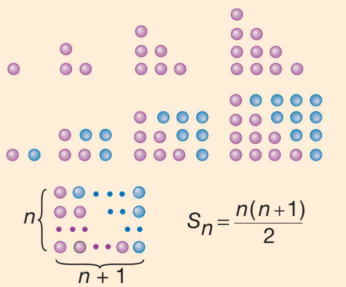
Dans ses réflexions sur la logique et la construction de la connaissance, Aristote indique que l'argumentation est la traduction dans le langage d'un raisonnement. Selon le Petit Robert, un langage est un système de signes vocaux (parole) et graphiques (écriture). Pour comprendre une argumentation, il faut d'abord s'initier au langage utilisé.

Preuve et langage

Démonstration visuelle



Somme d'une progression arithmétique

Dans une démonstration, les symboles graphiques peuvent être des formules ou des figures. Les ouvrages *Proofs without words* présentent plusieurs exemples de démonstrations essentiellement visuelles dont certaines remontent à Pythagore. La figure ci-contre illustre comment Pythagore déterminait la somme de la progression arithmétique

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n.$$

La représentation des nombres par des points disposés géométriquement permet de constater qu'en doublant le nombre de points des sommes partielles d'une progression arithmétique, il est possible de construire un rectangle. Le nombre de points de ce rectangle est alors facile à déterminer, ce qui donne la somme des termes de la progression.

Démonstration algébrique

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\ +S_n = & n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 \\ \hline 2S_n = & \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ fois}}, \end{array}$$

$$\text{d'où} \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En utilisant plutôt le langage de l'algèbre, on a la démonstration ci-contre.

On perçoit très bien que la démonstration en algèbre est la transposition dans le langage moderne de l'approche pythagoricienne.

Tapis de Serpinski

Somme d'une progression géométrique, $a = 1/4$, $r = 3/4$

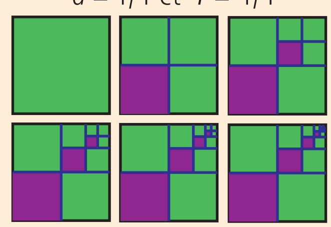
Progression géométrique

Considérons maintenant un triangle équilatéral dont on joint les points milieux et dont on découpe le triangle équilatéral central ainsi construit. Dans les triangles restants, on répète le processus itérativement à l'infini. On construit ainsi un *tapis triangulaire de Serpinski*. Ce tapis illustre le fait que la somme des termes d'une progression géométrique infinie dont le premier terme est $a = 1/4$ et dont la raison est $r = 3/4$, est égale à 1, soit :

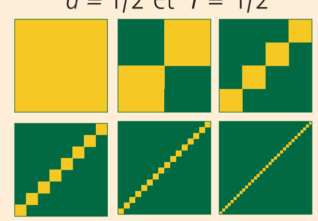
$$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256} + \ldots = 1$$

Cette illustration est une « preuve sans mots », c'est-à-dire une transposition dans un langage strictement visuel, permettant de conclure que la somme est 1.

Progression géométrique, $a = 1/4$ et $r = 1/4$

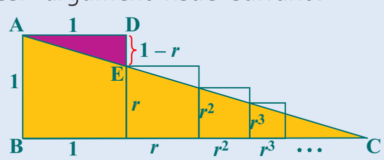


Progression géométrique, $a = 1/2$ et $r = 1/2$

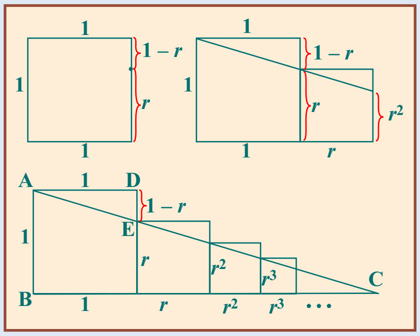


De façon analogue, on peut déterminer visuellement la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est 1/4 et la raison 1/4 ou de la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est 1/2 et la raison 1/2.

Ces argumentations visuelles présentent des cas particuliers, mais, Dans *Proofs without words*, on trouve aussi l'argument visuel suivant :



Dans ce cas, l'interprétation est moins directe. Il faut se représenter comment cette figure est construite et les propriétés sur lesquelles repose l'argument. La figure comporte un carré de côté unitaire. On détermine sur le côté droit, une longueur r. On construit sur le segment obtenu un nouveau carré de côté r. On prolonge le segment joignant les sommets gauches des deux carrés, ce qui détermine un segment de longueur r^2. On poursuit ainsi :



Les triangles ADE et ABC sont semblables, et $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$, on en tire :

$$\frac{1+r+r^2+r^3+\ldots}{1} = \frac{1}{1-r},$$

d'où $1+r+r^2+r^3+r^4+\ldots = \dfrac{1}{1-r}$.

On peut facilement généraliser ce résultat en considérant un carré de côté a (ou en multipliant les deux membres de l'équation par a), ce qui donne :

$$S_\infty = a+ar+ar^2+ar^3+\ldots = \frac{a}{1-r}.$$

Dans le langage de l'algèbre, on démontre ce résultat général comme dans l'encadré ci-dessous.

Somme d'une progression géométrique finie

$$\begin{array}{rl}
S_n = & a+\cancel{ar}+\cancel{ar^2}+\cancel{ar^3}+\ldots+\cancel{ar^{n-2}}+\cancel{ar^{n-1}}. \\
-rS_n = & \quad -\cancel{ar}-\cancel{ar^2}-\cancel{ar^3}-\ldots-\cancel{ar^{n-2}}-\cancel{ar^{n-1}}-ar^n \\
\hline
S_n - rS_n = & a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -ar^n
\end{array}$$

d'où $S_n - rS_n = a - ar^n = a(1-r^n)$ et $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$.

Dans les cas où $|r| < 1$, r^n tend vers 0 lorsque que n tend vers l'infini et on obtient :

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}.$$

Ce résultat général permet alors de traiter tous les cas de série géométrique de raison $|r| < 1$. Dans le cas du tapis triangulaire de Sierpinski, $a = 1/4$ et $r = 3/4$. Par substitution, on obtient :

$$S = \frac{1/4}{1-3/4} = \frac{1/4}{1/4} = 1.$$

REMARQUE :
Le raisonnement qui donne un résultat général est beaucoup plus intéressant que celui qui donne un résultat particulier.

En utilisant le symbole de sommation, comme dans l'étude des séries, on écrit :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{4^k} = \frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}+\ldots = 1.$$

On remarque qu'il est beaucoup plus intéressant de démontrer un résultat général que d'élaborer une démonstration pour chaque cas particulier. Ainsi, pour trouver la somme de la série :

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{25}+\frac{2}{125}+\frac{2}{625}+\ldots$$

Il n'est pas facile de construire une représentation visuelle qui permette de conclure alors qu'en utilisant le résultat général, il suffit de poser $a = 2/5$ et $r = 1/5$ pour obtenir :

$$S_\infty = \frac{2/5}{1-1/5} = \frac{2/5}{4/5} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion

Une démonstration est la traduction dans un langage d'un raisonnement et pour comprendre la démonstration, il faut connaître le langage utilisé. Le langage visuel est certes très attrayant, mais pour comprendre le raisonnement, il faut quand même personnellement refaire le cheminement, s'approprier la démarche. Il faut également connaître les propriétés utilisées. Ainsi, dans la démonstration visuelle du résultat général, il faut savoir que dans les triangles semblables, les côtés homologues sont proportionnels.

REMARQUE :
Pour se convaincre de la validité d'une conclusion, le lecteur doit s'approprier le raisonnement en analysant chaque étape.