MODÉLISATION *et* FONCTIONS ALGÉBRIQUES

CHAPITRE 5

Utiliser des modèles algébriques pour modéliser des phénomènes du domaine de l'électronique.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- l'utilisation des ressources de l'algèbre dans la description de divers phénomènes;
- l'analyse d'un phénomène modélisable par une fonction affine;
- l'analyse d'un phénomène modélisable par une fonction rationnelle;
- l'analyse d'un phénomène modélisable par une fonction quadratique.

OBJECTIFS

5.1 Utiliser des fonctions polynomiales dans la description et l'analyse de situations diverses.

5.2 Déterminer les asymptotes, les zéros et l'ordonnée à l'origine d'une fonction rationnelle.

5.3 Décrire symboliquement une situation à l'aide d'un modèle mathématique approprié.

5.1 Modélisation affine

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Lorsque la relation entre les variables d'un phénomène est un lien affine, la modélisation du phénomène consiste à déterminer l'équation de cette droite à l'aide des données du problème. On applique diverses procédures selon l'information disponible :

- Si le taux de variation des variables et la valeur à 0 sont connus, on peut écrire directement le modèle. Graphiquement, le taux de variation est la pente de la droite et la valeur à 0 est l'ordonnée à l'origine de la droite.
- Si deux couples de correspondances sont connus, on doit déterminer l'équation d'une droite passant par deux pints connus.
- Si plusieurs couples de correspondances sont connus, on procède par régression, nous y reviendrons au chapitre 7.

EXEMPLE 5.1.1

L'entreprise qui vous emploie doit remplacer temporairement un appareil électronique nécessitant des réparations dont la durée pourrait être de deux à trois mois. Deux compagnies de location ont présenté une soumission. La première compagnie demande 12 $ par jour de location, tous services inclus. La deuxième compagnie demande 8 $ par jour et des frais d'installation de 210 $. L'appareil est muni d'un dispositif qui détermine le nombre de jours d'utilisation pour tenir compte seulement des jours ouvrables dans la facturation. Vous devez préparer une étude comparative de ces offres pour le Conseil d'administration qui devra choisir un fournisseur.

Solution

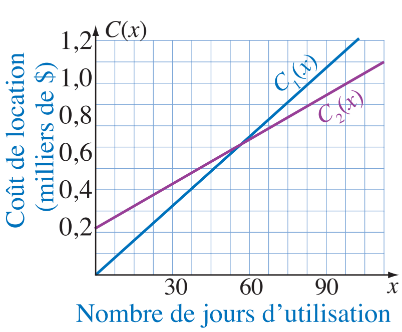
Désignation des variables

Dans cette situation, les variables sont le coût et la durée de la location ou, plus précisément, le nombre de jours d'utilisation de l'appareil. De plus, le coût dépend du nombre de jours d'utilisation. Représentons par x le nombre de jours d'utilisation et par C le coût. Comme il y a deux soumissions, on utilisera C_1 pour le coût de la première soumission et C_2, pour le coût de la deuxième. On peut décrire algébriquement la relation entre les variables par

$$C_1(x) = 12x$$

et
$$C_2(x) = 8x + 210$$

Ces modèles mathématiques sont de la forme général $y = ax +$ b. La représentation graphique du premier modèle est une droite dont la pente, $a = 12$, représente les frais par jour de location. La représentation graphique du deuxième modèle est une droite dont la pente, $a = 8$, représente les frais par jour et l'ordonnée à l'origine, $b = 210$, représente les frais fixes. On représente la variable indépendante sur l'axe horizontal et la variable dépendante sur l'axe vertical, ce qui donne la représentation graphique ci-contre.



Le coût pour 30 jours d'utilisation pour chacune des soumissions est

$C_1(30) = 12 \text{ x } 30 = 360$ \$ et $C_2(30) = 8 \text{ x } 30 + 210 = 450$ \$.

Le coût pour 90 jours d'utilisation pour chacune des soumissions est

$C_1(90) = 12 \text{ x } 90 = 1\,080$ \$ et $C_{12}(0) = 8 \text{ x } 90 + 210 = 930$ \$.

Fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction définie par une expression de la forme

$$f(x) = ax + b,$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

REMARQUE

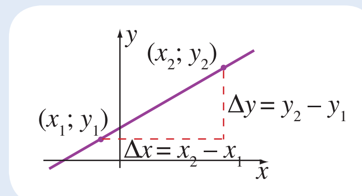
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite dont l'intersection avec l'axe vertical est $(0; b)$ et dont le coefficient a est appelé **pente** de la droite. Lorsque la règle de correspondance d'une fonction affine n'est pas connue, on peut trouver la pente de la droite à partir de deux des points de celle-ci.

Pente d'une droite

Soit $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ deux points d'une droite, tels que $x_1 \neq x_2$, on définit la pente de cette droite par le rapport

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Le rapport $\Delta y/\Delta x$ est appelé **taux de variation** de la fonction.



REMARQUE

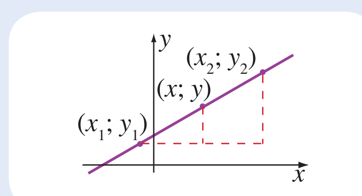
Une fonction affine de pente positive est **croissante** et celle de pente négative est **décroissante**.

Équation d'une droite

Deux points sont connus

Soit $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ deux points d'une droite, tels que $x_1 \neq x_2$. Pour qu'un point quelconque de coordonnées $(x; y)$ soit sur la même droite que $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$, il faut que la pente calculée entre ces points pris deux à deux soit constante. Traduite algébriquement, cette condition donne

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



REMARQUE

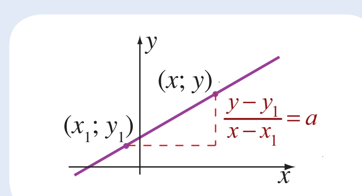
Lorsque la constante b est nulle, on a une variation directement proportionnelle. Lorsque $a = 0$, on a une fonction constante $y = b$.

Un point et la pente sont connus

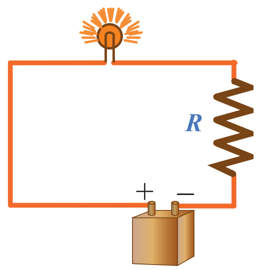
Soit $(x_1; y_1)$ et a la pente d'une droite. Pour qu'un point quelconque de coordonnées $(x; y)$ soit sur cette droite, il faut que la pente calculée entre les points $(x; y)$ et $(x_1; y_1)$ soit égale à a. Traduite algébriquement, cette condition donne

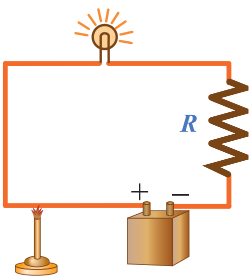
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a.$$

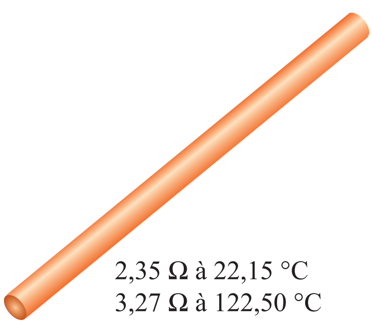
Ce qui donne $\quad y - y_1 = a(x - x_1).$

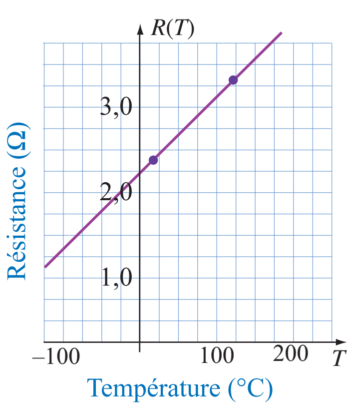


Dans un modèle affine, y n'est habituellement pas proportionnel à x, mais Δy est proportionnel à Δx et la constante de proportionnalité est la pente.






2,35 Ω à 22,15 °C
3,27 Ω à 122,50 °C



Il est à noter que le taux de variation constant est une caractéristique du modèle affine. Dès que l'on sait, dans une situation donnée, que le taux de variation est constant, on sait que le phénomène est modélisable par une fonction affine. Il ne faut cependant pas oublier qu'un modèle donne seulement une description locale d'un phénomène.

Résistance et température

Lorsqu'on augmente la température d'un conducteur, on augmente l'activité des molécules, ce qui gène le passage des charges. La conséquence de cette activité accrue est une augmentation de la résistance. La relation entre la température et la résistance est descriptible par un modèle affine dans la gamme des températures où on utilise normalement les conducteurs.

EXEMPLE 5.1.2

La résistance d'un fil de cuivre est de 2,35 Ω à 22,15 °C et de 3,27 Ω à 122,50 °C.

a) Décrire la relation entre la température et la résistance à l'aide d'un modèle affine.
b) Représenter grahiquement cette fonction.
c) Déterminer la résistance du fil à 50 °C.
d) Déterminer à quelle température la résistance est de 2,85 Ω.

Solution

a) Les variables sont T, la température, et R, la résistance. La relation entre ces variables est affine et la variable indépendante est la température. On doit donc déterminer l'équation d'une droite dont on connaît deux points, soit (22,15; 2,35) et (122,50; 3,27). On calcule d'abord la pente,

$$a = \frac{3{,}27 - 2{,}35}{122{,}50 - 22{,}15} = \frac{0{,}92}{100{,}35} = 0{,}009\ 167\ 912.$$

Pour établir le modèle, on arrondit normalement un chiffre significatif de plus que la mesure qui en a le moins. On retient donc comme pente a = 0,009 1681. Les points de la droite doivent satisfaire l'équation

$$R - R_1 = a(T - T_1).$$

En substituant dans cette expression la valeur de la pente et les coordonnées de l'un des points, on obtient :

$$R - 2{,}35 = 0{,}009\,168(T - 22{,}15),$$

d'où $$R = 0{,}009\,168\,T + 2{,}146\,9288.$$

On tetient 2,147, le modèle est donc

$$R(T) = 0{,}009\,168\,T + 2{,}147.$$

b) Pour représenter graphiquement une droite, il suffit de deux points. On reporte ceux-ci dans un système d'axes et on trace la droite, on obtient la représentation ci-contre.

c) Pour déterminer la résistance à une température de 50 °C, on calcule l'image de 50 par le modèle, on obtient

$$R(50) = 0{,}009\,168 \times 50 + 2{,}147 = 2{,}605\,4.$$

On ne peut garantir une précision plus grande que dans les mesures ayant servi à établir ce résultat. Comme la suite d'opératin comprend des produits et des quotients, le résultat doit être arrondi au nombre de chiffres significatifs de la mesure qui en comporte le moins. Par conséquent, la résistance à 50 °C est arrondie à 2,61 Ω.

d) Pour déterminer à quelle température la résistance est de 2,85 Ω, on calcule la préimage de 2,85 par le modèle, on cherche donc T tel que

$$0{,}009\,168\,T + 2{,}147 = 2{,}85$$

d'où

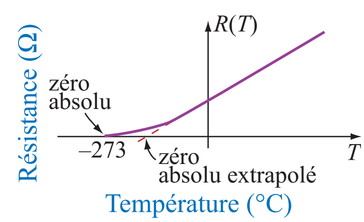
$$0{,}009\,168\,T = 2{,}85 - 2{,}147$$

et

$$T = \frac{2{,}85 - 2{,}147}{0{,}009\ 168} = 76{,}679\ 755\ \ldots$$

Pour les raisons déjà énoncées, on doit arrondir ce résultat à trois chiffres significatifs et on obtient 76,7 °C.

Lorsque les températures deviennent très basses, la droite décrivant la relation entre la température et la résistance s'incurve et l'intersection avec l'axe des températures (axe horizontal) se fait au zéro absolu, soit –273° (température où la résistance est nulle). En prolongeant la droite décrivant la relation dans la gamme des températures normales, cette droite coupe l'axe des températures en un point appelé **zéro absolu extrapolé**.



Il est à noter que

- Deux matériaux différents ont des zéros absolus extrapolés différents.
- Le zéro absolu extrapolé peut être utilisé pour trouver la règle de correspondance entre la température et la résistance. En effet, il représente un point de la droite décrivant la correspondance entre les variables.

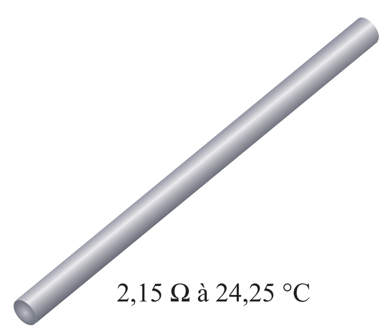
Les zéros absolus extrapolés de quelques matériaux sont consignés dans le tableau ci-contre.

Table des zéros absolus extrapolés

Matériau	Température °C
Argent	–243
Cuivre	–234,5
Or	–274
Aluminium	–236
Tungstène	–204
Nickel	–147
Fer	–162

EXEMPLE 5.1.3

La résistance d'un fil d'aluminium est de 2,15 Ω à 24,25 °C. Décrire la relation entre la température et la résistance à l'aide d'un modèle affine.



■ ***Solution***

Les variables sont T, la température, et R, la résistance. La relation entre ces variables est affine et la variable indépendante est la température. On doit donc déterminer l'équation d'une droite dont on connaît deux points, soit (24,25; 2,15) et (–236; 0). On calcule d'abord la pente,

$$a = \frac{2{,}15 - 0}{24{,}25 - (-236)} = \frac{2{,}15}{260{,}25} = 0{,}008\ 261\ 287.$$

On connaît la pente et les points de la droite doivent satisfaire

$$R - R_1 = a(T - T_1).$$

En substituant dans cette expression la valeur de la pente et les coordonnées de l'un des points, on obtient :

$$R - 0 = 0{,}008\,261\,287(T - (-236)),$$

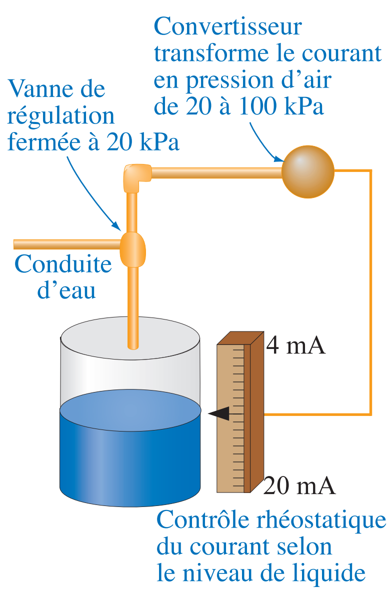
d'où $$R = 0{,}008\,261\,287\,T + 1{,}949\,663\,732.$$

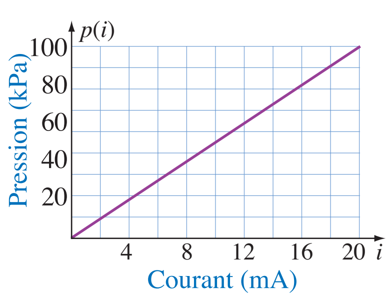
Le modèle est donc

$$R(T) = 0{,}008\,261\,T + 1{,}950.$$

Conversion dans un système de contrôle

Le contrôle automatique d'un système nécessite l'utilisation de capteurs qui font la collecte de l'information, et de convertisseurs, qui transforment cette information pour entraîner une réponse appropriée des mécanismes de régulation. L'information recueillie doit souvent être transformée par un convertisseur pour correspondre aux exigences des mécanismes de rétroaction. Nous allons considérer ici les convertisseurs dont la réponse est proportionnelle à l'excitation et qui ont donc un comportement affine qui se traduit par un changement d'échelle et d'unités de mesure.





EXEMPLE 5.1.4

Un convertisseur transforme un courant dont l'intervalle de variation est de 4 à 20 mA (milliampères) en une pression d'air comprimé dont l'intervalle de variation est de 20 à 100 kPa (kilopascals).

a) Déterminer un modèle mathématique décrivant cette situation.

b) Calculer la pression engendrée par le convertisseur lorsque le courant est de 11,5 mA.

c) Calculer la pression engendrée par un courant de 0,006 A.

d) Calculer le courant qui engendre une pression de 52 kPa.

Solution

a) La pression p en kPa dépend du courant i. Le lien entre les variables est donné par l'équation de la droite passant par les points (4; 20) et (20; 100). Ce qui donne

$$\frac{p_2 - p_1}{i_2 - i_1} = \frac{100 - 20}{20 - 4} = 5 \text{ kPa/mA}.$$

La variation de pression est donc de 5 kilopascals par milliampère. On peut donc trouver l'équation de la droite en posant

$$p - 20 = 5(i - 4)$$

d'où $$p(i) = 5i \text{ kPa}.$$

b) Il faut calculer l'image de 11,5 par la fonction, ce qui donne

$$p(11{,}5) = 57{,}5,$$

soit une pression de 57,5 kPa.

c) Un courant de 0,006 A est un courant de 6 mA, il faut donc calculer $p(6)$, ce qui donne

$$p(6) = 30 \text{ kPa}.$$

d) Il faut calculer la préimage de 52 par la fonction. On cherche donc la valeur de i pour laquelle

$$p(i) = 5i = 52.$$

En isolant i, on obtient $i = 10{,}4$, soit 10,4 mA.

On peut également calculer l'image par la fonction inverse. Cette dernière est obtenue en isolant i dans la règle de correspondance de la fonction, ce qui donne

$$p = 5i \text{ d'où } i = 0{,}2p \text{ mA}$$

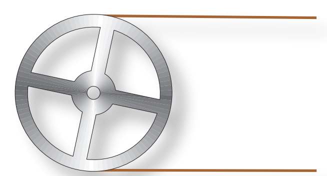
L'image de 52 par la fonction inverse donne

$$i(52) = 0{,}2 \times 52 = 10{,}4$$

On obtient un courant de 10,4 mA.

EXEMPLE 5.1.5

Un tachymètre mesure la vitesse de rotation de la roue d'entraînement d'une courroie. L'échelle du tachymètre est graduée de 0 à 200 t/min (tours par minute) et le diamètre de la roue est de 0,2 m.



a) Déterminer la vitesse de la courroie en fonction du nombre de tours par minute.

b) On vous demande de concevoir un système qui allumera un témoin lumineux si la vitesse de la courroie est inférieure à 50 m/min ou supérieure à 100 m/min. Calculer le nombre de tours par minute correspondant à ces vitesses de la courroie.

Solution

a) La vitesse v de la courroie est le produit de la longueur de la circonférence par t, le nombre de tours par minute. La longueur de la circonférence est donnée par $C = 2\pi r$ où $r = 0{,}1$ m. On a donc

$$C = 2\pi \times 0{,}1 = 0{,}2\pi \text{ m/min.}$$

La règle de correspondance est donc

$$v(t) = 0{,}2\pi t \text{ m/min.}$$

b) Pour déterminer le nombre de révolutions correspondant à ces vitesses, il faut calculer l'image par la fonction inverse. La règle de correspondance de la fonction inverse est obtenue en isolant t dans la règle de correspondance, ce qui donne

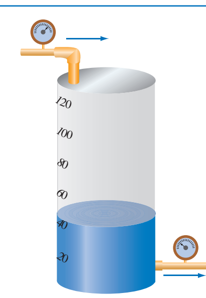
$$t = \frac{v}{0{,}2\pi} = \frac{5}{\pi}v.$$

La règle de correspondance est

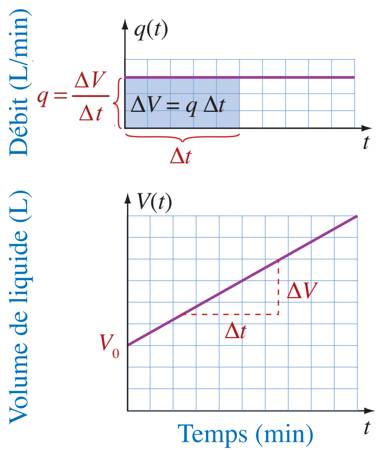
$$t(v) = \frac{5}{\pi}v \text{ t/min.}$$

On trouve donc $t(50) = 80$ t/min et $t(100) = 159$ t/min.

Débit et volume



Le modèle affine est caractérisé par sa pente qui est le rapport des variations. Ce rapport étant constant, on peut évaluer la variation d'une variable en connaissant la variation de l'autre. Ainsi, si le débit dans un réservoir est constant, on peut évaluer la variation du volume de liquide en fonction du temps. Si le volume initial est connu, on peut alors décrire le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.



Considérons, par exemple, un réservoir muni d'une conduite d'alimentation de débit Q connu. Puisque le débit est le rapport de la variation de volume par unité de temps, soit

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t},$$

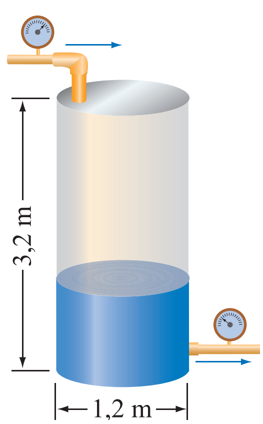
on peut évaluer la variation du volume de liquide dans le réservoir durant un intervalle de temps $\Delta t = t$. Cette variation est donnée par

$$\Delta V = Q\,t.$$

De plus, si le volume initial (ou volume avant l'ouverture le la valve) est connu, on peut déterminer le modèle mathémaique décrivant le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps à partir de l'ouverture de la valve. Ainsi, si au temps 0, le volume de liquide dans le réservoir est représenté par V_0, le volume au temps t est décrit par

$$V = \Delta V + V_0 = Q\,t + V_0.$$

Cette expression permet de voir que le volume au temps t est décrit par un modèle affine dont la variable indépenante est l'intervalle de temps écoulé depuis l'ouverture de la valve.



EXEMPLE 5.1.6

On a vidangé le réservoir illustré ci-contre et pour le remplir à nouveau, l'opérateur ouvre la valve de la conduite principale. L'indicateur de débit donne une lecture de 15 L/min. Après 1 h 40 min, l'opérateur referme la valve.

a) Calculer le volume de liquide dans le réservoir 60 minutes après l'ouverture de la valve.

b) Construire un modèle décrivant le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.

c) Représenter graphiquement ce modèle.

d) Le réservoir est-il plein après 1 h 40 min ?

■ *Solution*

a) Le volume de liquide après 60 minutes est le produit du débit par l'intervalle de temps écoulé, soit

$$\Delta t = 60 - 0 = 60 \text{ min}$$

On a donc

$$V(60) = 15 \text{ L/min} \times 60 \text{ min} = 900 \text{ L}.$$

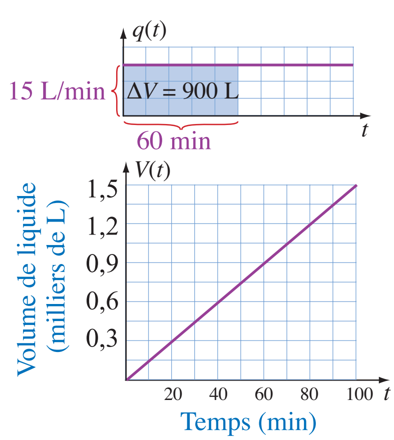
b) Le volume de liquide au temps t est donné par le produit du débit par l'intervalle de temps écoulé depuis l'ouverture de la valve. L'intervalle de temps est

$$\Delta t = t - 0 = t \text{ min}.$$

On a donc

$$V(t) = Q \text{ L/min} \times t \text{ min} = 15\,t \text{ litres}.$$

c) Le graphique du volume en fonction du temps est une droite passant à l'origine puisque le volume de liquide dans le réservoir est initialement nul.



d) Le volume du réservoir est

$$V = \pi \times (0{,}6\ \text{m})^2 \times 3{,}2\ \text{m} = 3{,}6\ \text{m}^3.$$

Puisque 1 m^3 correspond à 1 000 litres ou 1 kL, le réservoir peut contenir 3,6 kL. Le volume de liquide est

$$V(100) = 15\ \text{L/min} \times 100\ \text{min} = 1\,500\ \text{L}.$$

Le réservoir contient 1,5 kL alors qu'il peut contenir 3,6 kL. Il n'est donc pas plein.

PROCÉDURE

Modélisation affine, taux de variation constant

1. Identifier les grandeurs physiques du problème et la grandeur représentée par le taux de variation (débit, courant, vitesse, accélération).
2. Utiliser le taux de variation pour écrire la relation entre les grandeurs physiques (lien de proportionnalité).
3. Etablir la relation entre les variations.
4. Établir l'expression décrivant la variable dépendante en tenant compte des conditions initiales.
5. Utiliser le modèle pour résoudre le problème.

Courant et charge électrique

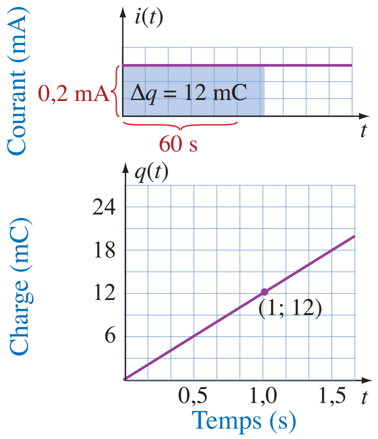
Le courant est le taux de variation de la charge par rapport au temps. Si ce taux de varation est constant, la charge déplacée est descriptible par un modèle affine.

EXEMPLE 5.1.7

Un courant constant de 0,2 mA circule dans un circuit.

a) Calculer la charge déplacée dans ce circuit durant une minute.

b) Exprimer la charge déplacée en fonction du temps en minutes, la charge initiale étant nulle.



■ ***Solution***

a) Le courant est le taux variation de la charge par rapport au temps t. On a donc

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

d'où $\Delta q = i\,\Delta t.$

Durant un intervalle d'une minute, on a $\Delta t = 60$ s et

$$\Delta q = 0{,}2\ \text{mA} \times 60\ \text{s} = 0{,}012\ \text{C}.$$

La charge déplacée durant un intervalle d'une minute est donc de 0,012 C ou 12 mC.

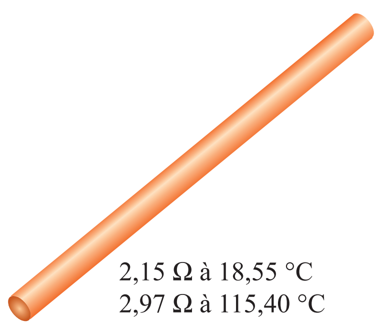
b) La charge déplacée est

$$q(t) = 12\,t\ \text{mC, où } t \text{ est en minutes.}$$

5.2 Exercices

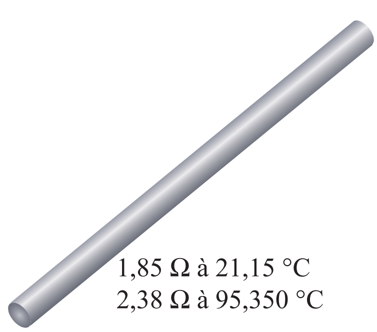
1. Un technicien en réparation d'appareils de chauffage affiche un taux de 45 $ par demi-heure de travail. Cependant, il facture un supplément de 40 $ pour le temps de déplacement.
   a) Déterminer le modèle mathématique décrivant le coût de la main-d'oeuvre pour les réparation d'appareils de chauffage effectuées par ce technicien.
   b) Déterminer le coût de la main-d'oeuvre pour une réparation qui a nécessité une demi-heure de travail et pour une réparation ayant nécessité 2 heures de travail.

2. La résistance d'un fil de cuivre est de 2,15 Ω à 18,55 °C et de 2,97 Ω à 115,40 °C.



   a) Décrire la relation entre la température et la résistance à l'aide d'un modèle affine.
   b) Déterminer la résistance du fil à 75 °C.
   c) Déterminer à quelle température la résistance est de 1,55 Ω.

3. La résistance d'un fil d'aluminium est de 1,85 Ω à 21,15 °C et de 2,38 Ω à 95,35 °C.



   a) Décrire la relation entre la température et la résistance à l'aide d'un modèle affine.
   b) Déterminer la résistance du fil à 85 °C.
   c) Déterminer à quelle température la résistance est de 3,15 Ω.

4. La résistance d'un fil de cuivre est de 18,5 Ω à 35,5 °C.
   a) Exprimer la résistance de ce fil en fonction de la température.
   b) Déterminer la résistance du fil à 105 °C.
   c) Déterminer à quelle température la résistance est de 13,5 Ω.

5. La résistance d'un fil d'aluminium est de 12,5 Ω à 48,5 °C.
   a) Exprimer la résistance la résistance de ce fil en fonction de la température.
   b) Déterminer la résistance du fil à 125 °C.
   c) Déterminer à quelle température la résistance est de 18,5 Ω.

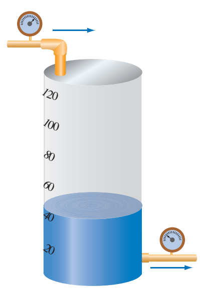
6. La résistance d'un filament de tungstène est de 25,5 Ω à 25,4 °C.
   a) Exprimer la résistance de ce filament en fonction de la température.
   b) Déterminer la résistance du fil à 87,5 °C.
   c) Déterminer à quelle température la résistance est de 16,5 Ω.

7. Un convertisseur transforme un courant dont l'intervalle de variation est de 4 à 36 mA en une pression d'air comprimé dont l'intervalle de variation est de 40 à 160 kPa.
   a) Déterminer un modèle mathématique décrivant cette situation.
   b) Calculer la pression engendrée par le convertisseur lorsque le courant est de 22,5 mA.
   c) Calculer la pression engendrée par un courant de 0,034 A.
   d) Calculer le courant qui engendre une pression de 125 kPa.

8. Un tachymètre mesure la vitesse de rotation de la roue d'entraînement d'une courroie. L'échelle du tachymètre est graduée de 0 à 600 t/min (tours par minute) et le diamètre de la roue est de 0,5 m.
a) Déterminer la vitesse de la courroie en fonction du nombre de tours par minute.

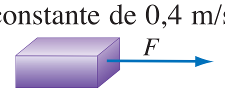
b) On vous demande de concevoir un système qui allumera un témoin lumineux si la vitesse de la courroie est inférieure à 75 m/min ou supérieure à 450 m/min. Calculer le nombre de tours par minute correspondant à ces vitesses de la courroie.

9. Un réservoir dont la capacité est de 120 L contient 40 L de liquide et l'opérateur ouvre la valve de la conduite. L'indicateur de débit donne une lecture de 4 L/min. Après 10 min, l'opérateur diminue le débit à 2 L/min et 15 minutes plus tard, il ferme la valve.



a) À l'aide d'une fonction par parties, décrire le débit de liquide en fonction du temps. Représenter graphiquement ce modèle.
b) À l'aide d'une fonction par parties, décrire le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps.
c) Utiliser cemodèle pour calculer le volume de liquide dans le réservoir lorsque l'opérateur ferme la valve.
d) Combien de temps l'opérateur aurait dû attendre pour emplir le réservoir.

10. Un mobile est à une distance de 2 m d'un point de référence fixe et s'en éloigne en ligne droite à une vitesse constante de 0,4 m/s.



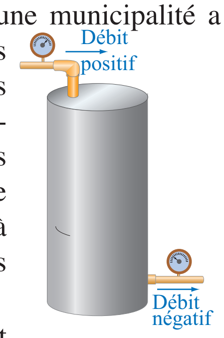
a) Déterminer la distance parcourue par le mobile en trois secondes.
b) Déterminer et représenter graphiquement la fonction décrivant la position du mobile par rapport au point de référence au temps t.

11. Un mobile, initialement au repos, a une accélération constante de 0,2 m/s^2.
a) Déterminer la variation de vitesse du mobile en trois secondes.
b) Représenter graphiquement la fonction décrivant la vitesse au temps t.

12. On lance un projectile perpendiculairement au sol avec une vitesse initiale de 49 m/s.
a) Calculer sa vitesse après trois secondes
b) Déterminer la fonction décrivant la vitesse au temps t.

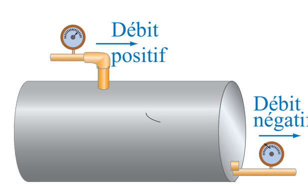
13. En fermant un circuit, on a un courant constant de 0,4 mA .
a) Calculer est la charge déplacée dans ce circuit durant deux minutes.
b) Exprimer la charge déplacée en fonction du temps en minutes, la charge initiale étant nulle.

14. Pour répondre à la demande en période de forte consommation d'eau potable, une municipalité a fait installer un réservoir près de l'usine de traitement des eaux. Ce réservoir devrait permettre d'accumuler des réserves durant les périodes de moindre consommation et de répondre à la demande durant les périodes de forte consommation.



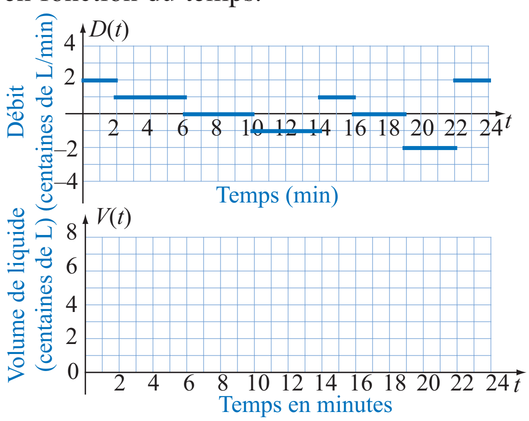
a) Le réservoir étant initialement vide (il vient d'être installé), on ouvre une vanne qui a un débit de 150 litres à la minute. Représenter graphiquement la fonction débit.
b) Représenter graphiquement et évaluer le volume de liquide dans le réservoir au bout de 4 min.
c) Représenter graphiquement et évaluer le volume de liquide dans le réservoir en fonction du temps t.
d) Représenter graphiquement la fonction décrivant le volume de liquide au temps t.

3. Considérons un réservoir servant à entreposer un liquide et doté d'une voie d'écoulement et de remplissage.



Le débit est décrit par une fonction $D(t)$ qui est positive lorsque le liquide se déplace en direction du réservoir, qui est négative dans le cas contraire et nulle lorsque le liquide ne se déplace pas.

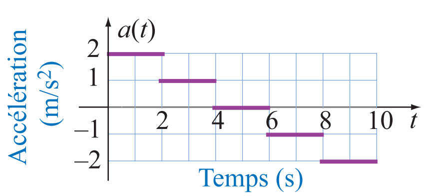
a) Sachant que le réservoir est initialement vide et que la fonction débit pendant les 24 premières minutes est décrite par le graphique suivant, représenter graphiquement le volume de liquide en fonction du temps.



b) Quel est le volume de liquide dans le réservoir après 5 minutes ? 12 minutes ? 24 minutes ?

c) Quel est le débit moyen durant l'intervalle [0; 6]? durant l'intervalle [0; 12]? durant l'intervalle [0; 24]?

16. Le graphique suivant représente une estimation de l'accélération en m/s^2 d'un mobile au temps t.



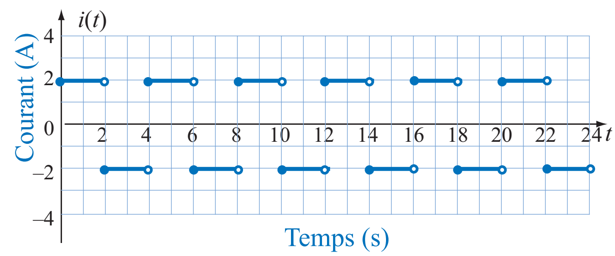
a) Sachant que la vitesse initiale était nulle, évaluer la vitesse du mobile à trois secondes.

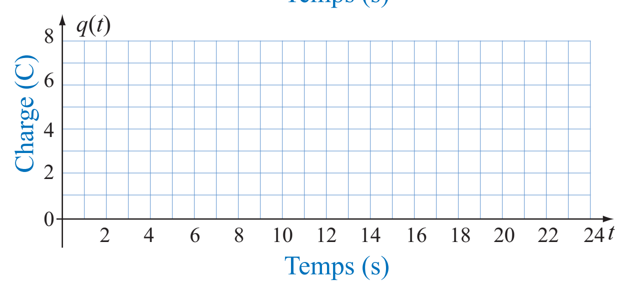
b) Esquisser le graphique de la vitesse en fonction du temps t.

c) Décrire algébriquement la vitesse en fonction du temps t.

d) Quelle est l'accélération moyenne durant l'intervalle [0; 4]? durant l'intervalle [2; 6]?

17. Un circuit comporte un condensateur qui accumule la charge en déplacement dans le circuit lorsque le courant est positif et qui se décharge quand le courant est négatif, c'est-à-dire, quand le courant change de sens. Le courant dans le circuit étant décrit par l'onde suivante, représenter graphiquement la charge du condensateur au temps t.





18. Un réservoir vide de 2 200 litres peut être alimenté par deux conduites. L'une de ces conduites a un débit de 40 L/min et la seconde, de 20 L/min. La valve de la première conduite est ouverte dix minutes avant celle de la deuxième conduite.

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant le débit total au temps t pendant la période de remplissage.

b) Donner le domaine de validité du modèle.

c) Définir la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir au temps t pendant la période de remplissage.

d) Représenter graphiquement la fonction volume et donner son domaine de validité.

e) Décrire la relation entre la fonction débit et la fonction volume.

f) Calculer le volume de liquide dans le réservoir après 5 minutes et après quinze minutes.

19. Un mobile ayant une vitesse nulle est soumis à une accélération uniforme de 0,5 m/s^2 pendant quarante secondes, après quoi son accélération est nulle.

a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération au temps t pendant les soixante premières secondes.

b) Déterminer la fonction décrivant la vitesse au temps t pendant les soixante premières secondes.

c) Représenter graphiquement cette fonction.

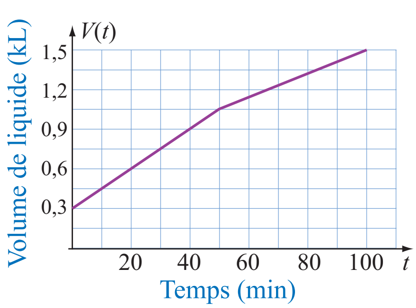
d) Quelle est la relation entre les graphiques de la fonction accélération et de la fonction vitesse ?

e) Quelle est la vitesse atteinte après 5 secondes ? Après 18 secondes ?

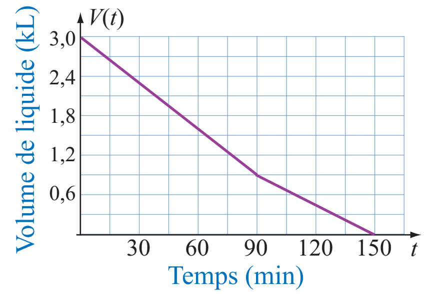
20. Un mobile ayant une vitesse de 2 m/s est soumis à une accélération uniforme de 0,5 m/s^2 pendant quarante secondes, après quoi son accélération est nulle.
   a) Représenter graphiquement la fonction décrivant l'accélération au temps t pendant les soixante premières secondes.
   b) Déterminer la fonction décrivant la vitesse au temps t pendant les soixante premières secondes.
   c) Représenter graphiquement cette fonction.
   d) Quelle est la relation entre les graphiques de la fonction accélération et de la fonction vitesse?
   e) Quelle est la vitesse atteinte après 5 secondes? après 18 secondes?

21. Une conduite sert à acheminer un liquide dans un réservoir vide pouvant contenir 375 m^3. Le débit dans cette conduite est de 15 m^3/min.
   a) Représenter graphiquement la fonction décrivant le débit au temps t pendant la période de remplissage.
   b) Quel est le domaine de validité du modèle ?
   c) Définir la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir au temps t pendant la période de remplissage.
   d) Représenter graphiquement la fonction volume et donner son domaine de validité.
   e) Quelle relation peut-on établir entre la fonction débit et la fonction volume ?

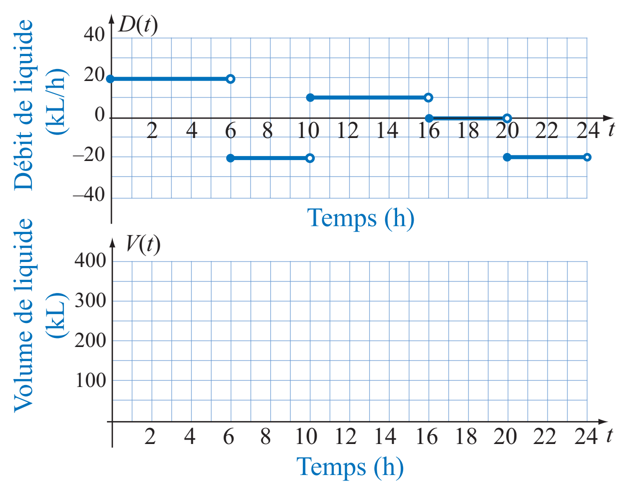
22. Un dispositif donne en temps réel le graphique du contenu d'un réservoir durant une période de remplissage. Exprimer algébriquement la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir au temps t.



23. Un dispositif donne en temps réel le graphique du volume de liquide dans un réservoir durant une période de vidange. Exprimer algébriquement la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir au temps t.



24. Le graphique suivant décrit le débit de la conduite d'alimentation d'un réservoir durant une journée.



   a) Décrire algébriquement le débit en fonction du temps durant cette journée.
   b) Sachant qu'au début de la journée le volume de liquide dans le réservoir était de 250 kL, représenter graphiquement et exprimer algébriquement la fonction décrivant le volume de liquide dans le réservoir au temps t durant la journée.

5.3 Modèles rationnels

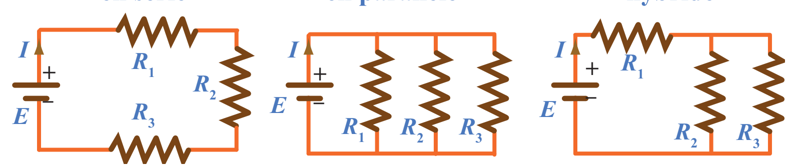
Dans la présente section, nous allons aborder la modélisation à l'aide de fonctions rationnelles. Ces modélisations seront basées sur les lois de la tension et du courant de Kirchhoff. Comme aide-mémoire, nous rappelons brièvement ces lois et quelques définitions avant de les utiliser.

Notions de circuits électriques

Circuit électrique

Un **circuit électrique** est un ensemble d'éléments (sources de tension, sources de courant, résistances, etc.) reliés entre eux par des conducteurs (fils).

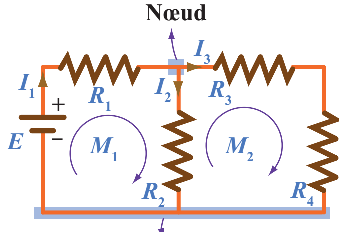
On distingue deux façons de relier des résistances à une source de tension. Elles peuvent être montés en série, c'est-à-dire l'une à la suite de l'autre, ou en parallèles, reliées en un point appelé **nœud.**



La plupart des circuits sont hybrides et comportent des résistances en série et des résistances en parallèle, comme dans la troisième illustration.

Branche d'un circuit

Une **branche** d'un circuit est une partie d'un circuit constituée d'un ou de plusieurs éléments montés en série



Le circuit illustré ci-contre comporte trois branches. La première branche contient la source de tension et la résistance R_1. La deuxième branche ne comporte que la résistance R_2 et la troisième branche est formée des résistances R_3 et R_4.

Ces trois branches sont reliées de façon à former deux **mailles**. Les conducteurs ou les points de jonctions auxquelles sont reliées les branches s'appellent de **nœuds**.

Maille

Une **maille** d'un circuit est un trajet fermé et conducteur.

Nœud

Un **nœud** d'un circuit est un point ou un conducteur auquel sont reliées différentes branches du circuit.

Lois des circuits

La résistance d'un circuit série est la somme des résistances du circuit. Ainsi, dans le circuit illustré ci-contre, on a

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3.$$

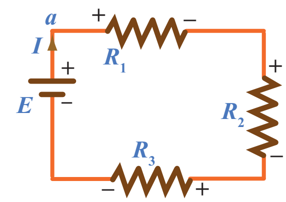
Dans un circuit série, le courant est le même partout. Par conséquent, en multipliant les deux membres de l'équation précédente par I, on a

$$R_T\,I = R_1\,I + R_2\,I + R_3\,I.$$

La loi d'Ohm permet alors d'écrire

$$E = V_1 + V_2 + V_3.$$

On peut alors dire que: dans un circuit série comportant une seule source de tension, la somme des chutes de tension entre les bornes des résistances est égale à la tension appliquée. Gustav Kirchhoff a découvert que cette propriété s'appliquait à toutes les mailles d'un circuit.



REMARQUE
L'expression « somme algébrique » signifie qu'il faut distinguer les augmentations de potentiel et les chutes de potentiel. Conventionnellement, les augmentations de potentiel sont positives et les chutes de potentiel sont négatives. Ainsi, dans le circuit ci-dessus et en partant du point a, le courant subit une première chute de potentiel (de + à –) aux bornes de R_1, une deuxième aux bornes de R_2 et une troisième aux bornes de R_3. En traversant la source de tension, il y a augmentation du potentiel (de – à +).

LOI DES CIRCUITS

Loi des tensions de Kirchhoff

Dans toute maille d'un circuit, ou dans tout circuit fermé, la somme algébrique des tensions appliquées est égale à la somme algébrique des chutes de tension.

De façon équivalente, on dit que la somme algébrique des différences de potentiel le long d'un circuit fermé (maille) est nulle

En considérant la seconde façon d'énoncer la loi des tensions, l'équation s'écrit

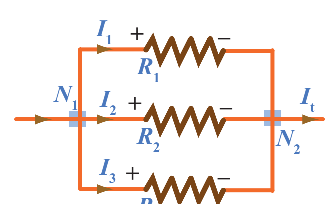
$$-V_1 - V_2 - V_3 + E = 0.$$

Algébriquement, c'est la même équation que

$$E = V_1 + V_2 + V_3.$$

Loi des courants

La deuxième loi de Kirchhoff porte sur les courants et stipule que lorsque plusieurs composantes sont en parallèle, le courant se subdivise en entrant dans le nœud auquel ces composantes sont reliées. Par la suite, le courant se recombine au nœud de sortie et le courant qui quitte cette partie du circuit est identique au courant d'entrée.

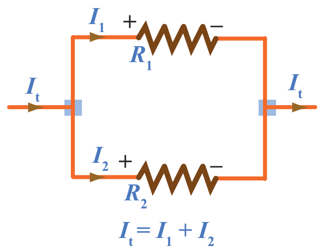


$I_t = I_1 + I_2 + I_3$

LOI DES CIRCUITS

Loi des courants

La somme algébrique des courants qui entrent dans un nœud est égale à la somme algébrique des courants qui en sortent.



Résistances en parallèles

En appliquant la loi des courants, on peut calculer la valeur d'une résistance équivalente à deux résistances en parallèles. En effet, si deux résistances sont montées en parallèle, comme dans l'illustration ci-contre, on a

$$I_t = I_1 + I_2.$$

Puisque la tension est la même aux bornes des composantes en parallèle, la loi d'Ohm, $V = RI$, permet d'écrire

$$\frac{V}{R_t} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2},$$

d'où

$$\frac{V}{R_t} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

et, en simplifiant,

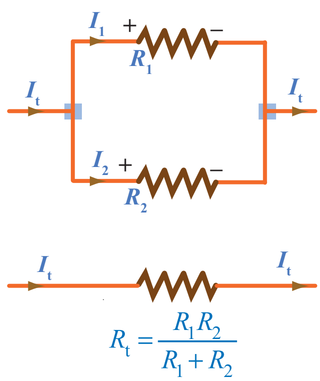
$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{R_t} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \text{ et } R_t = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

La résistance résultante est donc le produit des résistances en parallèle divisé par la somme des résistances en parallèle. Il est donc possible de remplacer deux résistances en parallèle par une seule résistance dont la valeur ohmique est donnée par cette expression.

CIRCUITS ÉQUIVALENTS



Un peu d'histoire

CUSTAV ROBERT KIRCHHOFF

1824-1887

Le physicien allemand Gustav Robert Kirchhoff est né à Königsherg où il étudia les mathématiques avec Cari Jacobi (1804-1851) et la physique avec Franz Neumann (1798-1895). Il poursuivit ses études à l'université de Berlin et y obtint un doctorat en 1848. Il obtint son premier poste de professeur cette même année à l'université de Breslau. Lors de cette affectation, il s'est lié d'amitié avec Robert Wilheim Bunsen (1811-1899). Tous les deux quittèrent Breslau quatre ans plus tard pour Heidelberg. En 1865, Kirchhoff fut élu vice-recteur de l'université.

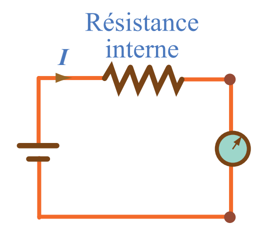
C'est dans un premier ouvrage, paru en 1845, que Kirchhoff établit les deux lois qui portent son nom. Ces lois permettent de résoudre simplement les problèmes de circuits et d'élaborer les appareils de mesure de la tension et du courant, le voltmètre et l'ampèremètre.

Après avoir fait la connaissance de Bunsen, Kirchhoff s'est intéressé à l'étude du rayonnement thermique et, en étudiant les gaz incandescents, il a découvert les principes de l'analyse spectrale. Il a développé le spectroscope qui permet d'étaler la lumière émise par un corps incandescent. Cet appareil a permis aux deux savants de montrer que les raies spectrales sont caractéristiques des éléments chimiques qui les émettent, ce qui constitue le fondement de l'analyse spectrale. En utilisant cet appareil, ils ont découvert deux nouveaux éléments en 1861, le césium et le rubidium. Ces travaux sont à l'origine de recherches qui ont mené à la découverte de plusieurs autres éléments. En étudiant le spectre solaire, Kirchhoff a montré que le Soleil contient la plupart des métaux existant sur la Terre. Les travaux qu'il a réalisés avec Bunsen ont permis le développement de l'analyse spectrale et son utilisation en astrophysique.

En 1875, Kirchhoff s'est installé à Berlin pour occuper une chaire à l'université. C'est à Berlin qu'il est décédé en octobre 1887.

Résistance interne

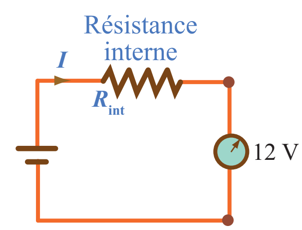
Lorsque le courant traversant une source augmente, la tension aux bornes de celle-ci diminue. Dans certaines situations, cette augmentation est négligeable mais, dans les circuits électroniques, il faut en tenir compte. Pour représenter cet effet de façon commode, on considère que la source réelle de tension est constituée d'une source idéale, qui génère une différence de potentiel constante quel que soit le courant, et d'une résistance branchée en série avec cette source **idéale**. Cette résistance est appelée **résistance interne** de la source. Elle permet de décrire la diminution de tension aux bornes de la source à mesure que le courant augmente et permet de calculer la perte d'énergie convertie en chaleur dans le générateur réel. On a ici un bel exemple de modélisation, car la résistance interne n'existe pas physiquement en-dehors de la source; c'est un concept qui permet de décrire et d'analyser un phénomène.

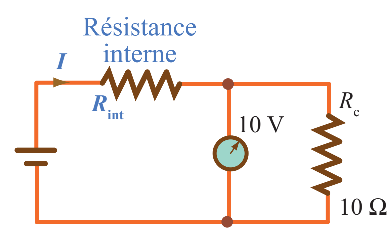


Dans les exemples qui suivent, nous verrons comment se fait la description mathématique du phénomène.

EXEMPLE 5.3.1

Un voltmètre qui requiert un courant négligeable est branché aux bornes d'une batterie et indique une tension de 12 V. On branche une résistance de 10 Ω entre les bornes de la batterie et le voltmètre indique alors une tension de 10 V. Calculer la résistance interne de la batterie.





Solution

Représentons par R_{int}, la résistance interne et par R_c la résistance externe ou résistance de charge. De même, on représentera par V_{int}, la chute de tension entre les bornes de la résistance interne et par V_c la chute de tension entre les bornes de la résistance de charge et par I, le courant dans le circuit. Puisque le voltmètre requiert un courant négligeable, la source **idéale** génère une tension de 12 V, on a donc $E = 12$ V.

La loi d'Ohm permet d'écrire $V_c = R_c I$, ce qui donne

$$I = \frac{V_c}{R_c} = \frac{10\text{ V}}{10\ \Omega} = 1\text{ A.}$$

Par ailleurs, la loi des tensions de Kirchhoff permet d'écrire que

$$E = V_{int} + V_c,$$

d'où $$V_{int} = E - V_c,$$

ce qui donne $$V_{int} = 12\text{ V} - 10\text{ V} = 2\text{ V.}$$

La loi d'Ohm donne $$V_{int} = R_{int} I,$$

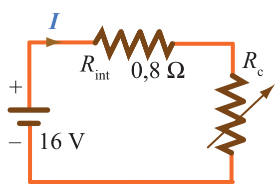
d'où $$R_{int} = \frac{V_{int}}{I} = \frac{2\text{ V}}{1\text{ A}} = 2\ \Omega.$$

La résistance interne est donc de 2 ohms.

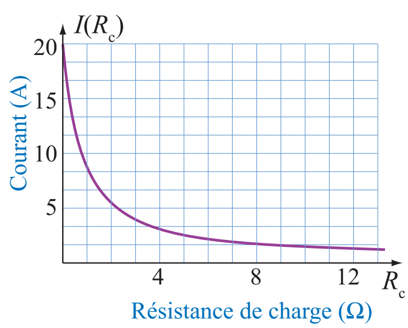
Modèles rationnels

Les fonctions rationnelles sont celles définies par le quotient de deux polynômes. Pour représenter graphiquement une fonction rationnelle, il faut surtout se rappeler que la division par zéro n'est pas définie, ni définissable. De plus, il faut être capable d'identifier rapidement les asymptotes si nécessaire.

EXEMPLE 5.3.2



Résistance R_c (Ω)	Courant I (A)
0	20,0
1	8,9
2	5,7
4	3,3
6	2,4
8	1,8
10	1,5
12	1,2



Une source de tension de 16 volts ayant une résistance interne de 0,8 Ω est reliée à un circuit comportant une charge de résistance variable R_c.

a) Décrire le courant en fonction de la résistance variable.

b) Représenter graphiquement le courant en fonction de la résistance variable.

Solution

a) Représentons par R_{int} la résistance interne et par R_c la résistance externe ou résistance de charge. De même, on représentera par V_{int} la chute de tension entre les bornes de la résistance interne, par V_c la chute de tension entre les bornes de la résistance de charge et par I, le courant dans le circuit.

Par la loi des tensions de Kirchhoff, on a

$$E = V_{int} + V_c,$$

d'où $$E = R_{int}I + R_cI,$$

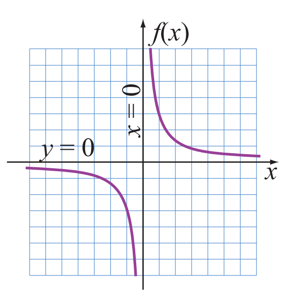
on a donc $$16 = 0{,}8I + R_cI,$$

le courant est alors décrit en fonction de la résistance de charge par

$$I = \frac{16}{R_c + 0{,}8}, \text{ où } R_c \geq 0.$$

b) En calculant quelques correspondances, comme dans le tableau ci-contre, on peut représenter graphiquement cette relation,

Mathématiquement, la fonction règle de correspondance $I = \dfrac{16}{R_c + 0{,}8}$ est une **fonction rationnelle** de la forme $f(x) = \dfrac{16}{x + 0{,}8}$.

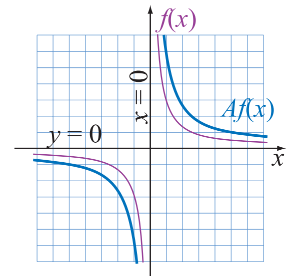


On peut se dispenser des calculs pour esquisser le graphique d'une telle fonction en ayant recours aux transformations élémentaires présentées au chapitre précédent. Rappelons l'effet de ces transformations sur la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

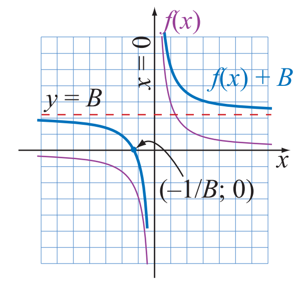
dont le graphique, reproduit ci-contre, a une asymptote horizontale à $y = 0$ et une asymptote verticale à $x = 0$.

Étirement-compression vertical



La transformation $Af(x) = \dfrac{A}{x}$ a pour effet soit d'étirer ou de comprimer le graphique selon la verticale ou encore de l'inverser par rapport à l'axe horizontal. Le graphique a toujours ses asymptotes d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

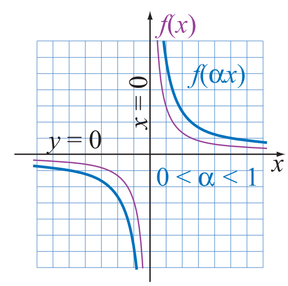
Décalage vertical



La transformation $f(x) + B = \dfrac{1}{x} + B = \dfrac{1 + Bx}{x}$ a pour effet de déplacer le graphique selon la verticale vers le haut si $B > 0$ et vers le bas si $B < 0$. L'asymptote horizontale est déplacée et son équation est $y = B$.

De plus, la fonction a maintenant un zéro à $x = -1/B$. C'est la valeur de la variable indépendante qui annule le numérateur. L'asymptote verticale demeure inchangée à $x = 0$.

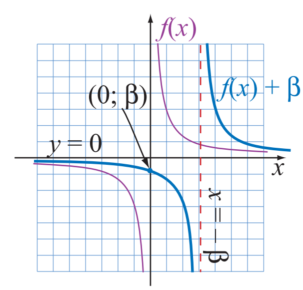
Étirement-compression horizontal



La transformation $f(\alpha x) = \dfrac{1}{\alpha x}$ a pour effet soit d'étirer ou de comprimer le graphique selon l'axe horizontal ou encore de l'inverser par rapport à l'axe vertical.

Le graphique a toujours ses asymptotes d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

Décalage horizontal



La transformation $f(x + \beta) = \dfrac{1}{x + \beta}$ a pour effet de déplacer le graphique selon l'horizontale. Vers la gauche si $\beta > 0$ et vers la droite si $\beta < 0$. L'asymptote verticale a également été déplacée et son équation est $x = -\beta$. Elle est obtenue en cherchant pour quelle valeur le dénominateur s'annule.

De plus, la fonction a maintenant une ordonnée à l'origine à $y = \beta$. C'est l'image de 0 par la fonction ($f(0) = \beta$).

Dans la pratique, les valeurs de A, B, α et β se combinent par les opérations et on peut rarement lire directement leur valeur dans la règle de correspondance. La fonction se présentera plutôt sous la forme

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

On peut cependant retrouver aisément les caractéristiques graphiques importantes de la fonction comme l'illustre l'exemple suivant.

EXEMPLE 5.3.3

Soit la fonction rationnelle définie par la règle de correspondance

$$f(x) = \frac{6x-5}{2x-3}.$$

a) Déterminer l'ordonnée à l'origine et le zéro de la fonction.
b) Déterminer l'asymptote verticale de la fonction.
c) Déterminer l'asymptote horizontale de la fonction.
d) Représenter graphiquement cette fonction.

■ ***Solution***

a) L'ordonnée à l'origine de la fonction est l'image de 0 par la fonction, ce qui donne

$$f(0) = \frac{6\times 0-5}{2\times 0-3} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}.$$

La fonction coupe donc l'axe vertical au point (0; 5/3).
Le zéro de la fonction est la valeur de la variable indépendante dont l'image est 0, on cherche donc la valeur de x pour laquelle

$$\frac{6x-5}{2x-3} = 0.$$

En multipliant les deux membres de l'équation par $2x - 3$, on obtient

$$6x - 5 = 0.$$

Et, en isolant la variable x, on obtient $x = 5/6$. La fonction coupe donc l'axe horizontal au point (5/6; 0). On remarque qu'en pratique, il est suffisant de trouver pour quelle valeur de x le numérateur s'annule.

b) On trouve l'asymptote verticale en déterminant la valeur de x qui annule le dénominateur, soit x tel que

$$2x - 3 = 0.$$

En isolant x, on obtient $x = 3/2$. L'équation de l'asymptote verticale est donc $x = 3/2$.

c) L'asymptote horizontale décrit le comportement de la fonction pour les valeurs très grandes de la variable indépendante. Par division des polynômes, on peut exprimer la fonction sous une forme qui nous permet de déterminer ce comportement. La division du numérateur par le dénominateur donne

$$\frac{6x-5}{2x-3} = 3 + \frac{4}{2x-3}.$$

Lorsque x prend des valeurs très grandes, le quotient

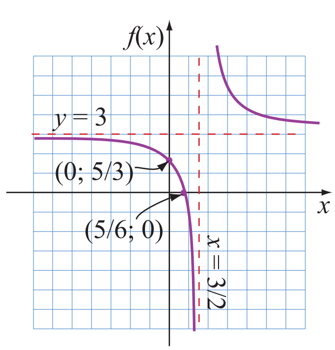
$$\frac{4}{2x-3}$$

s'approche de plus en plus de 0. Par conséquent, l'expression s'approche de plus en plus de 3 et l'asymptote horizontale est $y = 3$.

d) En représentant d'abord l'ordonnée, le zéro et les asymptotes, on peut facilement identifier le comportement graphique de la fonction, représenté ci-contre.

REMARQUE

On remarque que lors de la division polynomiale, la constante 3 est le rapport des coefficients de x, soit (6/2 = 3). On peut donc lire directement l'équation de l'asymptote horizontale, en autant que le degré du numérateur soit égal au degré du dénominateur.



PROCÉDURE

Graphique d'une fonction rationnelle simple

1. Déterminer le ou les zéros de la fonction (valeurs qui annulent seulement le numérateur).
2. Déterminer l'ordonnée à l'origine de la fonction (image de 0 par la fonction).
3. Déterminer la ou les asymptote(s) verticale(s) (valeurs qui annulent seulement le dénominateur).
4. Déterminer l'asymptote horizontale, le cas échéant.
   - Si le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur, l'équation de l'asymptote est $y = a/c$, où a et c sont les coefficients des termes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
   - Si le degré du numérateur est plus petit que celui du dénominateur, l'équation de l'asymptote est $y = 0$.
5. Représenter les caractéristiques dans un système d'axes, esquisser le graphique et interpréter selon le contexte.

REMARQUE
Nous ne rencontrerons pas, dans le présent cours, de cas où le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément.

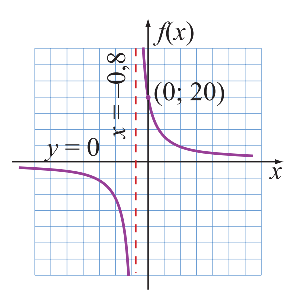
Considérons à nouveau le modèle de l'exemple 5.3.2, le lien entre les variables est décrit par

$$I(R_c) = \frac{16}{R_c + 0{,}8},\ \text{où } R_c \geq 0.$$

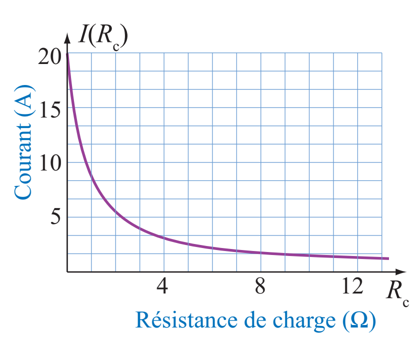
Mathématiquement, c'est une fonction de la même forme que

$$f(x) = \frac{16}{x + 0{,}8}.$$

En appliquant la procédure pour esquisser le graphique d'une fonction rationnelle, on constate que la fonction a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ car le degré de son dénominateur est plus élevé que celui de son numérateur et lorsque la variable indépendante prend des valeurs extrêmes, le quotient s'approche de 0. De plus, le dénominateur s'annule à $x = -0{,}8$ la fonction a donc une asymptote verticale d'équation $x = -0{,}8$. La fonction n'a pas de zéro puisque son numérateur ne peut s'annuler. Le graphique ne coupe donc pas l'axe horizontal. De plus, l'ordonnée à l'origine est $f(0) = 20$. En situant ces asymptotes et l'ordonnée à l'origine, il est alors très simple de détecter la forme générale du graphique. Cela est souvent suffisant pour voir comment les variables se comportent mutuellement sans avoir à faire une multitude de calculs.



II suffit alors de considérer le domaine de validité du modèle pour avoir la représentation graphique du phénomène physique considéré. Dans ce cas, la variable indépendante est la résistance, elle est plus grande ou égale à 0, on ne retiendra donc que la partie du graphique à droite de l'origine, ce qui donne le graphique ci-contre.



EXEMPLE 5.3.4

Une résistance de 2 Ω est montée en parallèle avec une résistance variable R.

a) Exprimer la résistance totale du circuit en fonction de la résistance variable.

b) Déterminer le zéro et les asymptotes de cette fonction.

c) Représenter graphiquement cette fonction.

d) Quelle est la signification de l'asymptote horizontale selon ce contexte ?

Solution

a) Puisque les résistances sont en parallèle, la résistance totale est donnée par

$$\frac{1}{R_t}=\frac{1}{2}+\frac{1}{R},$$

d'où

$$\frac{1}{R_t}=\frac{R+2}{2R},$$

et

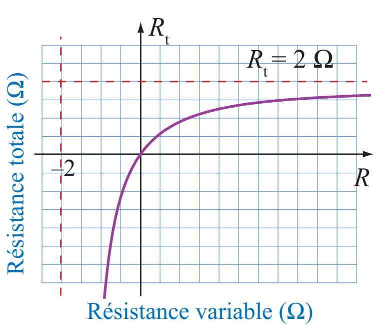
$$R_t=\frac{2R}{R+2},\ \text{où } R\geq 0.$$

REMARQUE
Dans ce contexte, l'asymptote verticale n'a aucune réalité physique, mais elle nous aide à esquisser le graphique.

b) Le dénominateur de la fonction s'annule à $R = -2$; la fonction a donc une asymptote verticale à $R = -2$. De plus, en effectuant la division des polynômes, on obtient

$$R_t=\frac{2R}{R+2}=2-\frac{4}{R+2},$$

ce qui permet de conclure que la fonction a une asymptote horizontale à $R_t = 2$ Ω puisque le rapport $4/(R + 2)$ tend vers zéro pour de grandes valeurs de R. De plus, la fonction a un zéro à $x = 0$, le graphique passe donc à l'origine. L'ordonnée à l'origine est donc également 0.



c) La connaissance des asymptotes et du zéro permet d'esquisser rapidement le graphique de la fonction mathématique. On peut alors facilement identifier le domaine de validité du modèle. Dans ce cas-ci, le domaine de validité serait théoriquement l'intervalle [0; ∞[. N'oublions pas que l'in- fini est ici un concept qui signifie qu'on peut donner à la variable des valeurs très grandes.

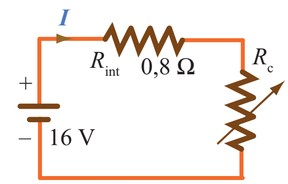
REMARQUE
L'interprétation, dans le contexte physique, est une composante importante de la compétence. Il n'est{ suffisant de pouvoir tracer le graphique, il faut pouvoir l'interpréter et en tirer toute l'information.

d) L'asymptote verticale n'a pas de signification physique puisqu'elle est à l'extérieur du domaine de validité du modèle. Son seul rôle dans ce problème est de donner des indications permettant d'esquisser rapidement le graphique. L'asymptote horizontale signifie que, lorsque la résistance variable augmente, la résistance totale du circuit augmente également, mais la valeur limite est 2 Ω, ce qui signifie que la résistance totale ne sera jamais plus grande que 2 Ω. Cela signifie également que, si la résistance variable augmente beaucoup, il ne passera plus aucun courant dans la branche contenant cette résistance. Tout le courant circulera par la branche dont la résistance est de 2 Ω.

Modélisation de la puissance

EXEMPLE 5.3.5

Une source de tension de 16 volts ayant une résistance interne de 0,8 Ω est reliée à un circuit comportant une charge de résistance variable R_c.



a) Décrire la puissance fournie à la charge en fonction du courant dans le circuit.
b) Représenter graphiquement la puissance fournie à la charge en fonction du courant dans le circuit.
c) Pour quel courant cette puissance sera-t-elle maximale ?
d) Quelle est la puissance maximale fournie à la charge ?
e) Calculer la valeur de la résistance de charge lorsque la puissance fournie est maximale.

Solution

a) Représentons par R_{int} la résistance interne et par R_c la résistance externe ou résistance de charge.

De même, on représente par V_{int} la chute de tension entre les bornes de la résistance interne, par V_c la chute de tension entre les bornes de la résistance de charge et par I, le courant dans le circuit.

La puissance P_c fournie à la charge est le produit de la tension aux bornes de la résistance R_c et du courant dans le circuit. La puissance est donc décrite en fonction du courant par

$$P_c = V_c I.$$

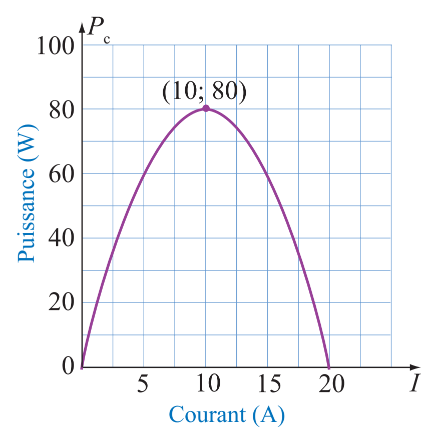
Cependant, par la loi des tensions de Kirchhoff, on a

$$E = V_{int} + V_c,$$

d'où $$V_c = E - V_{int} = 16 - 08,I.$$

Par conséquent la puissance fournie est décrite en fonction du courant par

$$P_c = V_c I = (16 - 0,8I)I = 16I - 0,8I^2.$$



b) La puissance est décrite par une fonction quadratique, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

La représentation graphique d'une telle fonction est une parabole qui est concave vers le bas lorsque le coefficient du terme du second degré est négatif.

c) La valeur optimale d'une fonction quadratique est atteinte lorsque la variable indépendante prend la valeur $-b/2a$. Dans la situation présente, la puissance maximum est atteinte lorsque

$$I = -b/2a = -16/-1,6 = 10 \text{ A}.$$

d) La puissance maximum est alors la puissance fournie lorsque le courant est de 10 A, soit

$$P(10) = (16 \times 10) - (0,8 \times 10^2) = 80 \text{ W}.$$

e) Le courant est décrit en fonction de la résistance de charge par

$$I = \frac{16}{R_c + 0,8}.$$

On cherche la valeur de la résistance R_c pour laquelle le courant est de 10 A, soit :

$$\frac{16}{R_c + 0{,}8} = 10,$$

d'où $$16 = 10(R_c + 0{,}8)$$

et $$16 = 10R_c + 8.$$

En isolant R_c, on obtient

$$10R_c = 8$$

et $$R_c = 0{,}8.$$

On constate que, dans cet exemple, la puissance est maximale lorsque la résistance de charge est égale à la résistance interne.

Dans l'exemple précédent, on a exprimé la résistance de charge en fonction du courant pour obtenir

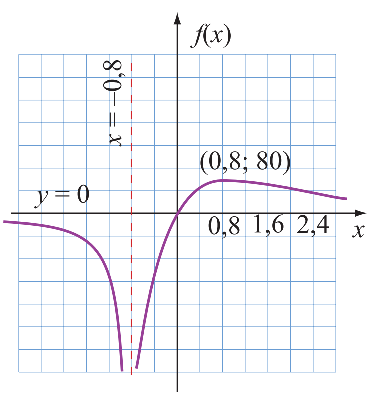
$$P_c = V_c I = (16 - 0{,}8I)I = 16I - 0{,}8I^2.$$

On peut également exprimer la puissance en fonction de la résistance de charge en considérant la relation

$$P_c = R_c I^2.$$

Puisque le courant est $I = \dfrac{16}{R_c + 0{,}8}$, on obtient

$$P_c(R_c) = R_c\left(\frac{16}{R_c + 0{,}8}\right)^2 = \frac{256R_c}{(R_c + 0{,}8)^2}.$$

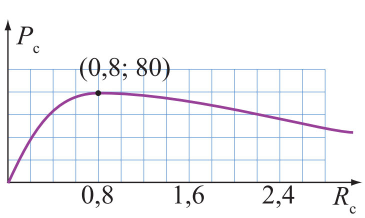


C'est une fonction rationnelle de la forme

$$f(x) = \frac{256x}{(x + 0{,}8)^2}.$$

Elle est asymptotique à l'axe horizontal et elle passe par le point (0; 0). De plus, la fonction est positive si $x > 0$ et négative si $x < 0$ puisque le numérateur change de signe à 0 et que le dénominateur est toujours positif comme carré d'un facteur de degré 1.

La fonction a une asymptote verticale à $x = -0{,}8$ et elle est négative des deux côtés de cette asymptote.



On sait de plus que la fonction décrivant la puissance atteint sa valeur maximale à $R_c = 0{,}8\ \Omega$ et que cette puissance est égale à 80 W.

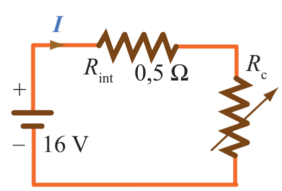
En reportant l'information recueillie dans un système d'axes, on peut esquisser le graphique de la fonction dont la partie positive constitue le modèle décrivant la situation étudiée.

5.4 Exercices

Déterminer les zéros, l'ordonnée à l'origine et les asymptotes des fonctions suivantes. À l'aide de l'information recueillie, esquisser le graphique de ces fonctions.

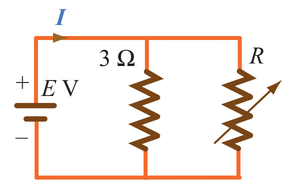
1. $f(x)=\dfrac{1}{2x}$
2. $f(x)=\dfrac{1-6x}{2x}$
3. $f(x)=\dfrac{3}{x}$
4. $f(x)=\dfrac{2}{x}+3$
5. $f(x)=\dfrac{2+3x}{x+1}$
6. $f(x)=\dfrac{3-4x}{x-2}$
7. $f(x)=\dfrac{3-4x}{2x}$
8. $f(x)=\dfrac{4x+5}{2x-3}$
9. $f(x)=\dfrac{8}{x+0{,}5}$
10. $f(x)=\dfrac{64}{(x+0{,}5)^2}$
11. $f(x)=\dfrac{8}{x}+4$
12. $f(x)=\dfrac{1}{3x}+3$

13. Une source de tension de 16 volts, ayant une résistance interne de 0,5 Ω est reliée à un circuit comportant une résistance variable R_c.



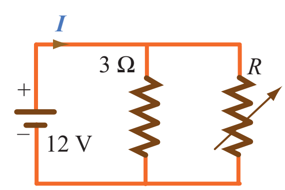
a) Décrire le courant I en fonction de la résistance variable R_c.
b) Quel est le courant dans le circuit lorsque la résistance variable vaut 0,25 Ω ?
c) Quel est le courant dans le circuit lorsque la résistance variable vaut 0,5 Ω ?
d) Quel valeur doit prendre la résistance variable pour que le courant soit de 8 A?
e) Identifier les asymptotes verticale et horizontale, le zéro et l'ordonnée à l'origine et esquisser le graphique de la fonction décrivant le courant.

14. Une résistance de 3 Ω est montée en parallèle avec une résistance variable R.



a) Décrire la résistance totale R_t en fonction de la résistance variable R.
b) Quelle sera la résistance totale si la résistance variable vaut 0,5 Ω ?
c) Quelle sera la résistance totale si la résistance variable vaut 1 Ω ?
d) Quelle sera la résistance totale si la résistance variable vaut 2 Ω. ?
e) Quelle devra être la valeur de la résistance variable pour que la résistance totale soit de 2 Ω ?
f) Identifier les asymptotes verticale et horizontale, le zéro et l'ordonnée à l'origine et esquisser le graphique de la fonction décrivant la résistance totale.

15. Une résistance de 3 Ω est montée en parallèle avec une résistance variable R et ce montage est relié à une source de tension de 12 volts.

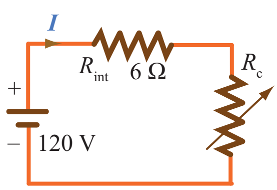


Sachant que la résistance totale du circuit est

a) Quelle est la règle de correspondance décrivant le courant généré par la source en fonction de la résistance variable ?
b) Quelle est le courant si la résistance variable vaut 1 Ω ?
c) Quelle est le courant si la résistance variable vaut 2 Ω ?
d) Quelle devra être la valeur de la résistance variable pour que le courant soit de 6 A ?

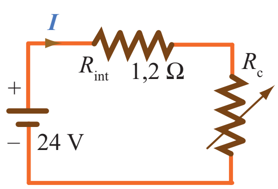
e) Identifier les asymptotes verticale et horizontale de la fonction décrivant le courant, le zéro et l'ordonnée à l'origine et esquisser le graphique de la fonction décrivant le courant.
f) Quelle est l'interprétation physique de ces asymptotes ?

16. Une source de tension de 120 volts, ayant une résistance interne de 6 Ω est reliée à un circuit comportant une résistance variable R_c.



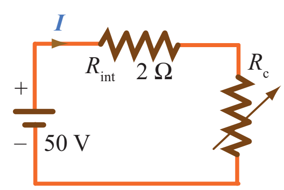
a) Décrire le courant I dans le circuit en fonction de la résistance R_c.
b) Quel est le courant lorsque la résistance variable vaut 4 Ω ?
c) Quel est le courant lorsque la résistance variable vaut 8 Ω ?
d) Quelle devra être la résistance variable pour que le courant soit de 6 A?
e) Identifier les asymptotes verticale et horizontale, le zéro et l'ordonnée à l'origine et esquisser le graphique de la fonction décrivant le courant.
f) Exprimer la puissance fournie au circuit externe en fonction du courant I et tracer le graphique de cette fonction.
g) Déterminer pour quel courant la puissance fournie sera maximale.

17. Une source de tension de 24 volts, ayant une résistance interne de 1,2 Ω est reliée à un circuit comportant une résistance variable R_c.



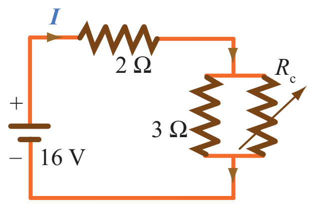
a) Décrire le courant I dans le circuit en fonction de la résistance R_c.
b) Quel est le courant lorsque la résistance variable vaut 4 Ω ?
c) Quel est le courant lorsque la résistance variable vaut 8 Ω ?
d) Quelle devra être la résistance variable pour que le courant soit de 6 A?
e) Identifier les asymptotes verticale et horizontale, le zéro et l'ordonnée à l'origine et esquisser le graphique de la fonction décrivant le courant.
f) Exprimer la puissance fournie au circuit externe en fonction du courant I et tracer le graphique de cette fonction.
g) Déterminer pour quel courant la puissance fournie sera maximale.

18. Une source de tension de 50 volts, ayant une résistance interne de 2 Ω est reliée à un circuit comportant une résistance variable R_c.



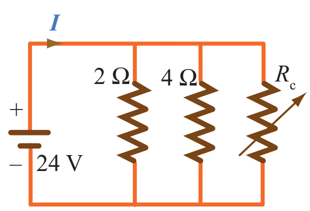
a) Décrire le courant I dans le circuit en fonction de la résistance R_c.
b) Quel est le courant lorsque la résistance variable vaut 3 Ω ?
c) Quel est le courant lorsque la résistance variable vaut 5 Ω ?
d) Quelle devra être la résistance variable pour que le courant soit de 6 A?
e) Identifier les asymptotes verticale et horizontale, le zéro et l'ordonnée à l'origine et esquisser le graphique de la fonction décrivant le courant.
f) Exprimer la puissance fournie au circuit externe en fonction du courant I et tracer le graphique de cette fonction.
g) Déterminer pour quel courant la puissance fournie sera maximale.

19. Le circuit illustré ci-dessous comporte une résistance variable R montée en parallèle avec une résistance de 3 Ω. Ce montage est en série avec une résistance de 2 Ω et une source de tension.



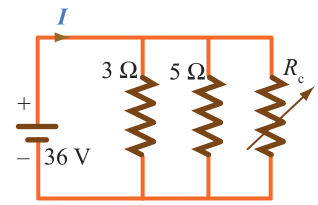
a) Décrire la résistance totale du circuit en fonction de la résistance variable R. Représenter graphiquement la fonction et interpréter selon le contexte les caractéristiques du graphique.
b) Calculer la fonction décrivant le courant dans le circuit si la source fournit une tension de 16 V. Représenter graphiquement la fonction et interpréter dans le contexte les caractéris-tiques du graphique.

20. Le circuit illustré ci-contre comporte une résistance variable R, une résistance de 4 Ω et une résistance de 2 Ω montées en parallèle. Ce montage est relié à une source de tension de 24 V.



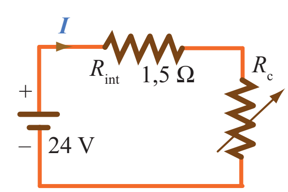
a) Décrire la résistance totale du circuit en fonction de la résistance variable R. Représenter graphiquement la fonction et interpréter selon le contexte les caractéristiques du graphique.
b) Trouver la fonction décrivant le courant dans le circuit si la source fournit une tension de 24 V. Représenter graphiquement la fonction et interpréter dans le contexte les caractéristiques du graphique.
c) Sachant que la puissance dissipée dans une résistance est donnée par $P = RI^2$, trouver la fonction décrivant la puissance dissipée dans la résistance de charge en fonction de celle-ci.

21. Le circuit illustré ci-dessous comporte une résistance variable R, une résistance de 3 Ω et une résistance de 5 Ω montées en parallèle. Ce montage est relié à une source de tension de 36 V.



a) Trouver la résistance totale du circuit en fonction de la résistance variable R. Représenter graphiquement la fonction et interpréter selon le contexte les caractéristiques du graphique.
b) Trouver la fonction décrivant le courant dans le circuit si la source fournit une tension de 36 V. Représenter graphiquement la fonction et interpréter selon le contexte les caractéristiques du graphique.
c) Sachant que la puissance dissipée dans une résistance est donnée par $P = RI^2$, Trouver la fonction décrivant la puissance dissipée dans la résistance de charge en fonction de celle-ci.

22. Une source de tension de 24 volts, ayant une résistance interne de 1,5 Ω est reliée à un circuit comportant une résistance variable R_c.



a) Décrire le courant I dans le circuit en fonction de la résistance R_c.
b) Décrire la puissance fournie à la charge en fonction du courant dans le circuit. Représenter graphiquement cette fonction et interpréter ses caractéristiques graphiques.
c) Décrire la puissance fournie à la charge en fonction de la résistance de charge. Représenter graphiquement cette fonction et interpréter ses caractéristiques graphiques.
d) Décrire la puissance dissipée en chaleur dans la source en fonction du courant dans le circuit. Représenter graphiquement cette fonction et interpréter ses caractéristiques graphiques.

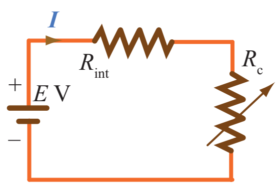
e) Décrire la puissance dissipée en chaleur dans la source en fonction de la résistance variable. Représenter graphiquement cette fonction et interpréter ses caractéristiques graphiques.

f) Le rendement d'un circuit, qui s'exprime en pourcentage, est donné par

$$\eta = \frac{P_c}{P_c + P_{int}} \times 100 = \frac{100\,P_c}{P_c + P_{int}}.$$

Établir le rendement du circuit en fonction de la résistance de charge. Représenter graphiquement.

23. Une source de tension de E volts, ayant une résistance interne R est reliée à un circuit comportant une résistance variable R_c.



a) Exprimer la puissance fournie au circuit externe en fonction du courant I et tracer le graphique de cette fonction.

b) Montrer que la puissance fournie à la charge est maximale lorsque le courant est $E/(2R_c)$ A.

c) Décrire le courant I en fonction de la résistance R_c.

d) Montrer que la puissance fournie est maximale lorsque la résistance de charge est égale à la résistance interne et que la puissance est alors $E^2/(4\,R_c)$ W.