LA RECHERCHE DE LA TANGENTE

Approches de géométrie analytique

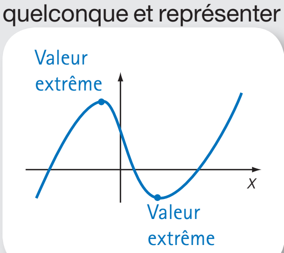
La cinématique et l'optique ont apporté des motivations nouvelles à la recherche de la tangente et de la normale à la courbe. Les méthodes qui se développent au XVII^{e} siècle nécessitent une réflexion sur le langage. La définition des mathématiciens grecs selon laquelle la tangente est « une droite touchant un cercle et qui étant prolongée ne le coupe point » n'est plus adaptée. Jusqu'au XVII^{e} siècle, la recherche de la tangente est un problème qui n'a été traité que pour le cercle d'abord, puis dans l'étude des coniques par Apollonius et par Archimède pour la spirale.

Avec Torricelli et Roberval, la courbe est devenue la trajectoire d'un point mobile et la tangente est la direction du mouvement de ce point. Dans cette optique, Roberval et Torricelli ont développé une méthode de résolution du problème de la tangente qui ne peut cependant se généraliser à toutes les courbes.

Il fallait innover dans la représentation des courbes et dans le langage utilisé. C'est ce que font René Descatres et Pierre de Fermat en développant les fondements de la géométrie analytique.

La démarche de Descartes est cependant limitée, il n'accepte dans sa géométrie que les courbes algébriques, c'est-à-dire les courbes qui sont exprimables par un nombre fini de combinaisons des quatre opérations de base, addition soustraction, multiplication et division.

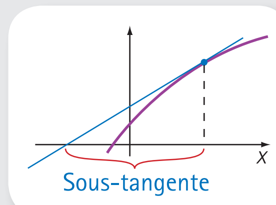
Grâce aux travaux de Fermat, la famille des courbes étudiées s'agrandit. Cette famille ne se restreint plus aux courbes que l'on peut obtenir par un procédé géométrique ou par un procédé mécanique. Pour Fermat, une équation qui contient deux quantités inconnues définit un lieu géométrique, c'est-à-dire une courbe. On peut donc considérer une équation quelconque et représenter celle-ci graphiquement. C'est une approche totalement nouvelle. Plutôt que d'établir l'équation d'une courbe à partir de ses propriétés géométriques, on écrit une équation et on cherche à en déterminer les caractéristiques graphiques. Parmi ces caractéristiques, Fermat s'intéresse aux « valeurs extrêmes » c'est-à-dire les valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction atteint sa valeur maximale ou sa valeur minimale (Fermat02).



Fermat utilisait la notation de François Viète qui ne nous est pas familière, mais en traduisant sa méthode dans la notation moderne, on constate qu'il est passé très proche de la méthode moderne pour déterminer la dérivée d'une fonction.

En considérant que la tangente est une droite qui coïncide avec une partie indéfiniment petite de la courbe, Fermat pose $f(x + h) = f(x)$, conscient du fait que pour « adégaler » des expressions, il faut que leur différence soit nulle, il utilise le terme » adégaler » pour désigner l'action de poser $f(x + h) = f(x)$. Cette façon de faire lui permet de déterminer les valeurs extrêmes de la fonction puisqu'au voisinage d'une valeur extrême, l'ordonnée de la courbe varie peu.

Fermat adapte ensuite cette méthode pour déterminer la tangente à une courbe. Il note d'abord que la tangente est entièrement connue si on peut déterminer son point de rencontre avec un axe et développe une approche se fondant sur cette observation. Il cherche donc la sous-tangente, c'est-à-dire la projection de la tangente sur un axe (Fermat03).



D'autres acteurs entrent en scène qui vont exploiter la représentation des courbes et franchir un pas de plus. Le mathématicien anglais Isaac Barrow (Barrow01) fait la même observation que Fermat et développe aussi une méthode pour déterminer la sous-tangente qu'il publie en 1670, un an après avoir démissionné de son poste de professeur. Isaac Newton (Newton01) lui succède à ce poste. Celui-ci reprend le concept de point générateur dans un contexte de géométrie analytique et, en décomposant le mouvement en déplacements parallèles aux axes, il développe la « méthode des fluxions » (Newton02). Par cette méthode, il considère que la variation de x et de y se fait en fonction du temps et la tangente est donnée par le rapport des vitesses de variation ou fluxions.

En Allemagne, Wlilhelm Gottfried von Leibniz pousse plus loin la réflexion sur le langage. Il précise ce qu'il faut entendre par « égalité » dans le contexte du calcul différentiel (Leibniz01) et s'inspire du triangle arithmétique de Pascal (Pascal04)pour développer le triangle harmonique (Leibniz02) qui est à la base de sa réflexion sur les séries infinies. Préoccupé par l'efficacité, Leibniz développe une notation qui facilite le traitement des problèmes (Leibniz03).