# 11 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## Résoudre des équations différentielles simples à l'aide de l'opérateur d'intégration.

**Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont :**

- la description d'une situation par une équation différentielle.
- l'utilisation de l'opérateur d'intégration pour résoudre une équation différentielle à variables séparables.
- la détermination de la solution particulière d'une équation différentielle.
- l'analyse de la situation à l'aide du modèle.



## OBJECTIFS

**11.1** Traduire une situation par une équation différentielle avec des conditions initiales et la résoudre analytiquement.

**11.2** Modéliser et analyser des situations descriptibles par un modèle exponentiel avec état stable.

# 11.1 Modélisations diverses

Dans la modélisation d'un phénomène, une équation différentielle peut être obtenue de diverses façons, par exemple, en établissant un lien entre les valeurs des variables et le taux de variation de celles-ci ou en faisant une hypothèse sur ce lien. Pour déterminer le modèle, il faut alors résoudre l'équation différentielle. Nous présentons ici quelques situations.

## Équations différentielles, variables séparables

Les expressions à intégrer ne se présentent pas toujours sous une des formes usuelles. Il faut parfois transformer l'expression pour pouvoir l'intégrer. La caractéristique d'une équation différentielle à variables séparables est la possibilité de séparer les variables. Cela signifie que l'on transforme l'expression pour que chaque membre de l'équation ne comporte qu'une seule variable. On peut alors intégrer chaque membre de l'équation en utilisant les intégrales de fonctions usuelles et on trouve la solution de l'équation différentielle en isolant la variable dépendante pour l'exprimer en fonction de la variable indépendante.

ÉquationDiffA01

**EXEMPLE 11.1.1**

Résoudre l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} - y = 0$. et déterminer la solution particulière pour laquelle $y = -1$ lorsque $x = 0$.

***Solution***

En séparant les variables, on trouve :

$$\frac{dy}{dx} = y, \text{ d'où } \frac{dy}{y} = dx.$$

En intégrant les deux membres de l'équation, on obtient alors :

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx,$$

d'où :

$$\ln |y| = x + k$$

et, en isolant $y$, on obtient :

$$e^{\ln|y|} = e^{x+k}.$$

De plus, puisque $e^{\ln|y|} = |y|$, on a :

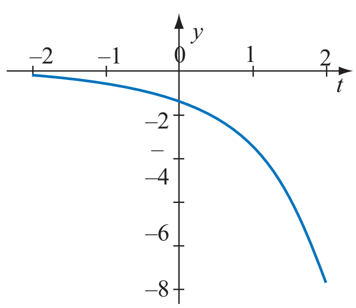
$$|y| = e^{x+k} \text{ ou } y = \pm e^{x+k} = \pm e^x e^k = b_0 e^x.$$

Pour trouver la solution particulière, il faut substituer les données du problème dans cette équation. On a alors :

$$-1 = b_0 e^0,$$

d'où $b_0 = -1$ et la solution particulière de l'équation différentielle est :

$$y = -e^x.$$




**TIC**

```
> restart;
  eqdiff:=diff(y(x),x)-y(x)=0;
  cond_init:=y(0)=-1;
  dsolve({eqdiff,cond_init},y(x));
  plot(rhs(%),x=-2..2,y=-8..0);
```

**REMARQUE**

On aura remarqué la disparition du signe ± dans l'expression :

$$y = \pm e^x e^k = b_0 e^x.$$

La constante $b_0$ englobe le signe. Lorsque nous disposerons de données pour calculer une solution particulière, la constante $b_0$ pourra être positive ou négative, selon les données.

**PROCÉDURE**

**Résolution d'une équation différentielle à variables séparables**

1. Séparer les variables par des transformations algébriques appropriées.
2. Utiliser l'opérateur d'intégration pour intégrer chaque membre de l'équation en effectuant, au besoin, un changement de variable.
3. Isoler la variable dépendante du problème.
4. Trouver la constante d'intégration à l'aide des données du problème lorsque la situation l'exige.
5. Utiliser le modèle pour représenter graphiquement et interpréter le phénomène.

### Taux de variation relatif constant

Un phénomène dont le taux de variation est directement proportionnel à la variable dépendante se représente par une équation différentielle de la forme :

ÉquationDiffA02

$$\frac{dy}{dx}=ay.$$

Pour vérifier, à partir de données expérimentales, si le taux de variation est directement proportionnel à la variable dépendante, on calcule pour l'ensemble des données le quotient:

$$\frac{dy/dx}{y}=a.$$

Lorsque ce rapport est constant, on peut conclure que le **taux de variation est directement proportionnel à la variable dépendante**. On dit également que le **taux de variation relatif est constant**. En séparant les variables, l'équation devient :

$$\frac{dy}{y}=a\ dx.$$

En intégrant les deux membres de l'équation, on a alors :

$$\int\frac{dy}{y}=a\int dx,$$

d'où :$\ln|y| = ax + k$ et : $e^{\ln|y|} = e^{ax+k}$. Cela donne :

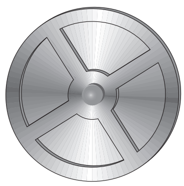
$$|y| = e^{ax+k} = e^{ax}e^{k}\text{, d'où } y = \pm e^{k}e^{ax}.$$

La solution de l'équation différentielle est alors de la forme :

$y = b_0 e^{ax}$, où $b_0 = \pm e^k$ est une constante.

Dans cette expression, la constante $b_0$ est la valeur initiale de la variable dépendante $y$. En effet, en posant $x = 0$, on trouve $y = b_0$. Lorsque le taux de variation relatif est constant, la solution de l'équation différentielle est une exponentielle. De plus, on doit avoir $b_0 \neq 0$, sinon on aurait $\frac{dy/dx}{0}=a$.

**EXEMPLE**



**REMARQUE**
Dans les situations physiques, nous aurons à préciser les unités de mesure du temps en donnant la constante de proportionnalité. Par exemple, si on considère une situation dans laquelle le taux de variation relatif de la vitesse angulaire d'une roue d'inertie est égal à –0,5, on a :

$$\frac{d\omega/dt}{\omega} = -0{,}5.$$

Dans une telle situation, ω, la vitesse de la roue sera en radians par seconde (rad/s) et le taux de variation de cette vitesse, $d\omega/dt$, en rad/s$^2$. On a alors :

$$\frac{d\omega/dt}{\omega}\ \frac{\text{rad/s}^2}{\text{rad/s}} = \frac{d\omega/dt}{\omega}\ 1/\text{s}.$$

Le taux de variation relatif de la fréquence de rotation de la roue d'inertie d'un appareil après la mise hors tension est égal à –0,5 et le temps est mesuré en minutes.

a) Quelle est la fonction décrivant la vitesse au temps $t$ en t/min si la vitesse initiale était de 400 t/min?
b) Calculer la vitesse 30 secondes après la mise hors tension, 2 minutes après la mise hors tension.
c) Esquisser le graphique de la vitesse en fonction du temps.

***Solution***

a) Puisque le taux de variation relatif est égal à –0,5, on a :

$$\frac{d\omega/dt}{\omega} = -0{,}5.$$

En séparant les variables, on obtient :

$$\frac{d\omega}{\omega} = -0{,}5\ dt,$$

d'où : $$\int \frac{d\omega}{\omega} = \int -0{,}5\ dt.$$

Ce qui donne : $\ln|\omega| = -0{,}5t + k$
et : $|\omega| = e^{-0{,}5t+k} = e^k e^{-0{,}5t}$
On a donc : $\omega = \pm e^k e^{-0{,}5t} = b_0 e^{-0{,}5t}$.
En posant $t = 0$, on a alors :

$$\omega(0) = b_0 e^0 = b_0 = 400.$$

La fonction cherchée est donc :

$$\omega(t) = 400\ e^{-0{,}5t}\ \text{t/min}.$$

b) À 30 secondes, la vitesse est :

$$\omega(0{,}5) = 400e^{-0{,}5 \times 0{,}5} = 400e^{-0{,}25} = 312\ \text{t/min}.$$

À deux minutes, la vitesse est :

$$\omega(2) = 400e^{-0{,}5 \times 2} = 400e^{-1} = 147\ \text{t/min}.$$

c) La fonction dérivée est :

$$\omega'(t) = -200e^{-0{,}5t}.$$

**TIC**

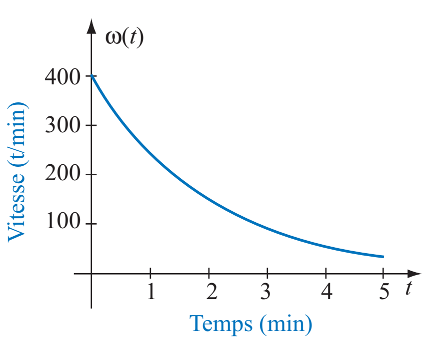
```
> restart;
  Digits:=3;
  eqdiff:=diff(ω(t),t)=-0.5*ω(t);
  cond_init:=ω(0)=400;
  dsolve({eqdiff,cond_init},ω(t));
  plot(rhs(%),t=0..5,ω=0..400);
```

Elle ne s'annule jamais et est toujours négative. La fonction est donc toujours décroissante. La dérivée seconde est :

$$\omega''(t) = 100e^{-0{,}5t}.$$

Elle ne s'annule jamais et est toujours positive. La fonction est donc toujours concave vers le haut. Pour avoir une esquisse assez fidèle, on peut déterminer quelques valeurs correspondantes. On obtient alors

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega(t)$ | 400 | 243 | 147 | 89 | 54 | 33 |




et la représentation graphique est celle ci-contre. On peut conclure que la vitesse est décrite en fonction du temps $t$ par une fonction exponentielle décroissante.

### Taux proportionnel au carré de la variable dépendante

Un phénomène dont le taux de variation est directement proportionnel au carré de la variable dépendante se représente par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dy}{dt} = ay^2.$$

ÉquationDiffA03

Pour vérifier, à partir de données expérimentales, si le taux de variation est directement proportionnel au carré de la variable dépendante, on calcule le quotient :

$$\frac{dy/dt}{y^2} = a.$$

La procédure pour résoudre ce type d'équation différentielle est la même que pour une situation à taux de variation relatif constant.

**EXEMPLE 11.1.3**

Un appareil est muni d'un dispositif d'urgence. Lorsque ce dispositif est mis en marche le taux de variation de la fréquence de rotation de la roue d'inertie est proportionnel au carré de cette vitesse et la constante de proportionnalité est égale à –0,05. Le temps est mesuré en minutes.

a) Quelle est la relation décrivant la vitesse au temps $t$ si la vitesse initiale est de 400 t/min?

b) Calculer la vitesse 30 secondes après la mise en marche du dispositif d'urgence, 2 minutes après la mise en marche du dispositif d'urgence.

**TIC**

```
>restart;
 Digits:=3;
 eqdiff:=diff(ω(t),t)=-0.05*ω(t)^2;
 cond_init:=ω(0)=400;
 dsolve({eqdiff,cond_init},ω(t));
 plot(rhs(%),t=0..5,ω=0..400);
```

***Solution***

a) Puisque le taux de variation de la vitesse est directement proportionnel au carré de cette vitesse, on a :

$$\frac{d\omega}{dt} = -0{,}05\omega^2.$$

En séparant les variables, on obtient :

$$\frac{d\omega}{\omega^2} = -0{,}05dt.$$

En appliquant l'opérateur d'intégration, on obtient :

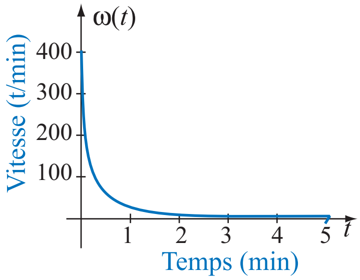
$$\int \frac{d\omega}{\omega^2} = -0{,}05\int dt,\text{ d'où } -\frac{1}{\omega} = -0{,}05t + k.$$

À $t = 0$, on a $\omega = 400$ t/min et, en substituant, on obtient :

$$-\frac{1}{400} = 0 + k.$$

Par conséquent, $k = -1/400$, ce qui donne :

$$-\frac{1}{\omega} = -0{,}05t - \frac{1}{400} \text{ ou } \frac{1}{\omega} = 0{,}05t + \frac{1}{400}.$$




En isolant la variable dépendante, on a le modèle :

**REMARQUE**
En isolant la variable ω dans la relation de l'exemple 11.1.3. On a obtenu :

$$\omega = \frac{400}{20t+1} \text{ t/min}$$

Cependant, on peut préférer la relation sous la forme :

$$\frac{1}{\omega} = 0{,}05t + \frac{1}{400}$$

La représentation graphique des couples $(t;\ 1/\omega)$ est une droite. On a donc une relation affine entre $t$ et $1/\omega$. On a souvent recours à des modifications de ce type pour obtenir une relation affine plus simple à étudier.

$$\omega(t) = \frac{1}{0{,}05t + 1/400} = \frac{400}{20t+1} \text{ t/min}.$$

b) Trente secondes après la mise en marche du dispositif d'urgence, il s'est écoulé 0,5 min et on a :

$$\omega(0{,}5) = \frac{400}{20\times 0{,}5+1} = 36{,}4 \text{ t/min}.$$

Trente secondes après la mise en marche du dispositif d'urgence, la fréquence de rotation est de 36,4 t/min.

Deux minutes après la mise en marche du dispositif d'urgence,

$$\omega(2) = \frac{400}{20\times 2+1} = 9{,}8 \text{ t/min}.$$

Deux minutes après la mise en marche du dispositif d'urgence, la fréquence de rotation est de 9,8 t/min.

### Dilatation thermique

ÉquationDiffA04

Lorsqu'un solide est soumis à une élévation de température $\Delta T$, il se dilate et cette dilatation est proportionnelle à ses dimensions. Ceci n'est valide que dans les variations de température qui ne sont pas excessives. Lorsque les variations sont trop grandes, le matériau de la tige va fondre.

Le taux de variation de la longueur $L$ d'une tige que l'on chauffe est pratiquement proportionnel à sa longueur, soit :

$$\frac{dL}{dT} = \alpha L,$$

où α est appelé **coefficient de dilatation linéique**. La valeur de α dépend de la nature du matériau. Ainsi, en augmentant de 1°C la température d'une tige de cuivre de 100 cm de longueur, celle-ci mesure 100,0017 cm. On peut donc calculer le coefficient de dilatation linéique du cuivre, ce qui donne :

$$\alpha = \frac{dL/dT}{L} = \frac{dL}{L\,dT} = \frac{0{,}0017 \text{ cm}}{(100 \text{ cm})(1°\text{C})} = 1{,}7\times 10^{-5}\ °\text{C}^{-1}.$$

**REMARQUE**
Le tableau suivant donne quelques cœfficients de dilatation linéique.

| Matériau | Coefficient de dilatation linéique |
|---|---|
| acier | $1{,}1\times10^{-5}$ °C$^{-1}$ |
| aluminium | $2{,}2\times10^{-5}$ °C$^{-1}$ |
| cuivre | $1{,}7\times10^{-5}$ °C$^{-1}$ |

C'est la variation de longueur par unité de longueur et par degré de variation de température.

Le taux de variation de la surface $S$ d'une plaque que l'on chauffe est pratiquement proportionnel à sa surface, soit :

$$\frac{dS}{dT} = \gamma S.$$

où γ est appelé **coefficient de dilatation surfacique**. Lorsque la plaque est **isotrope**, c'est-à-dire qu'elle se dilate uniformément dans toutes les directions, on a $\gamma \approx 2\alpha$.

Le taux de variation du volume $V$ d'un solide que l'on chauffe est pratiquement proportionnel à son volume, soit :

$$\frac{dV}{dT} = \beta V.$$

où $\beta$ est appelé **coefficient de dilatation volumique**. Lorsque le solide est **isotrope**, c'est-à-dire qu'il se dilate uniformément dans toutes les directions, on a $\beta \approx 3\alpha$.

**EXEMPLE 11.1.4**

Une tige de cuivre mesure 80 cm à 0°C.

a) Déterminer la longueur de la tige en fonction de la température.
b) Calculer la longueur de la tige à 50°C
c) Utiliser la différentielle pour calculer la dilatation d'une tige de 1,2 m qui subit une élévation de température de 20°C.

***Solution***

a) L'équation différentielle est $\dfrac{dL}{dT} = \alpha L$. En séparant les variables, on obtient :

$$\frac{dL}{L} = \alpha dT.$$

En intégrant, on obtient :

$\displaystyle\int \frac{dL}{L} = \alpha \int dT$, d'où $\ln |L| = \alpha T + k$ et $L = \pm e^k e^{\alpha T} = b_0 e^{\alpha T}$.

À 0°C, la tige mesure 80 cm, on a donc :

$$80 = b_0 e^0,$$

d'où $b_0 = 80$ et, puisqu'il s'agit d'une tige de cuivre, $\alpha = 0{,}000\,017$.
On obtient :

$$L(T) = 80e^{0{,}000\,017\,T} \text{ cm}.$$

b) La longueur de cette tige à 50°C est :

$$L(50) = 80e^{0{,}000\,017 \times 50} = 80{,}068 \text{ cm}.$$

c) L'équation différentielle est :

$$\frac{dL}{dT} = \alpha L$$

et la différentielle est $dL = \alpha L\, dT$.
La longueur de la tige de cuivre est $L = 1{,}2$ m. La variation de température est $\Delta T = dt = 20$°C. La dilatation de la tige est :
$dL|_{20} = 0{,}000\,017\,°\text{C}^{-1} \times 1{,}2 \text{ m} \times 20°\text{C} = 0{,}000\,408 \text{ m} = 4{,}08 \times 10^{-4} \text{ m}.$

**REMARQUE**
Dans les structures métalliques, il faut prévoir des joints d'expansion pour tenir compte de la dilatation et de la contraction dues aux variations de la température.

## Réaction chimique

En chimie, l'ordre d'une réaction chimique est défini par l'équation différentielle qui décrit cette réaction. L'ordre étant la puissance de la concentration du réactif dans l'équation de proportionnalité. On distingue trois types de réaction : d'ordre 0, d'ordre 1 et d'ordre 2.

ÉquationDiffA05

**Réaction d'ordre 0**

En représentant par $[A] \geq 0$ la concentration du réactif, une **réaction d'ordre 0** est de la forme :

$$\frac{d[A]}{dt} = -a[A]^0 = -a.$$

L'intégration permet d'exprimer la concentration en fonction du temps, ce qui donne :

$$[A] = -at + [A]_0.$$

où $[A]_0$ est la concentration initiale.

Pour vérifier si une réaction est d'ordre 0, il suffit de s'assurer que le taux de variation est constant. Lorsque le taux de variation n'est pas connu mais que l'on connaît la concentration à différents moments de la réaction, il suffit de représenter graphiquement les couples ($t$; $[A]$). Si la représentation graphique donne une droite, on peut conclure que la réaction est d'ordre 0.

**Réaction d'ordre 1**

Une **réaction d'ordre 1** est de la forme :

$$\frac{d[A]}{dt} = -a[A]^1.$$

**REMARQUE**
En chimie, on utilise souvent ce modèle sans isoler la variable dépendante et en exploitant le fait qu'il y a alors une relation affine entre le temps et le logarithme de la variable dépendante.

Pour vérifier si une réaction est d'ordre 1, on peut calculer le rapport du taux de variation sur la concentration, soit :

$$\frac{d[A]/dt}{[A]} = -a$$

et observer que ce rapport est constant. En séparant les variables et en résolvant l'équation différentielle, on a alors :

$$\ln [A] = -at + \ln [A]_0.$$

Ce résultat indique d'autres façons de procéder pour détecter une réaction d'ordre 1 lorsqu'on connaît les concentrations et le temps écoulé. En effet, puisque le logarithme de la concentration est une fonction affine du temps, on peut représenter graphiquement les couples ($t$; $\ln[A]$) obtenus expérimentalement. Lorsque cette représentation graphique donne une droite, on peut conclure que la réaction est d'ordre 1. Pour éviter de calculer le logarithme des concentrations, on peut représenter simplement sur un papier semi-log. Si la représentation graphique est une droite, on peut alors conclure à une réaction d'ordre 1.

**Réaction d'ordre 2**

Une **réaction d'ordre 2** est de la forme :

$$\frac{d[A]}{dt} = -a[A]^2.$$

Pour vérifier si une réaction est d'ordre 2, il faut calculer le rapport du taux de variation sur le carré de la concentration, soit :

$$\frac{d[A]/dt}{[A]^2} = -a.$$

et observer que ce rapport est constant. En séparant les variables et en résolvant l'équation différentielle, on a alors :

$$\frac{1}{[A]}=at+\frac{1}{[A]_0} \text{ et } [A]=\frac{1}{at+1/[A]_0}.$$

Ce résultat indique d'autres façons de procéder pour détecter une réaction d'ordre 2 lorsque l'on connaît les concentrations et le temps écoulé. En effet, puisque l'inverse de la concentration est une fonction affine du temps, on peut représenter graphiquement les couples ($t$; $1/[A]$) obtenus expérimentalement. Lorsque la représentation graphique donne une droite, on peut conclure que la réaction est d'ordre 2.

**REMARQUE**

En chimie, on utilise souvent ce modèle sans isoler la variable dépendante et en exploitant le fait qu'il y a alors une relation affine entre le temps et l'inverse multiplicatif de la variable dépendante.

## EXEMPLE 11.1.5

On a mesuré la concentration et la vitesse de réaction du pentoxyde d'azote en solution dans le tétrachlorure de carbone

$$2N_2O_{5\ (solution)} \rightarrow 4NO_{2\ (solution)} + O_{2\ (g)}$$

On a obtenu les résultats du tableau suivant :

| Concentration $[N_2O_5]$ (mol/L) | Vitesse (mol/L·s) |
|---|---|
| 0,90 | $5{,}4\times10^{-4}$ |
| 0,75 | $4{,}5\times10^{-4}$ |
| 0,60 | $3{,}6\times10^{-4}$ |
| 0,45 | $2{,}7\times10^{-4}$ |

a) Déterminer l'ordre de cette réaction chimique.

b) Écrire l'équation différentielle de cette réaction.

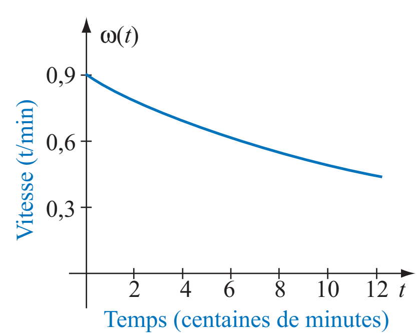
c) Résoudre l'équation différentielle et déterminer le modèle mathématique décrivant la concentration en fonction du temps, la concentration initiale étant de 0,90 mol/L.

d) Calculer la concentration après 300 s de réaction.

ÉquationDiffA06

**TIC**

```
> restart;
  Digits:=3;
  eqdiff:=diff(A(t),t)=-0.0006*A(t);
  cond_init:=A(0)=0.9;
  dsolve({eqdiff,cond_init},A(t));
  plot(rhs(%),t=0..1200,A=0..0.9);
```




### *Solution*

*a)* La réaction n'est pas d'ordre 0 car la vitesse n'est pas indépendante de la concentration. Pour déterminer si la réaction est d'ordre 1, il faut calculer les rapports de la vitesse sur la concentration pour les différentes valeurs mesurées. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant. :

| Concentration $[N_2O_5]$ (mol/L) | Vitesse (mol/L·s) | Rapports Vitesse/concentration |
|---|---|---|
| 0,90 | $5{,}4\times10^{-4}$ | 0,0006 |
| 0,75 | $4{,}5\times10^{-4}$ | 0,0006 |
| 0,60 | $3{,}6\times10^{-4}$ | 0,0006 |
| 0,45 | $2{,}7\times10^{-4}$ | 0,0006 |

On constate que le rapport est constant et on obtient $a = 0{,}0006$. La réaction est donc d'ordre 1.

b) L'équation différentielle est donc $\dfrac{d[A]/dt}{[A]}=-0{,}0006\ \mathrm{s}^{-1}$.

Il faut se rappeler qu'en chimie la vitesse de réaction est toujours positive. Cependant, le taux de variation de la concentration par rapport au temps est négatif dans le cas d'un réactif dont la concentration diminue alors qu'il reste positif pour un produit de la réaction.

c) En séparant les variables et en intégrant, on a :

$$\frac{d[A]}{[A]} = -0{,}0006\ dt, \text{ d'où } \int \frac{d[A]}{[A]} = -0{,}0006 \int dt$$

et $$\ln |[A]| = -0{,}0006t + k.$$

On obtient donc $[A] = \pm e^k e^{-0{,}0006t} = b_0 e^{-0{,}0006t}$.

Puisque la concentration initiale est de 0,9 mol/L, on a :

$$b_0 e^0 = 0{,}9 \text{ mol/L},$$

d'où $b_0 = 0{,}9$ mol/L et la concentration est donnée en fonction du temps de réaction par :

$$[A] = 0{,}9\ e^{-0{,}0006t} \text{ mol/L ou } [N_2O_5] = 0{,}9\ e^{-0{,}0006t} \text{ mol/L}.$$

d) Après 300 s de réaction, la concentration est :

$$[N_2O_5]_{t=300} = 0{,}9\ e^{-0{,}0006 \times 300} \text{ mol/L} = 0{,}75 \text{ mol/L}.$$

**Temps de demi-réaction**

Dans une réaction chimique, on appelle **temps de demi-réaction** le temps nécessaire pour que la concentration d'un réactif devienne la moitié de sa valeur initiale.

## Radioactivité

ÉquationDiffA07

Certains éléments radioactifs sont instables et se désintègrent graduellement pour former des atomes d'un autre élément. Le physicien Ernest Rutherford (1871-1937) a montré que la radioactivité d'une substance était directement proportionnelle au nombre d'atomes présents dans cette substance. Le taux de désintégration relatif d'une substance radioactive est donc constant. La masse d'une substance étant directement proportionnelle au nombre d'atomes, on écrit l'équation différentielle en utilisant la masse de la substance. On a donc :

$$\frac{dQ/dt}{Q} = -a,$$

où $Q \geq 0$ est la masse et $t$ est le temps.

**EXEMPLE 11.1.6**

Une compagnie a accumulé 80 kg de plomb-210 comme résidus de ses opérations. Le taux de désintégration annuel relatif du plomb-210 est –0,0315/an.

a) Construire le modèle mathématique décrivant la masse restante en fonction du temps.

b) Calculer la masse de plomb restante dans cent ans.

■ ***Solution***

a) Soit $Q$ la masse de plomb-210. L'équation différentielle est alors :

$$\frac{dQ/dt}{Q} = -0{,}0315/\text{an}.$$

En séparant les variables et en intégrant, on obtient :

$$\frac{dQ}{Q} = -0{,}0315\,dt, \text{ d'où } \int \frac{dQ}{Q} = -0{,}0315 \int dt$$

et $\ln |Q| = -0{,}0315t + k$. Ce qui donne

$$|Q| = \pm e^k e^{-0{,}0315t} = b_0 e^{-0{,}0315t}.$$

La quantité initiale est de 80 kg, on a donc :

$$Q(0) = b_0 e^0 = 80.$$

Ce qui donne $b_0 = 80$ et le modèle est :

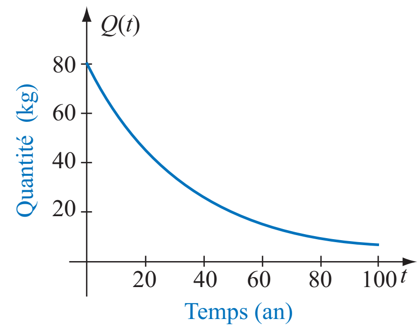
$$Q(t) = 80e^{-0{,}0315t} \text{ kg}.$$

b) La quantité restante dans 100 ans sera :

$$Q(100) = 80e^{-0{,}0315\times 100} \text{ kg} \approx 3{,}43 \text{ kg}.$$

**TIC**

```
>restart;
 Digits:=3;
 eqdiff:=diff(Q(t),t)=-0.0315*Q(t);
 cond_init:=Q(0)=80;
 dsolve({eqdiff,cond_init},Q(t));
 plot(rhs(%),t=0..100,Q=0..80);
```




### Demi-vie

La **demi-vie** (ou **période**) d'un élément radioactif est le temps nécessaire pour que la moitié de la quantité initiale soit décomposée.

## EXEMPLE 11.1.7

La demi-vie du plomb-210 est de 22 ans. Construire un modèle mathématique décrivant la quantité de plomb-210 en fonction du temps.

■ ***Solution***

Le modèle exponentiel décrivant la quantité d'une matière radioactive est de la forme :

$$Q(t) = Q_0 e^{at}.$$

Puisque la demi-vie est de 22 ans, on a donc :

$$Q(22) = Q_0 e^{a\times 22} = 0{,}5Q_0, \text{ d'où } e^{a\times 22} = 0{,}5$$

et :

$$a = \frac{\ln 0{,}5}{22} = -0{,}0315.$$

Le modèle décrivant la masse restante après $t$ années est donc :

$$Q(t) = Q_0 e^{-0{,}0315t} \text{ kg}.$$

**REMARQUE**

Lorsqu'on connaît la demi-vie d'un élément radioactif ou le temps de demi-réaction, on peut modéliser la situation sans avoir recours à l'intégration. Le modèle étant de la forme :

$$f(x) = b_0 e^{ax}$$

où $b_0$ est la valeur initiale, il suffit de calculer la valeur du paramètre $a$.

## EXEMPLE 11.1.8

Le Conseil de la municipalité qui vous emploie a décidé d'arrêter la fluoration de l'eau potable. Le réservoir contient actuellement 1 500 000 m$^3$ d'eau fluorée, la quantité de fluor est de 875 kg. La consommation journalière est de 30 000 m$^3$. Cette quantité est remplacée à chaque jour par un même volume d'eau non fluorée et la distribution du fluor dans l'eau est uniforme en tout temps.

ÉquationDiffA08

a) Déterminer la quantité de fluor dans l'eau en fonction du temps.

b) Calculer la quantité de fluor dans le réservoir après dix jours.

c) Combien de temps après l'arrêt de la fluoration la quantité de fluor dans le réservoir aura-t-elle diminué de moitié?

***Solution***

a) Le taux de variation de la quantité de fluor par rapport au temps est égal au produit de la concentration de fluor par le débit d'eau fluorée. Représentons par $Q$ la quantité en kilogramme de fluor dans l'eau et $t$ le temps en jours à partir du moment où on a arrêté la fluoration. La concentration de fluor dans l'eau est alors :

$$\frac{Q}{1\,500\,000}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

et le débit d'eau fluorée est –30 000 m$^3$/jour.

Le taux de variation est alors :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{1\,500\,000}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times -30\,000\frac{\text{m}^3}{\text{jour}} = -0{,}02Q \text{ kg/jour}.$$

L'équation différentielle est donc :

$$\frac{dQ}{dt} = -0{,}02Q \text{ kg/jour}.$$

En séparant les variables et en intégrant, on a alors :

$$\frac{dQ}{Q} = -0{,}02dt,$$

$$\int\frac{dQ}{Q} = -0{,}02\int dt,$$

$$\ln|Q| = -0{,}02t + k,$$

$$Q = \pm e^k e^{-0{,}02t} = b_0 e^{-0{,}02t}.$$

Puisque la quantité initiale est de 875 kg, on a $b_0 = 875$ et la fonction cherchée est :

$$Q(t) = 875e^{-0{,}02t} \text{ kg}.$$

b) La quantité de fluor dans le réservoir au bout de dix jours est :

$$Q(10) = 875e^{-0{,}02\times 10} = 716{,}4 \text{ kg}.$$

Après dix jours, il reste encore 716 kg de fluor dans le réservoir.

c) La quantité aura diminué de moitié lorsque :

$$Q(t) = 875e^{-0{,}02t} = 437{,}5 \text{ kg},$$

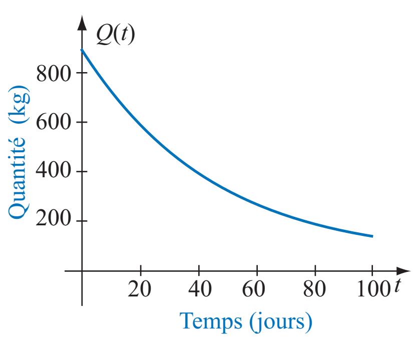
$$e^{-0{,}02t} = 0{,}5,$$

$$t = \frac{\ln 0{,}5}{-0{,}02} = 34{,}66 \text{ jours}.$$

Il faudra 35 jours avant que la quantité de fluor dans le réservoir ait diminué de moitié.

**TIC**

```
>restart;
 Digits:=3;
 eqdiff:=diff(Q(t),t)=-0.02*Q(t);
 cond_init:=Q(0)=875;
 dsolve({eqdiff,cond_init},Q(t));
 plot(rhs(%),t=0..100,Q=0..875);
```



## 11.2 Exercices

1. Le courant dans un circuit décroît à un taux relatif constant de –5. Quelle est la fonction décrivant le courant au temps $t$ si celui-ci était initialement de 3,2 A?

2. On a constaté que la population d'une petite ville de 12 000 habitants croît à un taux annuel relatif constant de 0,012.
   a) Trouver la fonction décrivant la population en fonction du temps.
   b) Déterminer le temps de génération de cette population (le temps pour que la population double).

3. Le taux de désintégration relatif du strontium-90 est égal à –0,0244.
   a) Trouver la fonction décrivant la quantité $Q$ de strontium restante après $t$ années à partir d'une quantité initiale $Q_0$.
   b) Déterminer la demi-vie du strontium-90.

4. Le taux de décroissance relatif de la charge d'un condensateur est égal à –0,25. Trouver la fonction décrivant la charge au temps $t$ sachant qu'elle était de 1,27 C à $t = 1$ seconde.

5. On a mesuré, à différents moments durant la réaction, la concentration du pentoxyde d'azote en solution dans le tétrachlorure de carbone

$$2N_2O_{5\,(solution)} \rightarrow 4NO_{2\,(solution)} + O_{2\,(g)}$$

On a obtenu les résultats du tableau suivant

| Temps (s) | Concentration $[N_2O_5]$ (mol/L) |
|---|---|
| 0 | 1,00 |
| 200 | 0,88 |
| 400 | 0,78 |
| 600 | 0,69 |
| 800 | 0,61 |

   a) Déterminer l'ordre de cette réaction chimique.
   b) Écrire l'équation différentielle de cette réaction.
   c) Résoudre l'équation différentielle et déterminer le modèle mathématique décrivant la concentration en fonction du temps.
   d) Calculer la concentration après 1 200 s de réaction.

6. On a mesuré la vitesse et l'accélération d'une roue d'inertie à différents moments après la mise hors tension de l'appareil. On a obtenu les résultats suivants.

| Vitesse $\omega$ (t/min) | $d\omega/dt$ (t/min$^2$) |
|---|---|
| 500 | –200 |
| 400 | –169 |
| 300 | –120 |
| 200 | –80 |
| 100 | –40 |
| 50 | –20 |

   a) Écrire l'équation différentielle de cette situation.
   b) Résoudre l'équation différentielle et déterminer le modèle mathématique décrivant la vitesse en fonction du temps sachant que la vitesse initiale est de 500 t/min.
   c) Calculer la vitesse après cinq minutes.

7. Le Conseil de la municipalité qui vous emploie a décidé d'arrêter la fluoration de l'eau potable. Le réservoir contient actuellement 800 000 m$^3$ d'eau fluorée, la quantité de fluor est de 600 kg. La consommation journalière est de 24 000 m$^3$. Cette quantité est remplacée à chaque jour par un même volume d'eau non fluorée et la distribution du fluor dans l'eau est uniforme en tout temps.
   a) Déterminer la quantité de fluor dans l'eau en fonction du temps.
   b) Calculer la quantité de fluor dans le réservoir après dix jours.
   c) Combien de temps après l'arrêt de la fluoration la quantité de fluor dans le réservoir aura-t-elle diminué de moitié?
   d) Combien de jours après l'arrêt de la fluoration la quantité de fluor sera-t-elle inférieure à 100 kg?

8. Une tige d'aluminium mesure 200 cm à 0°C.
   a) Déterminer la longueur de la tige en fonction de la température.
   b) Calculer la longueur de la tige à 50°C.
   c) Utiliser la différentielle pour calculer la dilatation d'une tige de 3,2 m qui subit une élévation de température de 25°C.

9. Un réservoir contient initialement 800 L d'eau salée dont le degré de concentration est de 250 g de sel

par litre de solution. On verse de l'eau pure dans le réservoir à un taux de 20 L/min et on laisse l'eau s'écouler au même taux par un robinet à la base du réservoir. Le mélange est continuellement agité pour que le mélange soit en tout temps homogène.

a) Déterminer la quantité de sel dans l'eau en fonction du temps.
b) Calculer la quantité de sel dans le réservoir après 30 minutes.
c) Combien de temps après le début de l'opération la quantité de sel dans le réservoir sera-t-elle le dixième de la quantité initiale?

10. Après un déversement accidentel de produits chimiques dans un lac, le ministère de l'Environnement estime que le taux de décroissance de la population de truites à chaque mois est directement proportionnel à la population, la constante de proportionnalité est estimée à –0,15.

a) Sachant que la population de truites avant le déversement était estimée à 80 000, trouver un modèle décrivant le nombre de truites en fonction du temps écoulé depuis le déversement.
b) Déterminer après combien de temps la population de truites aura diminué de moitié.

11. La compagnie qui vous emploie achète, au coût de 30 000$, un nouvel équipement informatique dont le taux de dépréciation annuel relatif est de 30%.

a) Déterminer le modèle donnant la valeur de cet équipement en fonction du temps.
b) La compagnie remplace normalement ses équipements lorsque leur valeur est le quart de la valeur initiale, déterminer dans combien de temps la compagnie renouvellera cet équipement.

12. Dans un bâtiment en construction, on installe des poutrelles d'acier de 5 m de longueur alors qu'il fait 0°C. Les supports aux extrémités des poutrelles sont aménagés dans des piliers de béton. On doit s'assurer que les poutrelles peuvent réagir aux variations de température sans endommager les piliers de béton.

a) Exprimer la longueur des poutrelles en fonction de la température.
b) Calculer la longueur des poutrelles à –20°C.
c) Calculer la longueur des poutrelles à 25°C.

13. Le butadiène réagit pour former un dimère (résultat de la combinaison de deux molécules identiques) selon l'équation suivante :

$$2C_4H_{6\,(g)} \rightarrow C_8H_{12\,(g)}$$

On a étudié cette réaction à température constante et on a relevé les concentrations à différents moments au cours de la réaction.

| Temps (s) | Concentration $[C_4H_6]$ (mol/L) |
|---|---|
| 0 | 0,01000 |
| 800 | 0,00674 |
| 1 600 | 0,00507 |
| 2 400 | 0,00406 |
| 3 000 | 0,00353 |
| 3 800 | 0,00301 |
| 4 200 | 0,00280 |
| 5 000 | 0,00247 |

a) Déterminer l'ordre de cette réaction chimique.
b) Écrire et résoudre l'équation différentielle de cette réaction.
c) Calculer la concentration de butadiène après 3 200 s de réaction.

14. Le cobalt-60 ($^{60}Co$) qui est souvent utilisé comme source de radiations en médecine a une demi-vie de 5,25 ans.

a) Construire un modèle mathématique décrivant la quantité de matière radioactive en fonction du temps.
b) Au bout de combien de temps la quantité de matière radioactive d'un échantillon neuf aura-t-elle atteint le huitième de sa valeur initiale?

15. L'uranium-238 ($^{238}U$) a une demi-vie de $4{,}5\times10^9$ années.

a) Construire un modèle mathématique décrivant la quantité de matière radioactive en fonction du temps.
b) Le produit final de la désintégration de l'uranium-238 est le plomb-206 ($^{206}Pb$). On découvre des roches qui contiennent de l'uranium-238 et on constate que la teneur en plomb de ces roches est égale à leur teneur en uranium-238. Quel est l'âge de ces roches?

# 11.3 Variations limitées

Dans cette section, nous verrons des situations descriptibles par des modèles exponentiels dont la croissance ou la décroissance est limitée. Dans ces situations, le taux de variation est proportionnel à la différence entre la variable dépendante et une valeur fixe. La limite de croissance ou de décroissance du modèle est décrite graphiquement par une asymptote horizontale.

## Modèles exponentiels avec état stable

Il existe plusieurs phénomènes physiques pour lesquels le taux de variation est proportionnel à la différence entre la variable dépendante et une valeur fixe. Ces situations sont descriptibles par une équation différentielle de la forme :

ÉquationDiffB01

$$\frac{dy}{dx} = a(c - y).$$

Pour résoudre une équation différentielle de ce type, on sépare d'abord les variables, ce qui donne :

$$\frac{dy}{(c - y)} = a\ dx.$$

Pour intégrer, il nous faut effectuer un changement de variable en posant $u = c - y$. On a alors $du = -\,dy$ et par substitution, on obtient :

$$\frac{-du}{u} = a\ dx \text{ ou } \frac{du}{u} = -a\ dx.$$

En intégrant les deux membres de l'équation, on a :

$$\int \frac{du}{u} = \int -a\ dx,$$

$$\ln |u| = -ax + k.$$

Ce qui donne $|u| = e^{-ax+k} = e^{-ax}\,e^{k}$, d'où $u = \pm\, e^{k}\,e^{-ax} = b_0\,e^{-ax}$ où $b_0 = \pm\, e^{k}$. Puisque $u = c - y$, on a $c - y = b_0 e^{-ax}$.

En isolant $y$, on obtient $y = c - b_0\,e^{-ax}$ où $b_0 \neq 0$.

La procédure est la même que pour les situations où le taux de variation relatif est constant.

**LOI**

**Refroidissement de Newton**

Soit $T$, la température d'un objet plongé dans un milieu ambiant de température $A$. Le taux de variation de la température $T$ par rapport au temps $t$, est proportionnel à la différence entre la température de l'objet et la température ambiante, ce qui s'écrit symboliquement :

$$\frac{dT}{dt} = a(T - A).$$

## EXEMPLE 11.3.1

En débranchant un fer à repasser, la température de celui-ci décroît à chaque minute à un taux égal à 0,5 fois la différence entre sa température instantanée et la température ambiante qui est de 20°C.

a) Décrire cette situation par une équation différentielle.

b) Déterminer la fonction décrivant la température en fonction du temps, sachant que la température du fer est de 200°C à l'instant où il est débranché.

c) Déterminer les caractéristiques graphiques et représenter graphiquement cette fonction.

**TIC**

```
>restart;
 Digits:=3;
 eqdiff:=diff(T(t),t)=-0.5*(T(t)-20);
 cond_init:=T(0)=200;
 dsolve({eqdiff,cond_init},T(t));
 plot(rhs(%),t=0..10,T=0..200);
```

### *Solution*

a) En représentant par $T$ la température au temps $t$, la situation est décrite par l'équation différentielle à variables séparables :

$$\frac{dT}{dt}=-0{,}5(T-20).$$

b) Pour trouver la fonction décrivant la température du fer au temps $t$, il faut résoudre l'équation différentielle. On sépare les variables,

$$\frac{dT}{T-20}=-0{,}5dt.$$

En posant $u = T - 20$, on a $du = dT$. L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{du}{u}=-0{,}5dt.$$

En intégrant les deux membres de l'équation,

$$\int\frac{du}{u}=\int-0{,}5dt.$$

Ce qui donne $\ln|u| = -0{,}5t + k$, d'où $|u| = e^{-0{,}5t+k} = e^k\, e^{-0{,}5t}$ et

$$u = \pm e^k\, e^{-0{,}5t} = b_0 e^{-0{,}5t}.$$

En substituant $T - 20$ à $u$, on obtient :

$$T - 20 = b_0 e^{-0{,}5t} \text{ et en isolant, } T = 20 + b_0 e^{-0{,}5t}.$$

À l'instant où le fer est débranché, on a :

$$T(0) = 20 + b_0 e^0 = 200,$$

ce qui donne $20 + b_0 = 200$ et $b_0 = 180$. La fonction est alors :

$$T(t) = 20 + 180\, e^{-0{,}5t} \quad °\text{C}.$$

c) Déterminons les caractéristiques graphiques de cette fonction. La fonction dérivée est

$$T'(t) = -90\, e^{-0{,}5t}.$$

La dérivée première ne s'annule jamais et elle est toujours négative. La fonction est donc toujours décroissante. La dérivée seconde est

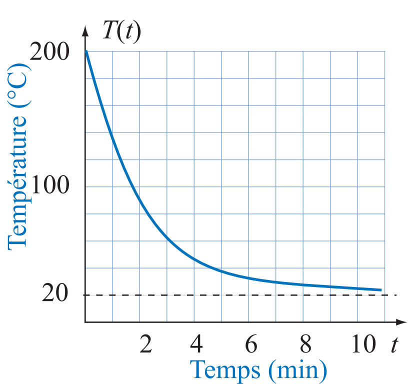
$$T''(t) = 45\, e^{-0{,}5t}.$$

Elle est toujours positive. La fonction est donc toujours concave vers le haut. À $t = 0$, on a $T(0) = 200$°C et la valeur stable est :

$$\lim_{t\to\infty}(20+180e^{-0{,}5t}) = 20 \text{ °C}.$$

Pour avoir une esquisse assez fidèle, on peut déterminer quelques valeurs correspondantes. On obtient alors le graphique ci-contre.

| **Temps $t$ (min)** | **Température $T$ (°C)** |
|---|---|
| 0 | 200 |
| 2 | 86 |
| 4 | 44 |
| 6 | 29 |
| 8 | 23 |
| 10 | 21 |



## EXEMPLE 11.3.2

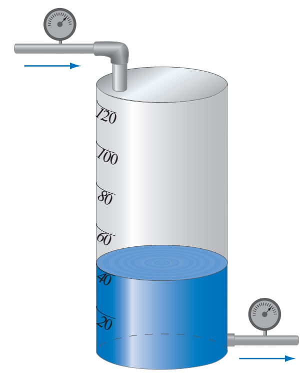
Un système de refroidissement comporte un réservoir d'eau doté d'un dispositif électronique permettant de contrôler la quantité de liquide dans le réservoir. L'appareil de contrôle fait la lecture du niveau de liquide et ajuste l'ouverture d'une valve d'entrée lorsque le niveau est trop bas ou d'une valve de sortie lorsque le niveau est trop élevé. Pour permettre un ajustement en douceur du niveau de liquide dans le réservoir, l'ouverture des vannes permet, par minute, l'entrée ou la sortie de la moitié de la différence entre le niveau demandé et le niveau mesuré. La graduation du réservoir indique le nombre de litres de liquide dans le réservoir. Celui-ci contient initialement 40 litres et on modifie la directive du mécanisme de contrôle pour que le niveau atteigne la marque de 80 litres.

a) Décrire algébriquement le taux de variation en fonction de la quantité V de liquide dans le réservoir.

b) Déterminer la fonction décrivant la quantité de liquide dans le réservoir dans les instants qui suivent la modification de la directive.

c) Représenter graphiquement cette fonction.

ÉquationDiffB02




***Solution***

a) Le taux de variation est décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{2}(80-V).$$

b) En isolant les variables, on a :

$$\frac{dV}{80-V}=0{,}5dt.$$

Pour intégrer, posons $u = 80 - V$. On a alors $du = -dV$ et en substituant, on obtient :

$$\frac{-du}{u}=0{,}5dt \text{ et } \frac{du}{u}=-0{,}5dt.$$

En intégrant les deux membres de l'équation, on a alors :

$$\int\frac{du}{u}=-0{,}5\int dt.$$

et : $\ln|u| = -0{,}5t + k.$

D'où l'on tire : $|u| = e^{-0{,}5t+k} = e^{-0{,}5t}e^{k}.$

On a donc : $u = \pm e^{k}e^{-0{,}5t} = b_0e^{-0{,}5t},$

où $b_0 = \pm e^{k}$. Puisque $u = 80 - V$, on a alors :

$$80 - V = b_0e^{-0{,}5t}.$$

En isolant $V$, on trouve $V = 80 - b_0e^{-0{,}5t}$.

La solution particulière est obtenue à l'aide de la valeur initiale

$$V(0) = 80 - b_0e^{-0{,}5\times 0} = 40,$$

d'où l'on tire : $80 - b_0 = 40$

et : $b_0 = 40.$

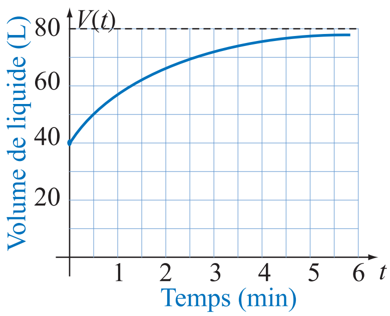
La fonction décrivant la quantité de liquide dans le réservoir dans les instants qui suivent la modification de la directive est alors :

$$V(t) = 80 - 40\,e^{-0{,}5t}\text{ L.}$$

**TIC**

```
>restart;
 Digits:=3;
 eqdiff:=diff(V(t),t)=0.5*(80-V(t));
 cond_init:=V(0)=40;
 dsolve({eqdiff,cond_init},V(t));
 plot(rhs(%),t=0..6,V=0..80);
```

| Temps *t* (min) | Volume *V*(L) |
|---|---|
| 0 | 40 |
| 1 | 56 |
| 2 | 65 |
| 3 | 71 |
| 4 | 75 |
| 5 | 77 |




c) La dérivée première de la fonction est :

$$V'(t) = 20\,e^{-0,5t}\text{ L/min.}$$

Elle ne s'annule jamais et est toujours positive. La fonction est donc toujours croissante. De plus, il n'y a ni minimum ni maximum. La dérivée seconde de la fonction est

$$V''(t) = -10\,e^{-0,5t}\text{ L/min}^2.$$

Elle ne s'annule jamais et est toujours négative. La fonction est donc toujours concave vers le bas. Conformément à l'énoncé du problème, le modèle donne comme valeur initiale :

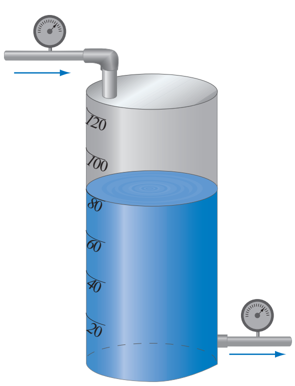
$$V(0) = 40\text{ L}$$

La valeur stable est : $\lim\limits_{t\to\infty}(80-40e^{-0,5t}) = 80$ L.

Puisqu'il n'y a ni minimum ni maximum, on peut calculer quelques valeurs pour augmenter la précision de l'esquisse graphique. Ce qui donne le tableau et le graphique ci-contre.

## EXEMPLE 11.3.3

ÉquationDiffB03




Le réservoir d'eau de l'exemple précédent contient maintenant 80 litres et on ajuste la directive du mécanisme de contrôle pour que le contenu diminue à 40 litres.

a) Décrire algébriquement le taux de variation de la quantité de liquide en fonction du volume V.

b) Déterminer la fonction décrivant la quantité de liquide dans le réservoir dans les instants qui suivent la modification de la directive.

c) Représenter graphiquement cette fonction.

### *Solution*

a) Si le volume diminue, alors le taux de variation du volume par rapport au temps est négatif. Dans ce cas, le taux de variation est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}(40-V).$$

b) En isolant les variables, on a :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}(40-V).$$

Pour intégrer, posons $u = 40 - V$. On a alors $du = -\,dV$ et, en substituant, on obtient :

$$\frac{-du}{u} = 0,5\,dt \text{ et } \frac{du}{u} = -0,5\,dt.$$

En intégrant les deux membres de l'équation, on a alors :

$$\int\frac{du}{u} = \int -0,5\,dt, \text{ qui donne } \ln|u| = -0,5t + k.$$

D'où l'on tire $|u| = e^{-0,5t+k} = e^{-0,5t}e^k$ et $u = \pm\, e^k e^{-0,5t} = b_0 e^{-0,5t}$, où $b_0 = \pm e^k$. Puisque $u = 40 - V$, on a alors :

$$40 - V = b_0 e^{-0,5t}.$$

En isolant $V$, on trouve : $V = 40 - b_0 e^{-0,5t}$.

En substituant la valeur initiale, on a :

$$V(0) = 40 - b_0 e^{-0,5 \times 0} = 80,$$

d'où l'on tire $40 - b_0 = 80$ et $b_0 = -40$.

La fonction décrivant la quantité de liquide dans le réservoir dans les instants qui suivent la modification de la directive est alors :

$$V(t) = 40 + 40\, e^{-0,5t} \text{ L.}$$

c) La dérivée première de la fonction est :

$$V'(t) = -20\, e^{-0,5t} \text{ L/min.}$$

Elle ne s'annule jamais et est toujours négative. La fonction est donc toujours décroissante. De plus, il n'y a ni minimum ni maximum. La dérivée seconde de la fonction est :

$$V''(t) = 10\, e^{-0,5t} \text{ L/min}^2.$$

Elle ne s'annule jamais et est toujours positive. La fonction est donc toujours concave vers le haut. La valeur initiale est :

$$V(0) = 80 \text{ L.}$$

La valeur stable est :

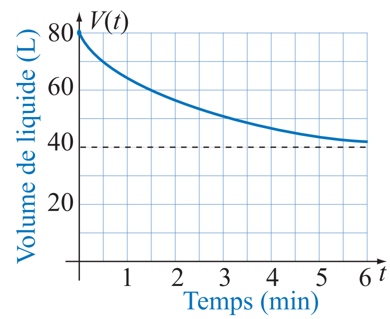
$$\lim_{t\to\infty}(40 + 40e^{-0,5t}) = 40 \text{ L.}$$

Puisqu'il n'y a ni minimum ni maximum, on peut calculer quelques valeurs pour augmenter la précision de l'esquisse graphique. Ce qui donne le tableau et le graphique ci-contre.

**TIC**

```
>restart;
 Digits:=3;
 eqdiff:=diff(V(t),t)=0.5*(40-V(t));
 cond_init:=V(0)=80;
 dsolve({eqdiff,cond_init},V(t));
 plot(rhs(%),t=0..6,V=0..80);
```

| Temps $t$ (min) | Volume $V$ (L) |
|---|---|
| 0 | 80 |
| 1 | 64 |
| 2 | 55 |
| 3 | 49 |
| 4 | 45 |
| 5 | 43 |




### Écoulement d'un fluide

**EXEMPLE 11.3.4**

Un réservoir cylindrique a une hauteur de 4 m et un rayon de 1 m. Il est rempli d'un liquide qu'on laisse couler par un petit trou circulaire de 3 cm de rayon au fond du réservoir. On sait que le taux est :

$$\frac{dV}{dt} = -2,6\, A_0 \sqrt{h}.$$

où $h$ est la hauteur du liquide au-dessus du trou en mètres (m), $A_0$, la surface du trou en mètres carrés (m$^2$) et $dV/dt$, le taux d'écoulement en mètres cubes par seconde (m$^3$/s).

Déterminer le temps nécessaire pour que le réservoir se vide.

ÉquationDiffB04

■ ***Solution***

Il nous faut exprimer $h$ en fonction de $t$, connaissant $dV/dt$. On sait que le volume d'un cylindre est donné par $V = \pi r^2 h$. La quantité de liquide en un instant donné va former un cylindre de hauteur $h$ et de rayon 1 m. On a donc :

$$V = \pi h$$

Par dérivation implicite, on obtient :

$$\frac{dV}{dt} = \pi\frac{dh}{dt}, \text{ d'où } \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{dV}{dt}.$$

**REMARQUE**

Le taux de variation du volume de liquide n'est pas constant. On ne peut donc diviser le volume initial par le taux de variation pour répondre à la question posée.

**TIC**

```
>restart;
 Digits:=3;
 eqdiff:=diff(h(t),t)
   =-0.00234*(sqrt(h(t)));
 cond_init:=h(0)=4;
 dsolve({eqdiff,cond_init},h(t));
 plot(rhs(%),t=0..1710,h=0..4);
```

**REMARQUE**

On pourrait exprimer $h$ en fonction de $t$ en élevant au carré pour éliminer le radical, cela n'est pas indispensable pour répondre à la question posée.

Puisque le trou a un rayon de 3 cm, on a $A_0 = \pi(0{,}03)^2 = 0{,}0009\pi$ m$^2$. Le taux de variation du volume est donc :

$$\frac{dV}{dt} = -2{,}6\ \pi(0{,}0009)\sqrt{h}.$$

En substituant, on obtient :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi} \times -2{,}6\pi(0{,}0009)\sqrt{h} = -0{,}00234\sqrt{h}.$$

En séparant les variables, on obtient :

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -0{,}00234\,dt.$$

En intégrant : $$\int h^{-1/2}\ dh = -0{,}00234\int dt$$

$$2h^{1/2} = -0{,}00234t + k.$$

Au temps $t = 0$, le réservoir est plein et on a $h = 4$ m. En substituant, on obtient :

$$2\sqrt{4} = -0{,}00234 \times 0 + k,$$

d'où $k = 4$. Le modèle particulier est donc :

$$\sqrt{h} = -0{,}00117t + 2.$$

Pour déterminer le temps nécessaire pour que le réservoir se vide complètement, il faut déterminer le temps $t$ pour lequel $h = 0$. Cela donne :

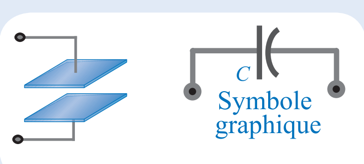
$$-0{,}00117t + 2 = 0 \text{ et } t = 1709{,}4$$

Le réservoir se videra en 1709,4 s ou 28,5 minutes.

## Composantes électriques

ÉquationDiffB05

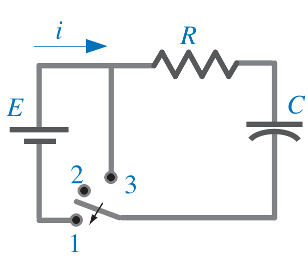
Les composantes électriques sont caractérisées par la relation entre la tension aux bornes de la composante et le courant qui circule dans la branche du circuit comportant cette composante. Pour une résistance, la relation tension-courant est définie par la loi d'Ohm, $v = ri$. Pour un condensateur et dans une bobine, elles sont définies à l'aide des taux de variation.




**Condensateur**

Un **condensateur** est un assemblage formé de deux plaques conductrices parallèles et séparées par un matériau isolant. Ces plaques portent le nom d'**armatures**.

### Charge d'un condensateur




Lorsqu'un condensateur est monté en série avec une résistance et que l'on ferme l'interrupteur, il y a un déplacement des charges qui s'accumulent dans le condensateur. Il y a donc initialement un courant égal à $E/R$ ampères à la fermeture du circuit. Ce courant ne peut être constant car la tension diminue aux bornes de la résistance à mesure qu'elle augmente aux bornes du condensateur.

Lorsque les charges s'accumulent, un champ électrique se développe à l'intérieur du condensateur. L'énergie est transportée de la source de tension au condensateur. Cette action se manifeste par l'apparition d'une charge $Q$ aux plaques et d'une tension entre les plaques. La **capacité** est la mesure de l'aptitude d'un condensateur à accumuler des charges sur ses armatures. Pour une tension donnée à ses bornes, elle est déterminée par :

$$C = \frac{Q}{V},$$

où $C$ est en farads (F), $Q$ est en coulombs (C) et $V$ est en volts (V). L'unité de base de la capacité est le farad, mais en pratique c'est une unité trop grande et on utilise le microfarad (μF) ou le picofarad (pF). Lorsque la charge et la tension sont variables, on les note $q$ et $v_C$, la relation s'écrit

$$C = \frac{q}{v_C}, \text{ d'où l'on tire } q = Cv_C.$$

En dérivant par rapport à $t$, on a $\dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{dv_C}{dt}$, car $C$ est une constante et,

puisque $i = dq/dt$, on obtient $i = C\dfrac{dv_C}{dt}$.

**REMARQUE**
Durant la période de charge (position 1 du commutateur), la loi des tensions de Kirchhoff donne :

$$v_R + v_C = E$$

Lorsque le condensateur est chargé et que l'on déplace le commutateur en position 2, le condensateur demeure chargé. Si, par la suite, on place le commutateur en position 3, le condensateur se décharge. La loi des tensions de Kirchhoff donne alors :

$$v_R + v_C = 0$$

puisque la maille ne contient pas de source de tension.

**RELATION**

**Tension courant pour un condensateur**

Un condensateur est une composante dont la relation entre la tension et le courant est décrite par :

$$i_C = C\frac{dv_C}{dt},$$

où $C$ est la capacité du condensateur mesurée en farads (F), $v_C$ est la tension à ses bornes et $i_C$ est le courant.

**REMARQUE**
Le courant dans la branche contenant un condensateur est proportionnel au taux de variation de la tension et la constante de proportionnalité est la mesure de la capacité d'emmagasiner de l'énergie sous forme de champ électrique.

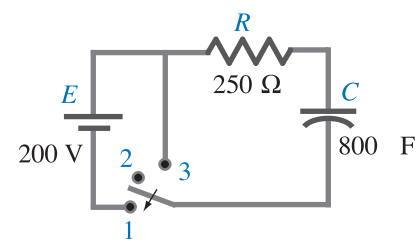
Si la tension aux bornes d'un condensateur est constante, le taux de variation est nul et il ne circule pas de courant dans la branche du circuit comportant cette composante.

## EXEMPLE 11.3.5

On ferme le circuit illustré ci-contre en plaçant l'interrupteur en position 1.

a) Déterminer la fonction décrivant la charge au temps t si celle-ci est initialement nulle.
b) Déterminer la valeur stable de la charge.
c) Esquisser le graphique de cette fonction.

ÉquationDiffB06




■ ***Solution***

a) Par la loi des tensions de Kirchhoff, on a après la fermeture :

$$v_R + v_C = 200 \text{ V or } v_C = \frac{q}{C} = \frac{q}{800 \times 10^{-6}} \text{ et } v_R = Ri = 250i,$$

ce qui donne : $$250i + \frac{q}{800 \times 10^{-6}} = 200 \text{ V}.$$

**TIC**

```
> restart;
  Digits:=3;
  eqdiff:=diff(q(t),t)=-5*(q(t)-0.16);
  cond_init:=q(0)=0;
  dsolve({eqdiff,cond_init},q(t));
  plot(rhs(%),t=0..1,q=0..0.2);
```

**REMARQUE**

En utilisant le fait que le courant est le taux de variation de la charge par rapport au temps, on peut trouver la fonction décrivant le courant en dérivant la fonction qui décrit la charge. On peut de plus déterminer les fonctions décrivant les tensions aux bornes de la résistance et du condensateur en utilisant les lois d'Ohm et de Kirchhoff.

Puisque $i = \dfrac{dq}{dt}$, on a $250\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{800 \times 10^{-6}} = 200$ V.

En séparant les variables,

$$250\frac{dq}{dt} = 200 - \frac{q}{800 \times 10^{-6}}$$
$$250\frac{dq}{dt} = \frac{0{,}16 - q}{800 \times 10^{-6}}$$
$$\frac{dq}{0{,}16 - q} = \frac{dt}{0{,}2}$$
$$\frac{dq}{q - 0{,}16} = -5dt.$$

Pour résoudre cette équation différentielle, nous aurons recours à un changement de variable en posant $u = q - 0{,}16$ d'où $du = dq$ et, en substituant, on a :

$$\frac{du}{u} = -5dt \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{u} = -\int 5dt, \text{ d'où } \ln|u| = -5t + k.$$

Par conséquent, $|u| = e^{-5t+k} = e^k e^{-5t}$ et $u = \pm e^k e^{-5t} = b_0 e^{-5t}$,

qui donne : $q - 0{,}16 = b_0 e^{-5t}$.

La fonction décrivant la charge est alors :

$$q(t) = 0{,}16 + b_0 e^{-5t}.$$

Puisque le condensateur était initialement déchargé, on a :

$$q(0) = 0{,}16 + b_0 e^0 = 0.$$

d'où $0{,}16 + b_0 = 0$ et $b_0 = -0{,}16$. La solution particulière est

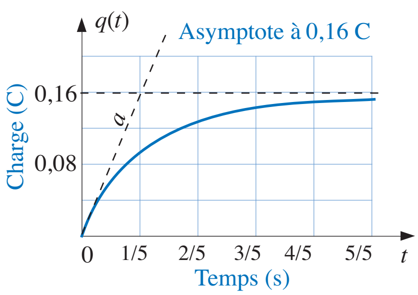
$$q(t) = 0{,}16 - 0{,}16e^{-5t} = 0{,}16(1 - e^{-5t}) \text{ coulombs}$$

b) La valeur stable est la limite lorsque $t$ tend vers l'infini,

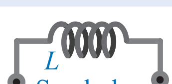
$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty} 0{,}16(1 - e^{-5t}) = 0{,}16 \text{ C.}$$

ce qui signifie, que pour une tension de 200 volts, le condensateur pourra accumuler une charge de 0,16 coulombs.

c) La représentation graphique de la charge accumulée est donnée ci-contre.




$$a = \left.\frac{dq}{dt}\right|_0 = i_0 = \frac{E}{R}$$



Symbole graphique

**Bobine**

Une **bobine** est un enroulement d'un fil conducteur autour d'un cylindre. Lorsqu'on fait circuler un courant dans le fil constituant la bobine, il y a interaction entre le courant et le champ magnétique généré par ce courant.

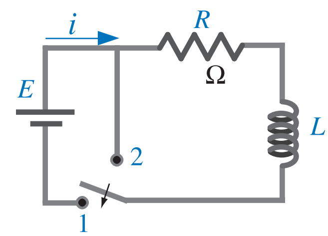
ÉquationDiffB07

D'après la découverte de Oersted, un courant dans un fil génère un champ magnétique autour du fil et l'existence de ce champ est détecté par son effet sur l'aiguille d'une boussole à proximité du fil. Lorsque le fil est enroulé sur lui-même pour former une bobine, le champ magnétique est confiné dans un espace restreint.

Le champ magnétique crée alors de l'interférence en s'opposant aux variations du courant, ce qui retarde la variation du courant dans le circuit contenant la bobine. La mesure de l'opposition d'une bobine aux variations de courant s'appelle l'**inductance** de la bobine et elle est notée $L$. L'unité de mesure de l'inductance est le henry (H).

### Charge d'une bobine

Lorsqu'on ferme un circuit série comprenant une source de tension $E$, une bobine d'inductance $L$ et une résistance $R$, la tension $v_L$ aux bornes de la bobine est égale à $E$ au moment de la fermeture du circuit. De plus, le courant est nul à la fermeture, à cause du phénomène d'inductance.




Le courant augmente progressivement. On a donc une variation de courant et le champ magnétique généré par ce courant s'oppose à cette variation. Le courant prendra un certain temps pour circuler normalement dans la bobine.

**RELATION**

**Tension courant pour une bobine**

Une bobine est une composante dont la relation entre la tension et le courant est décrite par :

$$v_L = L\frac{di}{dt},$$

où $L$ est l'inductance de la bobine mesurée en henrys (H), $v_L$ est la tension à ses bornes et $i$ est le courant.

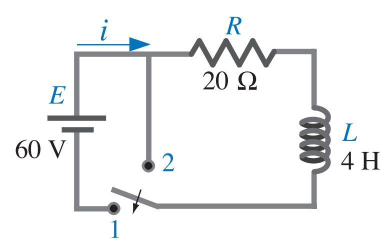
Si le courant dans une bobine est constant, le taux de variation est nul et il n'y a pas de tension aux bornes de la bobine.

**EXEMPLE 11.3.6**

On place le commutateur du circuit illustré en position 1.

a) Déterminer la fonction décrivant le courant en fonction du temps.
b) Déterminer la valeur stable du courant dans le circuit.
c) Esquisser le graphique du courant.
d) Déterminer la fonction décrivant la tension aux bornes de la résistance au temps $t$, trouver sa valeur stable et esquisser son graphique.
e) Déterminer la fonction décrivant la tension aux bornes de la bobine au temps $t$, trouver sa valeur stable et esquisser son graphique.

ÉquationDiffB08




***Solution***

a) La loi des tensions de Kirchhoff nous permet d'écrire que

$$v_R + v_L = 60.$$

Or, les données du circuit sont :

$$v_R = Ri = 20i \text{ et } v_L = L\frac{di}{dt} = 4\frac{di}{dt}.$$

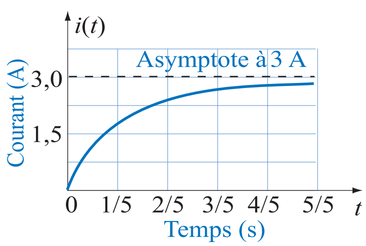
En substituant, on obtient l'équation différentielle à variables séparables

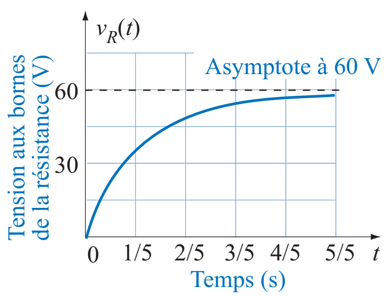
$$20i + 4\frac{di}{dt} = 60 \text{ V}.$$

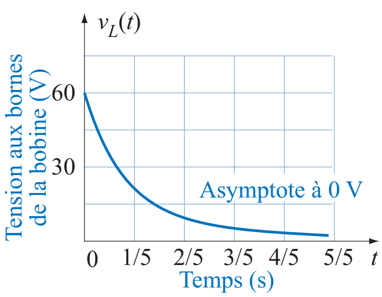
**TIC**

```
> restart;
  Digits:=3:
  R:=20;L:=4;E:=60;
  eqdiff:=diff(i(t),t)=5*(3-i(t));
  cond_init:=i(0)=0;
  dsolve({eqdiff,cond_init},i(t));
  plot(rhs(%),t=0..1,i=0..3);

> i:=t->3-3*exp(-5*t);
  vR:=t->20*(3-3*exp(-5*t));
  vL:=t->60*exp(-5*t);
  plot({vR(t),vL(t)},t=0..1,vR=0..60);
```




En séparant les variables, on obtient :

$$4\frac{di}{dt}=60-20i,\text{ d'où }\frac{di}{dt}=15-5i\text{ et }\frac{di}{3-i}=5\,dt.$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on effectuera un changement de variable en posant $u = 3 - i$, d'où $du = -\,di$. On a donc en substituant :

$$\frac{-du}{u}=5\,dt\text{ et }\frac{du}{u}=-5\,dt,$$

d'où $\int\frac{du}{u}=-\int 5\,dt$ qui donne $\ln|u| = -5t + k$ et d'où l'on tire : $|u| = e^{-5t+k}$, soit $u = \pm e^{k}\,e^{-5t} = b_0\,e^{-5t}$ où $b_0 = \pm\, e^{k}$.

En substituant $3 - i$ à $u$, on obtient $i = 3 - b_0\,e^{-5t}$.

Puisque le courant est initialement nul, on a :

$$i(0) = 3 - b_0\,e^{-5\times 0} = 0,$$

d'où l'on tire $b_0 = 3$. La fonction décrivant le courant est :

$$i(t) = 3(1 - e^{-5t})\text{ ampères.}$$

b) La valeur stable du courant est :

$$\lim_{t\to\infty} i(t)=\lim_{t\to\infty} 3(1-e^{-5t})=3\text{ A.}$$

c) La représentation graphique du courant dans le circuit est donnée ci-contre.

d) Par la loi d'OHM, on a

$$v_R(t) = Ri(t) = 20 \times 3(1 - e^{-5t})\ \Omega{\cdot}\text{A} = 60(1 - e^{-5t})\text{ V.}$$

La valeur stable de la tension aux bornes de la résistance est alors :

$$\lim_{t\to\infty} v_R(t)=\lim_{t\to\infty} 60(1-e^{-5t})=60\text{ V.}$$

La représentation graphique de la tension aux bornes de la résistance est donnée ci-contre.

e) Par la loi des tensions de Kirchhoff, on a :

$$v_R + v_L = 60,$$

d'où $v_L(t) = 60 - v_R(t) = 60 - 60(1 - e^{-5t}) = 60\,e^{-5t}$ volts.

La valeur stable de la tension aux bornes de la bobine est alors :

$$\lim_{t\to\infty} v_L(t)=\lim_{t\to\infty} 60e^{-5t}=0\text{ V.}$$

### Généralités sur les équations différentielles

Le domaine des équations différentielles est beaucoup plus vaste que ne le laissent supposer nos brèves incursions. Nous présentons maintenant quelques généralités sur le sujet.

ÉquationDiffB09

#### Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une équation comportant des variables ainsi que des dérivées ou des différentielles.

L'**ordre** d'une équation différentielle est celui de sa dérivée la plus élevée.

Nous avons jusqu'à maintenant rencontré quelques équations différentielles que nous avons utilisées pour modéliser des phénomènes. Ainsi,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A) \text{ et } y'' - y' - 2y = 0.$$

sont des équations différentielles. De façon générale, résoudre une équation différentielle signifie **déterminer une fonction**, ou une famille de fonctions satisfaisant à cette équation. Lorsque des conditions particulières sont connues, on peut déterminer une solution particulière parmi la famille de fonctions.

**Solution d'une équation différentielle**

On appelle **solution d'une équation différentielle** toute fonction qui satisfait à cette équation différentielle.

Dans certaines situations, il faut simplement vérifier qu'une fonction est une solution d'une équation différentielle. Pour ce faire, on dérive la fonction et on substitue dans l'équation différentielle pour faire cette vérification.

**EXEMPLE 11.3.7**

Donner l'ordre de l'équation différentielle et :

a) $y'' - y' - 2y = 0$, montrer que $y = e^{2x}$ en est une solution.

b) $y'' + 4y = 0$, montrer que $y = \sin 2x$ en est une solution.

***Solution***

a) L'équation comporte une dérivée seconde, l'équation différentielle est donc d'ordre 2.

En déterminant les dérivées première et seconde de $y = e^{2x}$, on a :

$$y' = 2e^{2x} \text{ et } y'' = 4e^{2x}.$$

En substituant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$y'' - y' - 2y = 4e^{2x} - 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0.$$

La fonction $y = e^{2x}$ est donc une solution de l'équation différentielle

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

b) L'équation comporte une dérivée seconde, l'équation différentielle est donc d'ordre 2.

En déterminant les dérivées première et seconde de $y = \sin 2x$, on obtient :

$$y' = 2\cos 2x \text{ et } y'' = -4\sin 2x.$$

En substituant dans l'équation différentielle, on a alors :

$$y'' + 4y = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0.$$

La fonction $y = \sin 2x$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 4y = 0.$$

**REMARQUE**

Dans cet exemple, la fonction $y = e^{2x}$ n'est pas la seule solution de l'équation différentielle :

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Toutes les fonctions de la famille $y = ke^{2x}$, où $k$ est une constante sont également des solutions de l'équation, puisque :

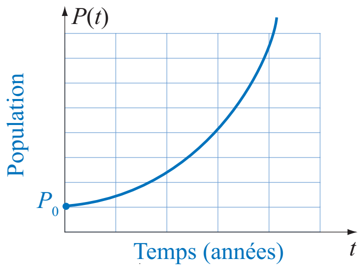
$$y'' - y' - 2y = 4ke^{2x} - 2ke^{2x} - 2ke^{2x} = 0.$$

## Modélisation d'une population

ÉquationDiffB10

Dans une démarche de modélisation à l'aide d'équations différentielles, on fait des hypothèses sur le phénomène. Dans l'étude d'une population, si on fait l'hypothèse que le taux de croissance est proportionnel à la population, en considérant un taux $a = b - d$, où $b$ est le taux de natalité et $d$ le taux de mortalité, on a alors l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = aP, \text{ d'où } \frac{dP}{P} = adt.$$




$\frac{dP}{P} = adt$

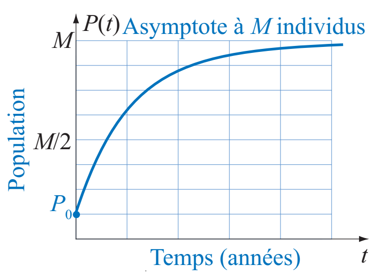
En séparant les variables et en intégrant, on obtient un modèle de la forme

$$P(t) = P_0 e^{at}.$$

La population croît de façon exponentielle, ce qui signifie qu'elle va croître indéfiniment, ce qui n'est pas tout à fait réaliste. La croissance strictement exponentielle d'une population ne tient pas compte de la capacité du milieu à absorber cette croissance.

Pour tenir compte de la capacité du milieu à nourrir la population, on peut considérer une limite $M$ au nombre d'individus que le milieu peut nourrir et supposer que la croissance sera proportionnelle à la différence entre le nombre d'individus vivants et la limite $M$. On a alors :

$$\frac{dP}{dt} = a(M - P), \text{ d'où } \frac{dP}{M - P} = adt.$$




$\frac{dP}{M - P} \quad adt$

En séparant les variables et en intégrant, on obtient un modèle de la forme

$$P(t) = M - P_0 e^{-at}.$$

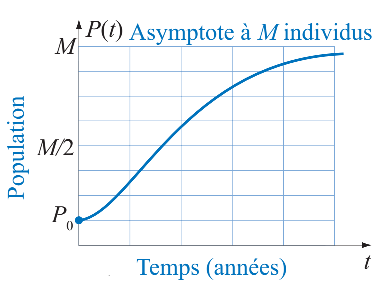
La croissance de la population est alors freinée par la capacité du milieu à nourrir cette population.

Si on considère que la croissance de la population dépend à la fois de la taille de la population et de la capacité du milieu à nourrir cette population, on peut décrire cette hypothèse par l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(1 - \frac{P}{M}\right), \text{ d'où } \frac{dP}{dt} = aP\left(\frac{M - P}{M}\right) \text{ et } \frac{MdP}{P(M - P)} = adt.$$

En séparant les variables et en appliquant l'opérateur d'intégration, on obtient une expression qu'il faut modifier algébriquement pour pouvoir intégrer. On constate facilement que l'expression

$$\frac{M}{P(M - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M - P}.$$




$\frac{M}{P(M - P)} dP \quad adt$

L'équation différentielle peut alors s'écrire

$$\frac{dP}{P} + \frac{dP}{M - P} = adt.$$

On peut alors appliquer l'opérateur d'intégration et chacune des intégrales est simple à effectuer.

$$\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{M - P} = a \int dt.$$

## EXEMPLE 11.3.8

Le ministère des loisirs ensemence un lac avec 250 truites dans une réserve où la pêche est interdite. On estime que le lac possède les ressources pour nourrir 2 000 truites, que le taux de croissance de la population est proportionnel à la taille de la population mais limitée par les ressources disponibles, la constante de proportionnalité est 0,4.

ÉquationDiffB11

a) Déterminer un modèle décrivant la population de truites au temps $t$.

b) Déterminer combien de temps après l'ensemencement la taille de la population sera de 1 000 individus.

### *Solution*

a) L'équation différentielle est

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}4P\left(1 - \frac{P}{2\ 000}\right).$$

On sépare les variables,

$$\frac{2\ 000\,dP}{P(2\ 000 - P)} = 0{,}4dt \text{ et } \frac{dP}{P} + \frac{dP}{2\ 000 - P} = 0{,}4dt.$$

En appliquant l'opérateur d'intégration et ses propriétés, on a

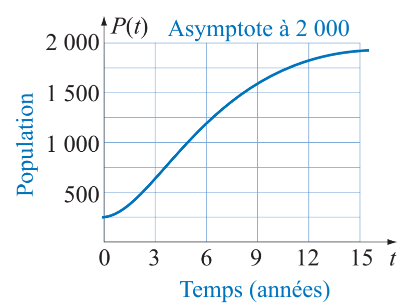
$$\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{2\ 000 - P} = 0{,}4 \int dt,$$

ce qui donne $\ln|P| - \ln|2\ 000 - P| = 0{,}4t + k$

et $-\ln|P| + \ln|2\ 000 - P| = -0{,}4t - k$

En exprimant sous forme exponentielle, on a

$$\frac{2\ 000 - P}{P} = b_0 e^{-0{,}4t}$$




Au temps $t = 0$, la population de truites est de 250 individus, en substituant ces valeurs dans l'expression obtenue, on a

$$\frac{2\ 000 - 250}{250} = b_0 e^0 \text{ qui donne } b_0 = 7.$$

En posant $b_0 = 7$,

$$\frac{2\ 000}{P} - 1 = 7e^{-0{,}4t}, \text{ d'où } \frac{2\ 000}{P} = 1 + 7e^{-0{,}4t}.$$

En isolant $P$, $\dfrac{P}{2\ 000} = \dfrac{1}{1 + 7e^{-0{,}4t}}$ qui donne $P(t) = \dfrac{2\ 000}{1 + 7e^{-0{,}4t}}$.

b) On cherche la valeur de $t$ dont l'image par le modèle est égale à 1 000. On doit donc résoudre l'équation

$$\frac{2\ 000}{1 + 7e^{-0{,}4t}} = 1\ 000.$$

D'où

$$e^{-0{,}4} = \frac{1}{7}.$$

et

$$-0{,}4t = \ln\left(\frac{1}{7}\right) \text{ et } t = \frac{\ln(1/7)}{-0{,}4} = 4{,}86$$

Il faudra environ 5 ans pour que la population de truites compte 1 000 individus.

### Retour sur l'apprentissage

Avec l'avènement du calcul infinitésimal, la modélisation et l'étude des phénomènes a connu un développement phénoménal. La description par des équations différentielles de relations entre les variables et les taux de variation des variables d'un phénomène a mené à la construction de modèles pour décrire ces phénomènes.

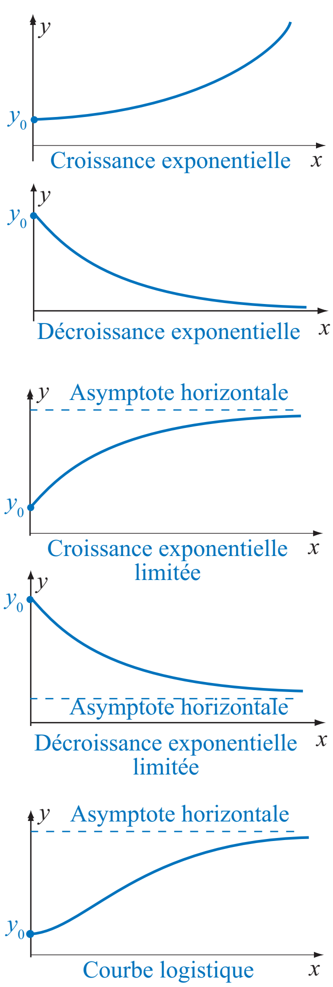
Historiquement, les premières équations différentielles qui ont été résolues, et les plus simples, sont les équations à variables séparables. Pour résoudre une telle équation, il suffit de séparer les variables et d'appliquer l'opérateur d'intégration. On effectue alors une intégrale indéfinie de chacun des membres de l'équation et en isolant la variable indépendante dans la nouvelle équation, on obtient la solution générale du phénomène étudié. À l'aide de l'information sur le phénomène, on peut adapter cette solution générale au cas particulier à résoudre.

Parmi les équations à variables séparables, on rencontre des phénomènes pour lesquels le taux de variation est fonction de la variable indépendante

$$\frac{dy}{dx}=ax+b \Rightarrow dy=(ax+b)dx \Rightarrow \int dy=\int(ax+b)dx \Rightarrow y=a\frac{x^2}{2}+bx+k$$

$$\frac{dy}{dx}=ax^2 \Rightarrow dy=ax^2dx \Rightarrow \int dy=a\int x^2\,dx \Rightarrow y=a\frac{x^3}{3}+k$$

**TAUX DE VARIATION FONCTION DE LA VARIABLE DÉPENDANTE**




On rencontre également des phénomènes pour lesquels le taux de variation est fonction de la variable dépendante :

**Taux de variation relatif constant**

$$\frac{dy/dx}{y}=a \Rightarrow \frac{dy}{y}=adx \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=a\int dx \Rightarrow y=b_0e^{ax}$$

Si $a > 0$, on a une croissance exponentielle et si $a < 0$, on a une décroissance exponentielle.

**Taux proportionnel à la différence avec une valeur limite**

$$\frac{dy/dx}{m-y}=a \Rightarrow \frac{dy}{m-y}=adx \Rightarrow \int\frac{dy}{m-y}=a\int dx \Rightarrow y=m-b_0e^{-ax}$$

$$\frac{dy/dx}{y-m}=a \Rightarrow \frac{dy}{y-m}=adx \Rightarrow \int\frac{dy}{y-m}=a\int dx \Rightarrow y=m+b_0e^{ax}$$

**Équation différentielle de la courbe logistique**

$$\frac{dy}{dt}=ay\left(1-\frac{y}{m}\right) \Rightarrow \frac{mdy}{y(m-y)}=adt \Rightarrow \int\frac{dy}{y}+\int\frac{dy}{m-y}=a\int dt$$

$$\Rightarrow y=\frac{m}{1+b_0e^{-at}} \text{ où } b_o=\frac{m-y_0}{y_0}.$$

Un peu d'histoire

## MODÉLISATION D'UNE POPULATION

On doit à Fibonacci (1175-1250) le premier modèle décrivant l'évolution d'une population. La solution du problème posé par Fibonacci est une suite de nombres définis par récurrence et appelée « suite de Fibonacci ». (NH Fibonacci01)

Dans son *Essai sur le principe de la population* publié en 1798, Thomas Malthus (1766-1834) soutient la thèse qu'une population en croissance libre croît selon une progression géométrique et que les ressources croissent selon une progression arithmétique. Traduite en équations différentielles, la thèse de Malthus signifie que le taux de croissance de la population est de la forme

$$\frac{dP}{dt} = aP, \text{ où } a \text{ est une constante,}$$

alors que le taux de croissance des ressources est

$$\frac{dR}{dt} = b, \text{ où } b \text{ est une constante.}$$

La taille de la population est alors décrite par un modèle exponentiel qui est une version continue d'une croissance exponentielle.

Dans son essai, Malthus s'intéresse à la population humaine et prône le contrôle des naissances car la quantité limitée de ressources mène forcément à une compétition pour l'obtention de ces ressources et que les individus les plus aptes et les plus forts finissent par l'emporter. Cet article a influencé Charles Darwin (1809-1882). Celui-ci s'était déjà initié à la notion de sélection artificielle auprès des éleveurs de pigeons et il a étendu la notion de compétition pour la survie à toutes les espèces vivantes, ce qui l'a mené à l'idée de sélection naturelle.

Pour introduire une régulation en tenant compte des ressources disponibles qui freinent la croissance, Pierre-François Verhulst (1804-1849) ajoute un facteur à l'équation différentielle décrivant le taux de croissance d'une population. L'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

et la taille de la population est décrite par un modèle de la forme

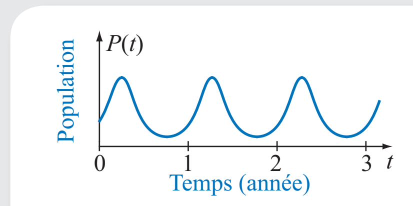
$$P(t) = \frac{M}{1 + b_0 e^{-at}}, \text{ où } b_0 = \frac{M - P_0}{P_0}.$$

La courbe représentant graphiquement cette fonction est appelée **courbe logistique.**

Dans l'étude de certaines populations animales, il faut tenir compte du fait que la quantité de ressources alimentaires disponible peut varier au gré des saisons.

On peut obtenir, par exemple, une équation de la forme

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(\alpha t - \phi)$$

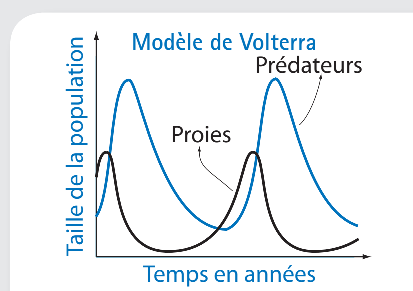



Pour étudier de façon plus précise la dynamique d'une population animale, il faut tenir compte de la prédation. La prédation comme la chasse et la pêche est normalement soumise à un quota fixe $q$ qui est représenté par un terme constant comme dans l'équation

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - q$$

La prédation désigne aussi la relation entre deux espèces animales, un prédateur et sa proie. La dynamique de prédateur-proie a été étudiée indépendamment par Vito Volterra (1860-1940) (NH Volterra) et Alfred James Lotka (1880-1949). Volterra a étudié la dynamique des populations de requins et de sardines en Méditerranée et Lotka les populations de linx et de lièvres au Canada[1]. Les équations différentielles de Lotka-Volterra sont de la forme

$$\frac{dS}{dt} = aS - bSR = SR\left(\frac{a}{R} - b\right)$$
$$\frac{dR}{dt} = -cR + dSR = SR\left(-\frac{c}{S} + d\right)$$




Un autre modèle de fonction de croissance d'une population limitée a été défini par le mathématicien britannique Benjamin Gompertz (1779 -1865) cette fonction est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = c\ln\left(\frac{K}{P}\right)P,$$

où $c$ est une constante et $K$ la capacité maximale.

1. http://accromath.uqam.ca/contents/pdf/PredateursProies.pdf

## 11.4 Exercices

1. En débranchant un fer à repasser, la température de celui-ci décroît à un taux égal à 0,4 fois la différence entre sa température instantanée et la température ambiante qui est de 20°C. Le temps étant mesuré en minutes.
   a) Décrire le taux de variation de la température du fer en fonction de celle-ci.
   b) Déterminer la fonction décrivant la température en fonction du temps, sachant que la température du fer est de 180°C à l'instant où il est débranché.
   c) Trouver la fonction décrivant le taux de variation de la température en fonction du temps.

2. Un réservoir d'eau est doté d'un dispositif électronique permettant de contrôler la quantité de liquide dans le réservoir. Lorsque le réservoir ne contient plus que 50 L de liquide, le système de pompage se met en marche et le taux de variation est décrit par l'équation différentielle :
$$\frac{dV}{dt} = 0{,}4(200 - V),$$
où $t$ est mesuré en minutes.
   a) Déterminer la fonction décrivant la quantité de liquide dans le réservoir en fonction du temps à partir du moment où le mécanisme se met en marche.
   b) Trouver la fonction décrivant le taux de variation de la quantité de liquide en fonction du temps.

3. La pression dans un réservoir de gaz comprimé est de 30 MPa. On ouvre une valve pour diminuer cette pression à 4 MPa. Le taux de variation de la pression durant la période de décompression est décrit par :
$$\frac{dp}{dt} = -0{,}35(p - 4).$$
   a) Déterminer la fonction décrivant la pression dans le réservoir en fonction du temps en minutes à partir de l'ouverture de la valve.
   b) Trouver la fonction décrivant le taux de variation de la pression en fonction du temps.

4. Après un déversement accidentel de produits chimiques dans un lac, les truites souffrent de différentes maladies. Le Ministère de l'environnement estime que le taux de variation du nombre de truites affectées est directement proportionnel au nombre de truites qui ne sont pas encore affectées, le taux est estimé à 0,1.
   a) Sachant que la population de truites avant le déversement était estimée à 50 000, trouver un modèle décrivant le nombre de truites affectées en fonction du temps en mois.
   b) Déterminer après combien de temps la moitié de la population du lac sera affectée.

5. Un appareil est muni d'une roue d'inertie dont la vitesse lors de l'utilisation est de 600 t/min. Lorsqu'on met l'appareil en marche, le taux de variation de la vitesse de la roue $t$ minutes après la mise en marche est égal à 0,4 de la différence entre la vitesse d'utilisation et la vitesse atteinte.
   a) Écrire l'équation différentielle décrivant l'accélération de la roue en fonction de la vitesse.
   b) Résoudre l'équation différentielle et exprimer la vitesse en fonction du temps en minutes.
   c) Représenter graphiquement la vitesse en fonction du temps.
   d) Trouver la fonction décrivant l'accélération en fonction du temps.

6. Un mécanisme de contrôle du niveau de liquide dans un réservoir de 60 $m^3$ se met automatiquement en marche lorsque le volume de liquide dans le réservoir n'est plus que de 5 $m^3$. Pour éviter les débordements, le débit de la pompe est proportionnel à la différence entre la capacité du réservoir et le volume de liquide qu'il contient. La constante de proportionnalité est 0,3 et le temps est mesuré en minutes. De plus, la pompe s'arrête automatiquement lorsque le volume de liquide dans le réservoir est supérieur à 56 $m^3$.
   a) Écrire l'équation différentielle décrivant le débit en fonction du volume de liquide dans le réservoir.
   b) Résoudre l'équation différentielle et exprimer le volume de liquide pompé et le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.
   c) Représenter graphiquement la fonction représentant le volume de liquide dans le réservoir durant la période de remplissage.
   d) Exprimer le débit en fonction du temps à partir de la mise en marche de la pompe.
   e) Pendant combien de temps le système sera-t-il en fonction?

7. En étudiant la population de cerfs d'une région, les biologistes ont constaté que cette population décroît de 8% annuellement à cause de l'exploitation forestière. La population est actuellement évaluée à 5 000 têtes.
   a) Écrire cette information à l'aide d'une équation différentielle.
   b) Déterminer par intégration le modèle décrivant cette population en fonction du temps.
   c) Déterminer dans combien de temps la population aura chuté de 3 000 têtes.

8. Vérifier que la fonction définie par :
$$y = e^x \sin x$$
   est une solution de l'équation différentielle :
$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

9. L'atmosphère terrestre contient du carbone-14 ($^{14}C$) qui est radioactif et du carbone-12 ($^{12}C$) qui est stable. Même si le carbone-14 se désintègre, la quantité présente dans l'atmosphère est constante car des rayons cosmiques bombardent le $CO_2$ de l'atmosphère et, par réaction nucléaire, provoquent la formation du carbone $^{14}C$ qui a une demi-vie de 5 730 ans. Le rapport de carbone-14 sur le carbone-12 ($^{14}C/^{12}C$) est constant dans l'atmosphère et, lors de la photosynthèse, les deux carbones sont absorbés dans le même rapport par les plantes. Le carbone est ensuite absorbé par les herbivores, puis par les carnivores et se transmet à tous les organismes vivants. Lorsqu'un organisme meurt, il cesse d'absorber les deux carbones et, puisque le carbone-14 se désintègre, le rapport $^{14}C/^{12}C$ de cet organisme diminue à partir de la mort de l'organisme.
   a) Construire un modèle mathématique décrivant le rapport $^{14}C/^{12}C$ d'un organisme en fonction du temps à partir de la mort de cet organisme.
   b) On découvre un morceau de bois dont le rapport $^{14}C/^{12}C$ mesuré est 10% du rapport normal. Quel est l'âge de ce morceau de bois ?

10. Le Ministère de la chasse et de la pêche a décidé d'aménager une réserve faunique dans le nord de la province. Les ressources de ce territoire seraient suffisantes pour nourrir une population de 1500 cerfs de Virginie, cependant la population actuelle n'est que de 300 têtes à cause de l'activité des chasseurs. Le ministère prévoit que le taux de croissance annuel de la population de cerfs après la création de la réserve sera proportionnel à la différence entre le nombre de cerfs que la réserve peut nourrir et le cheptel de la réserve, la constante étant 0,12.
   a) Trouver le modèle décrivant la population de cerfs en fonction du temps $t$ en années
   b) Trouver dans combien de temps la population de la réserve aura atteint 1 200 têtes.

11. Une municipalité distribue à chaque année un plant d'arbuste à chaque propriétaire qui en fait la demande afin d'embellir les différents quartiers de la ville. Elle estime que le taux de variation du nombre de propriétaires qui demandent un arbuste est proportionnel au nombre de propriétaires qui n'en ont pas encore reçu et que la constante de proportionnalité est de 0,14.
   a) Sachant que la ville compte 5 400 propriétaires, déterminer le modèle mathématique donnant le nombre d'arbustes distribués en fonction du temps $t$.
   b) À l'aide de ce modèle, trouver combien la ville devrait commander de plants, cinq ans après l'implantation de cette politique.

12. On doit remplacer une partie de l'eau d'un réservoir de 80 L par de l'eau pure pour diminuer la concentration de polluants dans le réservoir. L'opération consistera dans un premier temps à diminuer le volume de liquide à 10 L puis à pomper de l'eau pure afin de remplir le réservoir à nouveau. Durant la période de vidange, le taux de variation du volume est proportionnel à la différence entre le volume de liquide dans le réservoir et le volume souhaité, la constante de proportionnalité étant –0,20 et le temps est mesuré en minutes.
   a) Écrire l'équation différentielle décrivant le taux de variation du volume de liquide dans le réservoir durant la période de vidange.
   b) Résoudre l'équation différentielle et exprimer le volume de liquide en fonction du temps durant la période de vidange.
   c) Représenter graphiquement la fonction représentant le volume de liquide dans le réservoir durant la période de vidange, si on arrête le système au bout de dix minutes.
   d) Exprimer le taux de variation du volume de liquide en fonction du temps durant la période de vidange. Représenter graphiquement.

On arrête le système de vidange au bout de 10 minutes et on met en marche le système de pompage. Durant la période de remplissage, le taux de variation du volume de liquide est proportionnel à la différence entre la capacité du réservoir et le volume de liquide contenu dans celui-ci. La constante de proportionnalité est 0,25.

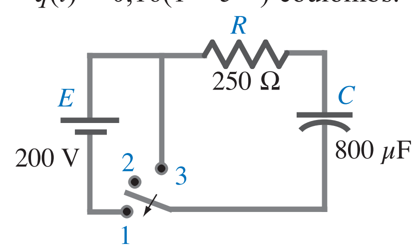
e) Quelle est la quantité de liquide dans le réservoir lorsqu'on arrête le système de vidange?
f) Écrire l'équation différentielle décrivant le taux de variation du volume de liquide dans le réservoir durant la période de remplissage.
g) Résoudre l'équation différentielle et exprimer le volume de liquide en fonction du temps durant la période de remplissage.
h) Représenter graphiquement la fonction représentant le volume de liquide dans le réservoir durant la période de remplissage, si on arrête le système au bout de dix minutes.
i) Exprimer le taux de variation du volume de liquide en fonction du temps durant la période de remplissage. Représenter graphiquement.
j) On arrête le système au bout de 10 minutes, calculer le volume de liquide dans le réservoir à ce moment.

13. Un mécanisme de contrôle du niveau de liquide dans un réservoir de 400 litres se met automatiquement en marche lorsque le volume de liquide dans le réservoir n'est plus que de 50 litres. Pour éviter les débordements, le débit de la pompe est proportionnel à la différence entre la capacité du réservoir et le volume de liquide qu'il contient. La constante de proportionnalité est 0,4 et le temps est mesuré en minutes. De plus, la pompe s'arrête automatiquement lorsque le volume de liquide dans le réservoir est supérieur à 380 litres.
   a) Écrire l'équation différentielle décrivant le débit de la pompe en fonction du volume de liquide dans le réservoir.
   b) Résoudre l'équation différentielle et exprimer le volume de liquide pompé en fonction du temps et le volume de liquide contenu dans le réservoir en fonction du temps.
   c) Représenter graphiquement la fonction représentant le volume de liquide dans le réservoir durant la période de remplissage.
   d) Exprimer le débit en fonction du temps à partir de la mise en marche de la pompe.
   e) Calculer le temps écoulé entre la mise en marche de la pompe et son arrêt automatique.

14. Vérifier que la fonction définie par :
$$y = e^{\sin x}$$
est une solution de l'équation différentielle :
$$y'' = y(\cos^2 x - \sin x).$$

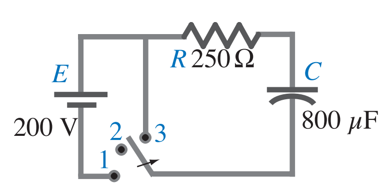
15. Vérifier que la fonction définie par :
$$y = \tan x$$
est une solution de l'équation différentielle :
$$y'' = 2yy'.$$

16. La charge du condensateur du circuit illustré, durant la période transitoire suivant la fermeture du circuit, est donnée par :
$$q(t) = 0{,}16(1 - e^{-5t}) \text{ coulombs.}$$



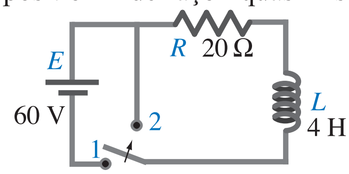

   a) Trouver la fonction décrivant le courant au temps $t$, trouver sa valeur stable et esquisser son graphique.
   b) Trouver la fonction décrivant la tension aux bornes de la résistance au temps $t$, trouver sa valeur stable et esquisser son graphique.
   c) Trouver la fonction décrivant la tension aux bornes du condensateur au temps $t$, trouver sa valeur stable et esquisser son graphique.
   d) Vérifier que les fonctions décrivant la tension et le courant satisfont la relation
$$i_C = C\frac{dv_C}{dt}.$$
   e) Vérifier que les fonctions décrivant la tension et la charge satisfont la relation :
$$q = Cv_C.$$

17. Le condensateur du circuit illustré étant chargé, on place le commutateur en position 3.




   a) Trouver la fonction décrivant la charge du condensateur au temps $t$.
   b) Trouver la valeur stable de la charge.
   c) Esquisser le graphique de cette fonction.

18. Dans le circuit illustré ci-contre circule un courant constant lorsque l'interrupteur est en position 1 depuis un certain temps. On déplace le commutateur en position 2 de façon quasi-instantanée.




a) Trouver la fonction décrivant le courant en fonction du temps.
b) Trouver la valeur stable du courant dans le circuit.
c) Esquisser le graphique du courant.

## Exercices synthèse

1. Une courbe est telle que la pente de la tangente en tout point est le quart de son abscisse. Écrire l'équation différentielle décrivant cette propriété de la courbe et trouver l'équation de la courbe.

2. Une courbe est telle que la pente de la tangente en tout point est le produit des coordonnées du point. Écrire l'équation différentielle décrivant cette propriété de la courbe et trouver l'équation de la courbe.

3. Une courbe est telle que la pente de la tangente en tout point est égale à l'ordonnée de ce point. Écrire l'équation différentielle décrivant cette propriété de la courbe et trouver l'équation de la courbe.

4. Une courbe est telle que la pente de la tangente en tout point est égale à l'inverse de l'ordonnée de ce point. Écrire l'équation différentielle décrivant cette propriété de la courbe et trouver l'équation de la courbe.

5. Une courbe est telle que la pente de la tangente en tout point est égale à l'inverse du produit des coordonnées de ce point. Écrire l'équation différentielle décrivant cette propriété de la courbe et trouver l'équation de la courbe.

6. Une courbe est telle qu'en tout point le rapport de la pente de la tangente à l'ordonnée est constant. Écrire l'équation différentielle décrivant cette propriété de la courbe et trouver l'équation de la courbe.

7. Une courbe est telle qu'en tout point le rapport de la pente de la tangente au carré de l'ordonnée est constant. Écrire l'équation différentielle décrivant cette propriété de la courbe et trouver l'équation de la courbe.

8. Une courbe est telle que la pente de la tangente en tout point est égale à la racine carrée de l'abscisse de ce point. Écrire l'équation différentielle décrivant cette propriété de la courbe et trouver l'équation de la courbe.

9. Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{dy}{dx} - 2x = 0$
d) $\frac{dy}{dx} - x = e^x$
b) $\frac{dy}{dx} + 3y = 0$
e) $x\frac{dy}{dx} = 1$
c) $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$
f) $x^2\frac{dy}{dx} = 4$
g) $x^2\,dy = 5\,dx$
h) $3x^2\,dy = 5y\,dx$

10. Trouver la solution particulière correspondant aux données du problème des équations différentielles suivantes :

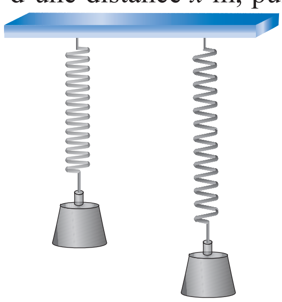
a) $\frac{dy}{dx} - 4x = 0$ et $y = 2$ lorsque $x = 1$
b) $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$ et $y = 3$ lorsque $x = 1$
c) $x\frac{dy}{dx} = 4$ et $y = 2$ lorsque $x = 1$
d) $x^2\frac{dy}{dx} = 8$ et $y = 4$ lorsque $x = 2$
e) $x^2\,dx = 4y\,dy$ et $y = 5$ lorsque $x = 1$
f) $x^2\,dx = 4y\,dy$ et $y = 4$ lorsque $x = 0$

11. Résoudre les équations différentielles suivantes et déterminer la valeur particulière correspondant au point donné. Exprimer $y$ en fonction de $x$ et vérifier que cette fonction est bien une solution de l'équation différentielle.

a) $e^x dx + \cos y\,dy = 0$ et $(0; \pi/2)$
b) $y\,dy - (y^2 + 1)\tan x\,dx = 0$ et $(0; 0)$

12. Si on néglige la résistance de l'air, un corps en chute libre est soumis à une accélération constante dirigée vers le sol dont la grandeur est 9,8 m/s$^2$.
   a) Décrire ce phénomène par une équation différentielle.
   b) Si un corps est lancé verticalement vers le haut d'une hauteur de 60 m avec une vitesse initiale de 30 m/s, décrire sa vitesse et sa position en fonction du temps en résolvant cette équation différentielle.
   c) Déterminer combien de temps après le lancement le corps touchera le sol.

13. On suspend un corps à l'extrémité d'un ressort dont la constante de rappel est $k = 20$ N/m. À partir de la position d'équilibre, on tire légèrement le corps vers le bas d'une distance $x$ m, puis on relâche.



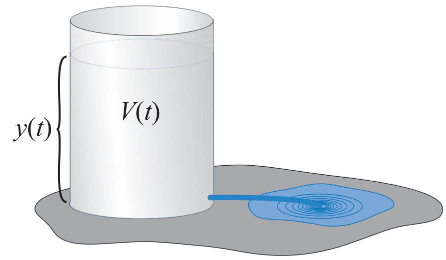
En supposant la résistance de l'air négligeable :
   a) Déterminer la force de rappel du ressort (force élastique).
   b) En appliquant la deuxième loi du mouvement de Newton, ($F = ma$), établir l'équation différentielle qui décrit le mouvement dû seulement à la force élastique pour un corps de masse $m$.
   c) Sans intégrer, déterminer quel type de solution admet une telle équation différentielle?

14. L'eau s'échappe par une perforation au fond d'un réservoir. En notant $y(t)$ le niveau de liquide et $V(t)$ le volume d'eau dans le réservoir, la loi de Torricelli établit que :

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

où $a$ est l'aire de la perforation, $g$, l'accélération due à la pesanteur.

Considérons un réservoir cylindrique de 2 m de hauteur et de 40 cm de rayon ayant à la base une perforation circulaire de 4 mm de rayon.

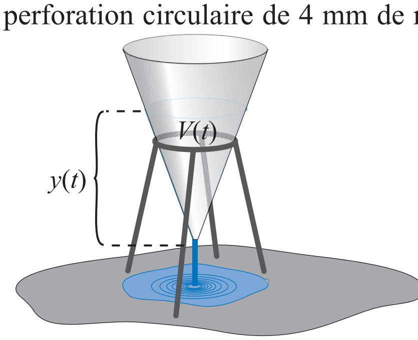



   a) Montrer que :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{5\ 000}\sqrt{5y} \text{ m/s.}$$

   b) Résoudre cette équation différentielle en supposant que le réservoir est plein au temps $t = 0$.
   c) Combien faudra-t-il de temps pour que le réservoir se vide?

Considérons un réservoir conique inversé de 3 m de hauteur et de 2 m de diamètre ayant à la base une perforation circulaire de 4 mm de rayon.




   d) Déterminer $dy/dt$.
   e) Résoudre cette équation différentielle en supposant que le réservoir est plein au temps $t = 0$.
   f) Combien faudra-t-il de temps pour que le réservoir se vide?

15. Une citerne contient 2 000 L de saumure dont 15 kg de sel dissout. On ajoute de l'eau pure à raison de 5 L/min. La solution est parfaitement mélangée et s'écoule de la citerne au même débit.
   a) Déterminer la quantité de sel dans la citerne après $t$ minutes.
   b) Déterminer la quantité de sel dans la citerne après 60 minutes.
   c) Combien de temps après le début du procédé la quantité de sel aura-t-elle diminué de moitié?