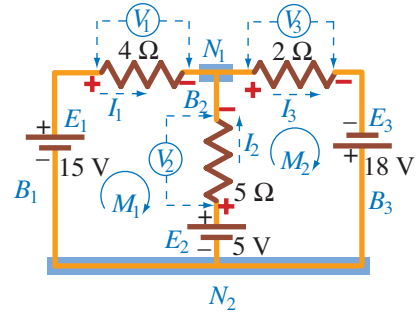
D'où : $V_2 + V_3 = E_2 + E_3$

Par la loi d'Ohm, $V = RI$, on a $V_2 = 5I_2$ et $V_3 = 2I_3$.

Méthode des branches



Analyse-de-circuits03



REMARQUE

En appliquant la loi des courants au nœud N_2 , on obtient l'équation :

$$I_3 = I_1 + I_2$$

ou encore : $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

On constate que cette équation est la même que celle de N_1 . Elle est donc superflue.

De plus, $E_2 + E_3 = 23$. On a donc $5I_2 + 2I_3 = 23$

Ce qui donne le système de trois équations linéaires à trois inconnues :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 4I_1 - 5I_2 = 10 \\ 5I_2 + 2I_3 = 23 \end{cases}$$

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on trouve :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 2 & 23 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 4L_1 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 4 & 10 \\ 0 & 5 & 2 & 23 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} 9L_1 + L_2 \\ L_2 \\ 9L_3 + 5L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & -9 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 38 & 257 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} 38L_1 + 5L_3 \\ 19L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 342 & 0 & 0 & 1\,665 \\ 0 & -171 & 0 & -324 \\ 0 & 0 & 38 & 257 \end{array} \right] \\ & \begin{array}{l} L_1/342 \\ L_2/(-171) \\ L_3/38 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4,87 \\ 0 & 1 & 0 & 1,89 \\ 0 & 0 & 1 & 6,76 \end{array} \right] \end{aligned}$$

On trouve donc, en arrondissant au centième :

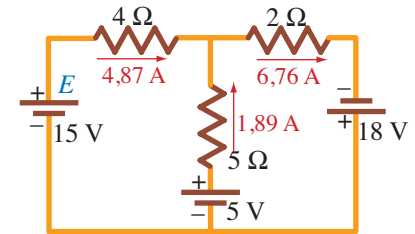
$$I_1 = 4,87 \text{ A}, I_2 = 1,89 \text{ A et } I_3 = 6,76 \text{ A}.$$

Puisque tous les courants sont positifs, cela signifie que le sens que l'on avait attribué aux courants pour établir les équations est le bon.

Connaissant les courants de branche, on peut trouver les chutes de tension en ayant recours à la loi d'Ohm :

$$V_1 = 4I_1 = 19,48 \text{ V}, V_2 = 5I_2 = 9,45 \text{ V et } V_3 = 2I_3 = 13,52 \text{ V}.$$

Le circuit résolu est illustré ci-contre.



REMARQUE

La solution est complétée lorsqu'on donne le circuit résolu avec le sens réel des courants.

Analyse par les mailles

L'idée fondamentale de l'analyse par les mailles est de substituer l'équation (ou les équations) de nœud dans les équations de mailles pour diminuer le nombre d'équations. Ainsi, dans la mise en situation qui précède, on a obtenu le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 4I_1 - 5I_2 = 10 \\ 5I_2 + 2I_3 = 23 \end{cases}$$

Analyse par les branches



Analyse-de-circuits04

Des branches aux mailles



Analyse-de-circuits05

On peut facilement éliminer l'inconnue du courant de la branche commune aux deux mailles de la façon suivante :

$$I_2 = I_3 - I_1$$

En substituant dans les deux autres équations, on obtient :

$$\begin{cases} 4I_1 - 5(I_3 - I_1) = 10 \\ 5(I_3 - I_1) + 2I_3 = 23 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 9I_1 - 5I_3 = 10 \\ -5I_1 + 7I_3 = 23 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 9 & -5 & 10 \\ -5 & 7 & 23 \end{array} \right] &\approx \begin{array}{l} L_1 \\ 9L_2 + 5L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 9 & -5 & 10 \\ 0 & 38 & 257 \end{array} \right] \\ &\approx \begin{array}{l} 38L_1 + 5L_2 \\ L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 342 & 0 & 1\,665 \\ 0 & 38 & 257 \end{array} \right] \approx \begin{array}{l} L_1/342 \\ L_2/38 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4,87 \\ 0 & 1 & 6,76 \end{array} \right] \end{aligned}$$

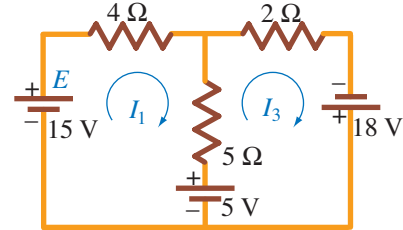
On trouve donc $I_3 = 6,76$ A et $I_1 = 4,87$ A. Ces courants sont appelés **courants de maille**. Ils sont représentés dans le circuit ci-contre avec un sens horaire. Dans les branches qui font partie d'une seule maille, le courant de branche est le courant de maille. Dans les branches qui font partie de deux mailles, le courant est la valeur positive de la différence des courants de maille.

Ainsi, dans notre exemple, le courant de la branche B_2 est soit $I_1 - I_3$, soit $I_3 - I_1$. Puisque $I_3 - I_1 = 6,76 - 4,87 = 1,89$ A, le courant de la branche B_2 est $I_3 - I_1 = 1,89$ A. Cela signifie que dans cette branche le sens du courant est le même que le courant de maille I_3 tel qu'indiqué par la flèche de celui-ci. Les courants de maille sont des courants virtuels et il faut interpréter les résultats à partir des assignations que l'on a faites pour construire le système d'équations.

Considérons à nouveau le système d'équations :

$$\begin{cases} 9I_1 - 5I_3 = 10 \\ -5I_1 + 7I_3 = 23 \end{cases}$$

On constate que l'on peut écrire directement ces équations à partir du circuit. Les inconnues de l'équation de la maille M_1 sont les courants des mailles ayant une branche commune avec M_1 , soit I_1 et I_3 . Le coefficient du courant de maille I_1 est la somme des résistances de cette maille ($5\,\Omega + 4\,\Omega$), car I_1 traverse ces deux résistances. De plus, le coefficient de I_3 est la résistance de la branche commune affectée d'un signe négatif, car I_3 traverse cette résistance en étant dans le sens contraire du courant de la maille (I_1). La constante de l'équation de la maille est la somme algébrique des sources de tension traversées par le courant de maille I_1 ($15\,\text{V} - 5\,\text{V}$). On procède de la même façon pour chacune des mailles du circuit, ce qui permet d'écrire directement les équations de mailles et simplifie la démarche d'analyse.



PROCÉDURE**Analyse par les mailles**

1. Attribuer un nom et un courant distinct de sens horaire à chacune des mailles du circuit.
2. Établir les équations de mailles de la façon suivante :
Les inconnues de l'équation d'une maille M_i sont les courants des mailles ayant une branche commune avec la maille dont on établit l'équation.
Le coefficient du courant I_i attribué à la maille M_i est la somme des résistances de cette maille. Si le courant I_j ($j \neq i$) est une inconnue de l'équation M_i , son coefficient est la somme, affectée du signe négatif, des résistances de la branche commune aux mailles M_i et M_j .
La constante de l'équation de la maille M_i est la somme algébrique des sources de tension traversée par le courant I_i . Les sources traversées de la borne négative à la borne positive sont affectées du signe positif et celles qui sont traversées de la borne positive à la borne négative sont affectées du signe négatif.
3. Résoudre le système d'équations linéaires résultant.
4. Interpréter les résultats selon le contexte (donner le circuit résolu).

Analyse par les mailles



Analyse-de-circuits06

EXEMPLE 1

Faire l'analyse par les mailles du circuit ci-contre.

Solution

Attribuons un courant distinct de sens horaire à chacune des mailles. Ces courants sont notés I_1 et I_2 . Établissons les équations de mailles. La maille M_1 a une branche commune avec la maille M_2 ; ses inconnues seront donc I_1 et I_2 . Dans la maille M_1 , le courant I_1 traverse les résistances de $5\ \Omega$ et de $3\ \Omega$; son coefficient est 8, la somme des résistances traversées par le courant de cette maille. Le coefficient de I_2 est -3 , soit la somme des résistances de la branche commune affectée du signe négatif. Le courant de cette maille traverse la source de 22 V et la source de 9 V de leur borne négative vers leur borne positive. La constante de l'équation est donc $22 + 9 = 31$. L'équation de la première maille est :

$$8I_1 - 3I_2 = 31.$$

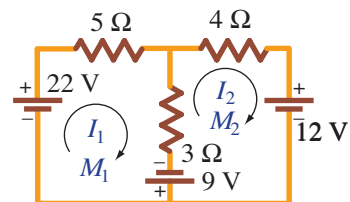
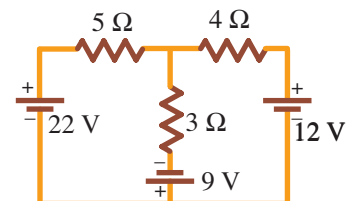
En faisant une analyse semblable pour la maille M_2 , on obtient l'équation de la deuxième maille :

$$-3I_1 + 7I_2 = -21.$$

Le système d'équations de l'analyse par les mailles est alors :

$$\begin{cases} 8I_1 - 3I_2 = 31 \\ -3I_1 + 7I_2 = -21 \end{cases}$$

En résolvant à l'aide d'une matrice, on obtient :



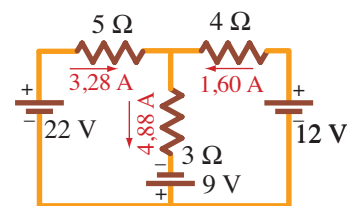
$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 31 \\ -3 & 7 & -21 \end{array} \right] &\approx \begin{array}{l} L_1 \\ 8L_2 + 3L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 8 & -3 & 31 \\ 0 & 47 & -75 \end{array} \right] \\
 &\approx \begin{array}{l} 47L_1 + 3L_2 \\ L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 376 & 0 & 1\,232 \\ 0 & 47 & -75 \end{array} \right] \\
 &\approx \begin{array}{l} L_1/376 \\ L_2/47 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3,28 \\ 0 & 1 & -1,60 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Cela donne $I_2 = -1,60$ et $I_1 = 3,28$. Ce sont les courants de maille; le courant dans la résistance de $5\ \Omega$ est donc de $3,28\text{ A}$ et la tension à ses bornes est $V_1 = 16,4\text{ V}$.

Le courant I_2 est négatif, ce qui signifie que son sens est contraire à celui qui a été attribué dans l'établissement de l'équation. La tension aux bornes de la résistance de $4\ \Omega$ est $6,4\text{ V}$.

Le courant dans la branche commune aux deux mailles est soit $I_2 - I_1$, soit $I_1 - I_2$. Puisque $I_2 - I_1 = -4,88$ et $I_1 - I_2 = 4,88$, le courant est dans le sens du courant de maille I_1 et il est de $4,88\text{ A}$.

La tension aux bornes de la résistance de $3\ \Omega$ est de $14,64\text{ V}$. Le circuit résolu est illustré ci-contre.



Circuit résolu

Analyse par les nœuds

Lorsqu'un circuit comporte des sources de courant plutôt que des sources de tension, on ne peut utiliser la méthode des mailles. On a alors recours à la méthode des nœuds. On procède comme suit :

PROCÉDURE

Analyse par les nœuds

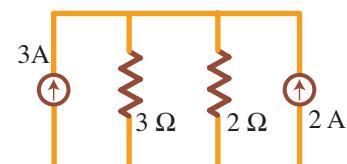
1. Déterminer les nœuds du circuit.
2. Choisir un nœud de référence (mise à la terre) et représenter par une inconnue la tension entre chacun des nœuds et le nœud de référence.
3. Appliquer la loi des courants de Kirchhoff à chacun des nœuds autre que le nœud de référence.
4. Résoudre le système d'équations.
5. Interpréter le résultat selon le contexte (donner le circuit résolu).

EXEMPLE 2

Faire l'analyse par les nœuds du circuit ci-contre.

Solution

On détermine les nœuds du réseau et on choisit celui au bas du circuit comme nœud de référence. Notons V_1 la différence de potentiel entre le nœud N_1 et le nœud de référence. Cette différence de potentiel génère un courant dans les résistances R_1 et R_2 . Les courants qui entrent dans



le nœud N_1 sont de 3 A et 2 A, soit un total de 5 A. Les courants qui en sortent sont I_1 et I_2 . Par la loi d'Ohm, on peut écrire :

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_1}{3} \text{ et } I_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{V_1}{2}.$$

La loi des courants de Kirchhoff donne :

$$\begin{aligned} 3 + 2 &= \frac{V_1}{3} + \frac{V_1}{2} \\ 5 &= V_1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \\ 5 &= V_1 \left(\frac{5}{6} \right) \end{aligned}$$

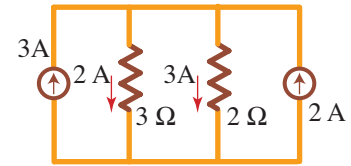
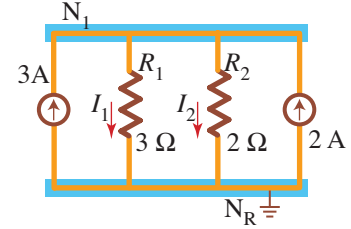
En isolant V_1 , on obtient :

$$V_1 = 6 \text{ V.}$$

Connaissant la différence de potentiel entre les deux nœuds, on peut calculer les courants et on obtient :

$$I_1 = \frac{V_1}{3} = \frac{6 \text{ V}}{3 \Omega} = 2 \text{ A et } I_2 = \frac{V_1}{2} = \frac{6 \text{ V}}{2 \Omega} = 3 \text{ A.}$$

Le circuit résolu est donné ci-contre.



EXEMPLE 3

Faire l'analyse par les nœuds du circuit ci-contre.

Solution

Le réseau comporte trois nœuds, on choisit celui au bas du circuit comme nœud de référence et on note les autres N_1 et N_2 . Les différences de potentiel sont V_1 et V_2 . Posons en hypothèse que la plus grande de ces différences est V_1 , le courant I_3 dans la branche reliant N_1 et N_2 est donc de N_1 vers N_2 .

Le courant qui entre dans le nœud N_1 est de 6 A et les courants qui en sortent sont I_1 et I_3 . La loi des courants donne l'équation :

$$I_1 + I_3 = 6.$$

Le courant qui entre dans le nœud N_2 est de I_3 et il en sort le courant I_2 et un courant de 4 A. La loi des courants donne l'équation :

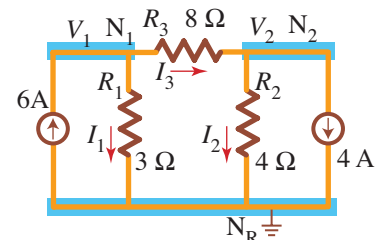
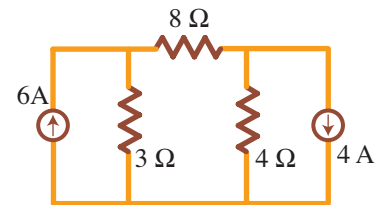
$$I_3 = I_2 + 4, \text{ d'où } -I_2 + I_3 = 4.$$

Par la loi d'Ohm, on a :

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_1}{3}; I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_2}{4} \text{ et } I_3 = \frac{V_1 - V_2}{8}.$$

En substituant ces expressions dans les équations des courants, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_1}{3} + \frac{V_1 - V_2}{8} = 6 \\ -\frac{V_2}{4} + \frac{V_1 - V_2}{8} = 4 \end{array} \right., \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{l} \frac{V_1}{3} + \frac{V_1}{8} - \frac{V_2}{8} = 6 \\ \frac{V_1}{8} - \frac{V_2}{4} - \frac{V_2}{8} = 4 \end{array} \right.$$



Par mise au même dénominateur, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{8V_1}{24} + \frac{3V_1}{24} - \frac{3V_2}{24} = 6 \\ \frac{V_1}{8} - \frac{2V_2}{8} - \frac{V_2}{8} = 4 \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} 11V_1 - 3V_2 = 144 \\ V_1 - 3V_2 = 32 \end{cases}$$

En appliquant la méthode de Gauss-Jordan, on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 11 & -3 & 144 \\ 1 & -3 & 32 \end{array} \right] &\approx \begin{matrix} L_2 \\ L_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 32 \\ 11 & -3 & 144 \end{array} \right] \\ &\approx \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 11L_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 32 \\ 0 & 30 & -208 \end{array} \right] \approx \begin{matrix} 10L_1 + L_2 \\ L_2 \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 112 \\ 0 & 30 & -208 \end{array} \right] \\ &\approx \begin{matrix} L_1/10 \\ L_2/30 \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 11,20 \\ 0 & 1 & -6,9\bar{3} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

En calculant les courants à l'aide de la loi d'Ohm, on obtient :

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{11,20 \text{ V}}{3 \Omega} = 3,7\bar{3} \text{ A}; I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{-6,9\bar{3} \text{ V}}{4 \Omega} = -1,7\bar{3} \text{ A}$$

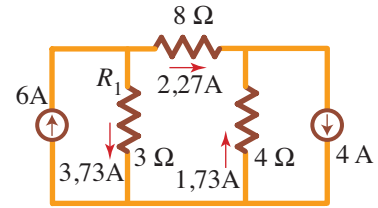
$$\text{et } I_3 = \frac{V_1 - V_2}{8} = \frac{(11,20 - (-6,9\bar{3})) \text{ V}}{8 \Omega} = 2,66\bar{6}.$$

En arrondissant à trois chiffres significatifs, on a :

$$I_1 = 3,73 \text{ A}, I_2 = -1,73 \text{ A et } I_3 = 2,27 \text{ A}.$$

Puisque le courant I_2 est négatif, son sens est contraire à celui de l'hypothèse ayant servi à établir les équations. Ce qui signifie que le courant I_2 ne sort pas du nœud N_2 , il entre dans ce nœud.

Le circuit résolu est donné ci-contre.



Exercices

1. Faire l'analyse par la méthode des nœuds.

