Al-Khwarizmi
783-850

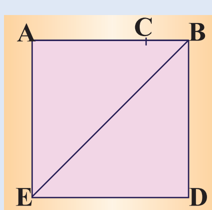
Euclide a-t-il influencé Al-Khwarizmi? Les historiens ne s'entendent pas sur la réponse à donner à cette question. Certains pensent que oui, d'autres répondent non. Voici deux propositions tirées des *Éléments* d'Euclide qui démontrent les propriétés des figures géométriques dont Al-Khwarizmi se sert pour résoudre des équations.

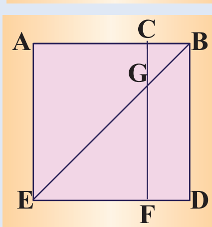
Al-Khwarizmi
De la géométrie à l'algèbre

Dans les *Éléments* d'Euclide, on rencontre diverses propositions géométriques dont la transcription dans le langage algébrique moderne donne les procédures de résolution d'équations quadratiques. Nous présentons ici en parallèles les deux de ces propositions et l'utilisation de celles-ci par Al-Khwarizmi dans la résolution d'équations quadratiques. Ce sont les propositions 4 et 5 du livre II des *Éléments.*

Éléments, Livre II, proposition 4

Si une droite est coupée au hasard, le carré construit sur la droite entière est égal aux carrés sur les segments et deux fois le rectangle contenu par les segments.



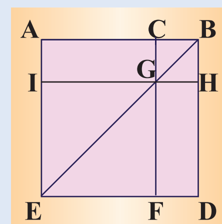


Démonstration

Soit un segment de droite AB coupé en un point C quelconque. Avec AB comme côté, construisons le carré ABDE et traçons sa diagonale BE.

Par le point C, traçons une parallèle aux côtés AE et BD qui rencontre la diagonale au point G.

Par le point G, traçons maintenant une parallèle à AB.



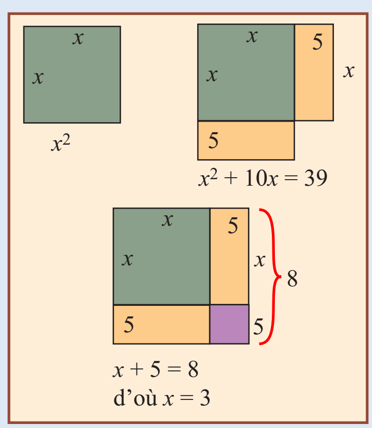
L'aire du carré ABDE est alors égale à la somme des aires des carrés sur les segments, soit CBHG et GFEI, et à deux fois l'aire du rectangle compris entre les deux segments puisque les deux rectangles ACGI et GHDF ont même aire.

Résolution par Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi résout l'équation

$$x^2 + 10x = 39$$

en construisant un carré pour représenter x^2 et forme deux rectangles avec le terme en x. Il peut alors déterminer le côté du carré manquant pour compléter la figure, ce qui donne la solution positive de l'équation.



Prodafor Inc

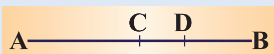
Considérons la proposition suivante :

Éléments, Livre II, proposition 5

Si une ligne droite est coupée en segments égaux et inégaux, le rectangle contenu par les segments inégaux de la droite entière pris avec le carré sur la droite comprise entre les points de section est égal au carré sur la moitié de la droite.

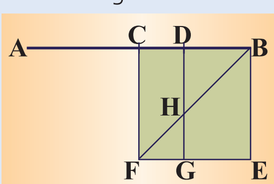
Démonstration

Soit un segment de droite AB coupé en segments égaux au point C et en segments inégaux au point D.

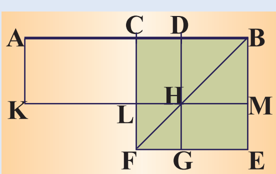


En prenant CB comme côté, construisons le carré CBEF et sa diagonale BF.

Du point D, traçons DG parallèlement à BE, déterminant ainsi le point H sur la diagonale. Par ce point, traçons une parallèle à AB. Par le point A, traçons une parallèle à BE. Ces deux parallèles se rencontrent en K.



Dans cette figure, le rectangle ADHK est le rectangle formé par les segments inégaux puisque DH et DB sont de même longueur par construction. De plus, le carré HGFL est le carré sur la diagonale compris entre les points de section et CBEF est le carré construit sur la moitié de la droite AB. Par construction, les rectangles CDHL et EGHM ont même aire. Il en est de même pour les rectangles ACLK et CBML. L'aire du rectangle ADHK, construit à l'aide des segments inégaux est donc égale à l'aire du gnomon CBEGHL.



Par conséquent, en ajoutant l'aire du carré GHLF à celle du rectangle ADHK, on a l'aire du carré construit sur la moitié du segment AB, soit le carré CBEF.

Résolution par Al-Khwarizmi

Pour résoudre l'équation

$$x^2 + 21 = 10x,$$

Al-Khwarizmi veut construire un carré dont l'aire, une fois complétée, lui permettra de déterminer la solution positive de l'équation.

Il commence par un rectangle dont l'aire est le produit de l'inconnue et de son coefficient,

$$10x,$$

et détermine le point milieu du côté de longueur 10. Dans le rectangle initial, il forme le carré de côté x, dont l'aire est x^2. En retranchant l'aire x^2 de celle du rectangle initial, l'aire restante est égale à la constante, 21. Le côté du rectangle initial est alors une ligne droite divisée en « segments égaux et inégaux ».

En reportant le petit rectangle sur le grand côté du plus grand des deux restants, il obtient une figure en forme de L dont l'aire est égale à 21.

Pour compléter le carré il faut ajouter un petit carré. L'aire du carré complété est alors 25, celle du petit carré ajouté est donc égale à 4 et la longueur de son côté est 2. C'est en ajoutant 2 à x qu'il complète le carré de côté 5. Par conséquent, $x = 3$ et l'équation est résolue.

Évidemment, Al-Khwarizmi n'utilise pas la lettre x pour décrire l'inconnue, mais on voit que les propositions d'Euclide garantissent que les solutions sont correctes.

Commentaire

Dans ses propositions, Euclide veut démontrer des propriétés de figures géométriques et montrer comment intervenir sur des segments de droite pour qu'une propriété particulière soit satisfaite. Il ne cherche pas à déterminer la valeur numérique d'une solution. Al-Khwarizmi lui, se sert des constructions géométriques pour déterminer une valeur numérique, la solution d'une équation. Pour lui, la solution n'est pas la figure géométrique mais le nombre qu'elle lui permet de déterminer.