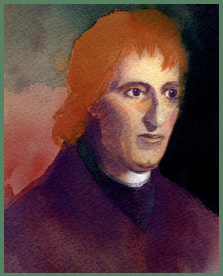


Illustrations : Noémie Ross

Bernard Bolzano
1781-1848

Émigré italien et marchand d'art, le père de Bernard Bolzano, également prénommé Bernard, était très engagé socialement et fut cofondateur d'un orphelinat à Prague. Le fils a hérité de son père une conscience sociale et un souci d'autrui qui ont dicté sa conduite et ses prises de position tout au long de sa vie. À cause de ses prises de position sociales, il fut interdit de publication et la plupart de ses manuscrits n'ont été retrouvés que dans les années 1920.

Bernard Bolzano

Le mathématicien, logicien, philosophe et théologien Bernard Bolzano est né à Prague le 5 octobre 1781. Cette ville de Bohème. Cette ville de l'empire Autrichien des Habsbourg fait maintenant partie de la république tchèque. De langue et de culture allemandes, Bernard fréquente au Gymnasium Priarist à Prague de 1791 à 1796. Il entre ensuite à la faculté de philosophie de l'université de Prague. Il étudie ensuite la théologie et à la fin de ses études, il découvre les mathématiques. Cette science lui permet d'avoir des réponses claires aux questions qu'il se pose, ce qu'il n'a pas obtenue dans ses études antérieures.

Il est particulièrement séduit par les traités d'Abraham Kästner (1719-1800), il écrit :

> *Lorsque j'ai ouvert une fois par hasard une page dans le traité de Kastner, des astérisques ont incité ma curiosité à relire ce passage et j'ai décidé immédiatement d'étudier les mathématiques, espérant trouver dans cette science ce que j'avais depuis longtemps cherché en vain. Car Kastner y démontre ce qu'on passe en général tout à fait sous silence, parce que tout le monde le sait déjà...*

Il étudie ensuite les *Éléments* d'Euclide, et les mémoires de Joseph-Louis Lagrange. En 1804, il publie *Considérations sur certains objets de la géométrie élémentaire* et entre dans les ordres un an plus tard. Diplômé docteur en philosophie la même année, il est nommé professeur de philosophie à l'université de Prague. Son poste ne sera reconnu par Vienne qu'en 1807.

En 1801, il devient membre de la Société des sciences de Bohème et rédige des mémoires sur la géométrie élémentaire, les fondements mathématiques, le théorème du binôme, Dans le premier de ces mémoires, produit en 1804 et intitulé *Considérations sur certains objets de la géométrie*, il essaie, comme bien d'autres avant lui, de démontrer le postulat des parallèles d'Euclide.

En 1817, il rédige une démonstration purement analytique du théorème sur la localisation des zéros et *Die drei Probleme der Rectification* (Les trois problèmes de la rectification) qui porte sur le calcul de la longueur d'une courbe et le calcul des aires et des volumes. Sa conception rationaliste l'amène à une refonte rigoureuse de la théorie des fonctions d'une variable réelle et à une définition claire des concepts de continuité et de dérivabilité.

Comme enseignant et comme prédicateur, Bolzano est très critique envers l'organisation de la société. Le 24 décembre 1819, ses convictions pacifistes et son souci de justice économique et sociale lui valent d'être destitué de son poste de professeur et interdit de publication. Surveillé par la police, il est poursuivi en justice pour hérésie et refuse systématiquement de se rétracter publiquement.

Les poursuites sont finalement abandonnées en 1825.

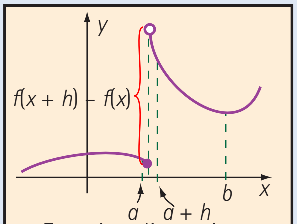
Même si ses ouvrages ne peuvent être publiés en Autriche, il continue ses recherches et joue un rôle important dans la vie intellectuelle de son pays. Dans ses recherches, Bolzano s'est donné pour mission de libérer les concepts de limite, de convergence et de dérivée de leur dimension géométrique pour les remplacer par des concepts purement arithmétiques. Il est également préoccupé par le besoin de raffiner et enrichir le concept de nombre.

En 1817, Bolzano donne la définition suivante de la continuité d'une fonction :

Une fonction $f(x)$ varie suivant la loi de continuité pour une valeur de x si la différence

$$f(x+h) - f(x)$$

peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée si l'on peut toujours prendre h aussi petit que l'on voudra.

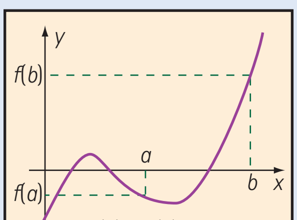


Fonction discontinue à $x = a$ et continue à $x = b$.

Bolzano définit la continuité pour une valeur de x plutôt que sur un intervalle (on dit maintenant continuité en un point). Pour que la différence des images $f(x+h) - f(x)$ puisse être rendue plus petite que toute grandeur donnée, en prenant h aussi petit que l'on voudra, la fonction doit être définie et ne peut avoir de saut, fini ou infini, en cette valeur de x.

Bolzano entreprend également de démontrer le théorème suivant :

Toute fonction continue de x qui est positive pour $x = a$ et négative pour $x = b$ doit s'annuler pour une certaine valeur intermédiaire située entre a et b.



Ce théorème permet de localiser les zéros des équations du type $f(x) = 0$ lorsque x est un zéro isolé dans un intervalle $[a; b]$ pour lequel le produit $f(a) \times f(b)$ est négatif.

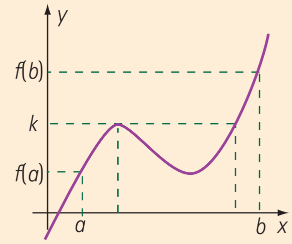
C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires de Cauchy que Bolzano démontre en évitant d'avoir recours à une construction géométrique comme argument. La géométrie était de moins en moins considérée comme un fondement fiable de la connaissance depuis que Carl Friedrich Gauss, en 1813, a formulé la possibilité qu'il existe d'autres géométries que celle d'Euclide. Bolzano préconise d'abandonner les conjectures fondées sur la géométrie et considère qu'il faut démontrer de façon analytique tous les résultats. Il redéfinit tous les axiomes qu'il utilise et démontre, ou du moins essaie de démontrer, chaque théorème dont il se sert.

Contrairement à Cauchy qui croyait qu'une fonction continue est nécessairement différentiable, Bolzano distingue les deux attributs et, quarante ans avant Weierstrass, construit une fonction d'une variable réelle, continue sur un intervalle fermé et qui n'est différentiable en aucun des points de cet intervalle.

En 1851, trois ans après sa mort, fut publié son ouvrage, *Paradoxes de l'infini*. Dans cet ouvrage, il donne des exemples de bijection entre les éléments d'un ensemble infini et ceux de l'un de ses sous-ensembles propre. Il étudie, en particulier, le fameux paradoxe de Galilée.

La plupart des travaux de Bolzano ont eu peu d'influence car ils sont demeurés longtemps sous forme de manuscrits, De nombreux mémoires ne furent retrouvés et appréciés que dans les années 1920-1930. Les travaux de Bolzano sur l'infini ont cependant ouvert la voie à ceux de Cantor sur la théorie des ensembles infinis.

Théorème des valeurs intermédiaires de Cauchy



Si f est continue sur $[a; b]$ et k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe au moins une valeu de c dans $[a; b]$ telle que $f(c) = k$.