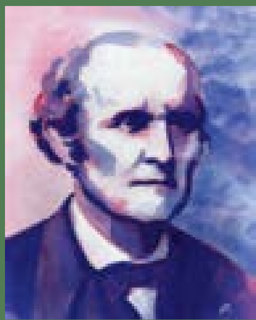
Illustration : Noémie Ross



Arthur Cayley
1821-1895

Durant tout son apprentissage, Arthur Cayley s'est distingué par ses aptitudes en mathématiques. Il occupe une chaire de mathématiques à Cambridge à partir de 1863 et consacre son temps à la recherche en mathématiques. Au cours de sa vie, il publie plus de 900 articles ce qui le classe quatrième à cet égard, n'étant devancés que par Euler (Leonhard, 1707-1783), Cauchy (Augustin, 1789-1857) et Erdös (Paul, 1913-1996).

Arthur Cayley

Arthur Cayley est un mathématicien anglais. Son père est alors commerçant en Russie et ses parents demeurent à St-Pétersbourgh. Il est né durant une visite estivale de ses parents à Richmond en Angleterre.

Son éducation commence à la maison avec des tuteurs. Cette éducation comprend l'apprentissage du français, langue du commerce en Russie, qu'Arthur utilisera toute sa vie pour lire et écrire des articles mathématiques. En 1828, la famille quitte la Russie pour revenir en Angleterre. En 1831, il est inscrit dans un collège anglican privé et quatre ans plus tard, il est entre au *Kings's College School* de Londres. Dans ces établissements scolaires, Cayley montre de grandes dispositions en mathématiques et ses professeurs l'encouragent à poursuivre ses études dans ce domaine alors que son père souhaite le voir reprendre les affaires commerciales de la famille.

En 1838, il entre au *Trinity College* de Cambridge et obtient un diplôme en 1842. Lecteur infatigable, il assimile les ouvrages des grands mathématiciens de l'époque durant son séjour à Cambridge. Durant ses quatre années au *Trinity College*, il publie 28 articles dont « Sur l'intersection des courbes », «Démonstration du théorème de Pascal » et « Sur la théorie des déterminants ».

En 1846, il quitte le *Trinity College*, car il n'a aucune envie de devenir pasteur de l'Église anglicane, seules les mathématiques sont importantes à ses yeux et il veut être chercheur en ce domaine.

Pour assurer sa sécurité financière tout en poursuivant ses recherches, il s'initie au droit dans un collège d'avocats. Durant ses études de droit, il continue ses recherches sur les fonctions elliptiques, les courbes et les surfaces algébriques, la théorie des invariants et les déterminants. Il assiste également à des conférences de Hamilton (William Rowan, 1805-1865) sur les quaternions. Il fait la connaissance de Salmon (George, 1819-1904) et de Sylvester (James Joseph, 1814-1897). Il est admis au barreau en 1849 et pratique le métier d'avocat durant 14 ans, sans jamais négliger ses recherches en mathématiques. Il publie environ 250 articles à cette époque.

En 1863, une nouvelle chaire de mathématiques est créé à Cambridge et le poste est proposé à Cayley. Celui-ci accepte et quitte la profession d'avocat, ce qui entraîne une diminution importante de ses revenus. Il occupe ce poste jusqu'en 1895 lors de son décès.

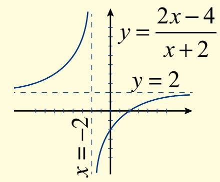
Cayley est heureux d'avoir la chance de se consacrer entièrement aux mathématiques. Il continue à publier des articles sur ses recherches et produit plus de 900 articles sur la plupart des sujets mathématiques. Ses principales contributions portent sur l'algèbre des matrices, la géométrie non euclidienne et les géométries à *n* dimensions. En 1854, il rédige deux articles donnant un aperçu intéressant sur la théorie des groupes. Le sujet est nouveau et les seuls groupes connus sont des groupes de permutations. Dans ses articles, Cayley définit les groupes abstraits et en dresse une table de multiplication.

Son œuvre principale est une nouvelle branche des mathématiques, développée avec Sylvester, l'*Algèbre linéaire et ses transformations*, qu'il conçoit en étudiant les transformations homographiques et les systèmes d'équations linéaires.

C'est dans un mémoire publié en français en 1855, intitulé « Remarques sur la notation des fonctions algébriques », qu'il introduit les notions de base de l'algèbre des matrices. Dans un article paru en 1858, *Memoir on the Theory of Matrices*, il définit la somme de deux matrices, la multiplication d'une matrice par un scalaire et la multiplication de deux matrices et il énonce les propriétés de ces opérations. Il constate que les quaternions et les matrices forment des groupes.

En 1863, il épouse Susan Moline, fille d'un banquier de Greenwich avec laquelle il a deux enfants, Mary et Henry. Cayley soutient la cause de l'éducation des femmes dans les années 1880 et jusqu'à sa mort en 1895, il poursuit ses recherches en théorie des invariants, matrices, groupes, fonctions elliptiques, théorie des arbres, géométrie analytique et géométries non-euclidiennes.

Transformations homographiques



En mathématiques, une fonction homographique (ou homographie) est une fonction qui est représentée par un quotient de deux fonctions affines. C'est donc un cas particulier de fonction rationnelle où les polynômes au numérateur et au dénominateur sont de degré un. La fonction inverse d'une homographie est également une homographie.

Dans le corps commutatif des réels $\mathbb{R}$, une homographie est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

où a, b, c et d sont des éléments de $\mathbb{R}$ et f est non constante, c'est-à-dire $ad - bc$ est non nul. Le domaine $\mathbb{R}\backslash\{-d/c\}$ et le codomaine est $\mathbb{R}\backslash\{a/c\}$

Lorsque $c = 0$, l'homographie est une fonction affine non constante. Une homographie non affine est dite *propre*.

Une homographie f détermine une bijection (de $\mathbb{R}\backslash\{-d/c\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{a/c\}$ si f est propre, et de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si f est affine). Sa réciproque est l'homographie

$$f^{-1}(y) = -\frac{dy-b}{cy-a}$$

On peut prolonger une homographie f à la droite projective obtenue en ajoutant un point à l'infini ω à $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{R}$, soit $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\omega\}$. En posant $f(-d/c) = \omega$ et $f(\omega) = a/c$ si f est propre et en posant $f(\omega) = \omega$ si f est affine. La transformation obtenue est une application projective, aussi appelée homographie.

Les homographies définies sur $\hat{\mathbb{R}}$, munies de la composition des applications, forment alors un groupe, dont les fonctions affines forment un sous-groupe.

Dans le cas réel réel ou complexe, la dérivée d'une homographie est

$$f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

Le numérateur est le déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

On en déduit que les variations de la fonction homographique sont les suivantes :

- Si $ad - bc$ est strictement négatif, alors f est strictement décroissante sur ses deux intervalles de définition, soit les intervalles $]-\infty; -d/c[\cup]-d/c; \infty[$;
- Si $ad - bc$ est strictement positif, alors f est strictement croissante sur ses deux intervalles de définition ;
- Si $ad - bc$ est nul, alors f est constante sur ses deux intervalles de définition, égale à a/c.