Jacques Bernoulli
1654–1705

Entre 1684 et 1689, Jacques Bernoulli rédige un ouvrage intitulé *Ars Conjectandi* (l'Art de conjecturer). Cet ouvrage sera publié huit ans après sa mort grâce à son neveu Daniel. Dans cet ouvrage, Bernoulli tient compte des travaux de Christian Huygens et Girolamo Cardano. Il aborde des sujets variés, tels que les permutations, les combinaisons, la dérivation, les nombres de Bernoulli et la notion d'espérance.

Jacques Bernoulli
De l'épreuve au processus

Épreuve de Bernoulli

Une *épreuve de Bernoulli* est une expérience aléatoire ayant seulement deux résultats, le *succès* et *l'échec*, représentés respectivement par *s* et *e*. La probabilité du succès est représenté par p et celle de l'échec par q et on a toujours la relation $p + q = 1$. Ainsi, en jetant un dé, on peut considérer que le succès est *obtenir un 6* dont la probabilité est 1/6 et que l'échec est *ne pas obtenir un 6* dont la probabilité est 5/6. En soi, une épreuve de Bernoulli ne présente pas un grand intérêt, sauf si on répète cette épreuve un certain nombre de fois, on obtient alors un *processus de Bernoulli*.

Processus et schéma de Bernoulli

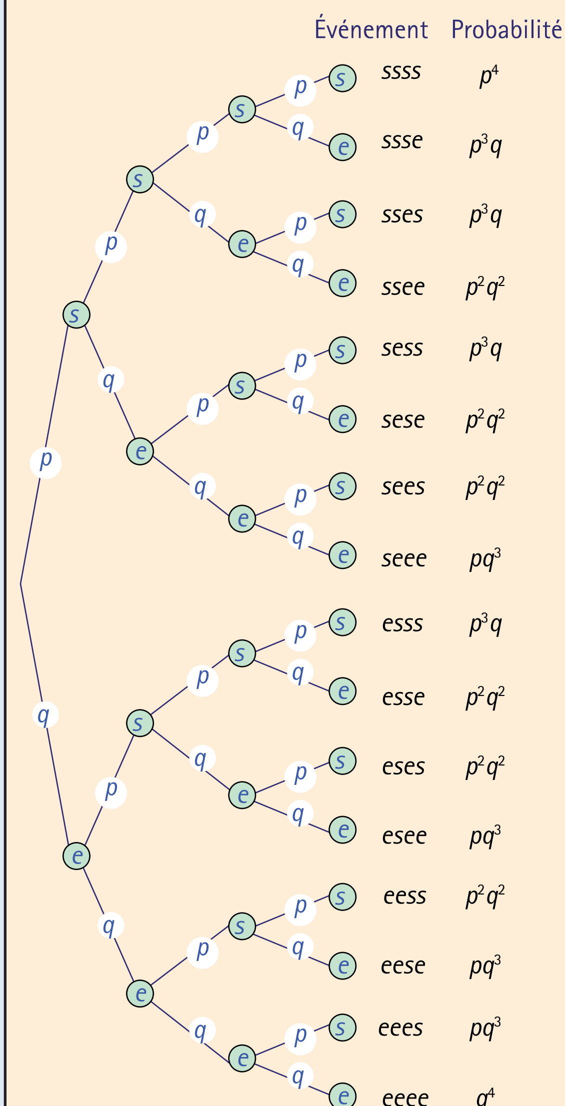
Le schéma d'un processus de Bernoulli pour une épreuve répétée quatre fois est donné ci-contre. Ce schéma permet de calculer les probabilités des différents événements possibles. Ainsi, la probabilité d'obtenir trois succès et un échec est

$$p^3q$$

et en considérant l'ordre de sortie, il y a quatre événements qui donnent trois succès et un échec. La probabilité est donc :

$$4\,p^3q.$$

Schéma de Bernoulli



Si le jeu consiste à lancer une pièce de monnaie et que le succès est obtenir face, dont la probabilité est $p = 1/2$, et que l'échec est obtenir pile, dont la probabilité est $q = 1/2$, alors la probabilité d'obtenir trois fois face et une fois pile sur les quatre lancers est

$$4p^3q = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2} = \frac{4}{16}$$

Le schéma permet également d'obtenir que la probabilité d'obtenir deux fois face et deux fois pile est

$$6p^2q^2 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

Si le jeu consiste à lancer un dé et que le succès est obtenir un 6, dont la probabilité est $p = 1/6$, et que l'échec est ne pas obtenir un 6, dont la probabilité est $q = 5/6$, alors la probabilité d'obtenir trois fois le succès et une fois l'échec sur les quatre lancers est

$$4p^3q = 4\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{5}{6} = \frac{20}{1\,296}$$

Le schéma permet également d'obtenir que la probabilité d'obtenir deux fois face et deux fois pile est

$$6p^2q^2 = 6\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{150}{1\,296}$$

On peut ainsi calculer la probabilité pour tout événement résultant de la répétition d'une épreuve de Bernoulli. En pratique, les probabilités sont calculées en ayant recours au triangle de Pascal et au binôme de Newton (NH Pascal04).

En notant X la variable aléatoire représentant le nombre de succès, la probabilité d'obtenir k succès en n répétitions de l'épreuve est

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Dans cette expression, on a

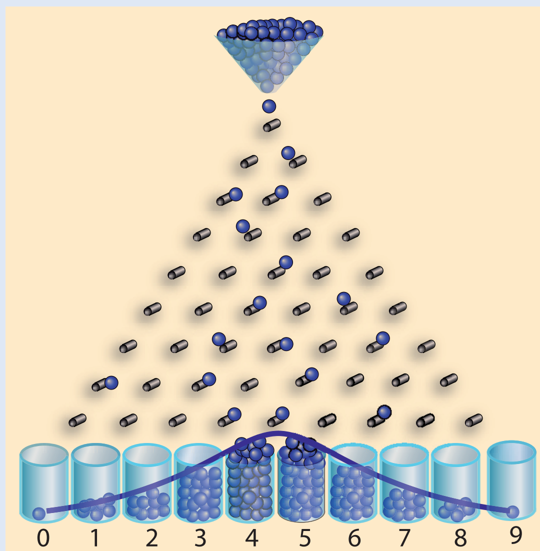
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

où $n! = n(n-1)(n-2)...3\times2\times1$.

Ce résultat est appelé *loi binomiale de probabilité*.

L'illustration ci-contre représente une *planche de Galton* comportant neuf rangées de clous. On laisse tomber des billes sur le premier clou. Chaque bille suit une trajectoire qui la conduit dans l'un des récipients au bas de la planche.

Lorsqu'une bille frappe un clou, la probabilité qu'elle roule à gauche de celui-ci est 1/2 et la probabilité qu'elle roule à droite est également 1/2. Le calcul des probabilités permet de déterminer combien, en moyenne, il y aura de billes dans chacun des récipients. Le nombre de billes dans les récipients suit une loi binomiale de probabilités. (Francis Galton 1822-1911).



Triangle de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
...

Binôme de Newton

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

$(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

...