MATHÉMATIQUES

de la FINANCE

CHAPITRE 8

Résoudre des problèmes de mathématiques financières.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- le calcul de la somme des termes d'une progression géométrique;
- le calcul de la valeur actuelle et de la valeur future d'une annuité de début ou de fin de période, connaissant le taux périodique;
- le calcul de la valeur actuelle et de la valeur future d'une annuité de début ou de fin de période, connaissant le taux nominal.

OBJECTIFS

8.1 Résoudre des problèmes portant sur des annuités d'investissement à un taux périodique connu.

8.2 Résoudre des problèmes portant sur des annuités de remboursement à un taux périodique connu.

8.3 Résoudre des problèmes portant sur des annuités d'investissement à un taux nominal connu.

8.4 Résoudre des problèmes portant sur des annuités de remboursement à un taux nominal connu.

Annuités 166
Annuité de placement, début de période
Progressions géométriques
Annuité de fin de période
Exercices 181

Annuités générales 183
Calcul du taux périodique
Développements et logarithmes, note historique
Exercices 189

8.1 Annuités

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté différents problèmes relevant des mathématiques financières. Nous avons analysé la croissance d'un capital qui est placé en un seul versement pour une durée donnée. Dans la pratique, on constitue plutôt un capital par des versements périodiques qu'on appelle **annuités**. À l'origine, le terme annuité désignait un paiement annuel, mais aujourd'hui, c'est un terme générique qui désigne tout paiement périodique. Cependant, on distingue les versements mensuels qui sont appelés des mensualités. On peut analyser la croissance du capital ainsi accumulé en se rappelant que chacun des versements est un capital dont la croissance est exponentielle. Le capital accumulé est alors la somme des valeurs futures de chacun des versements effectués, ce qui inclut le versement et les intérêts qu'il a rapportés. Lorsque les versements sont égaux, la suite des valeurs futures forme une progression géométrique dont il faut effectuer la somme.

Annuités de placement (début de période)

Annuités01

Mise en situation

Vous décidez de constituer un capital en faisant 4 versements semestriels de 500 $ à un taux de 6 % capitalisé semestriellement. En complétant le tableau suivant, déterminer l'évolution du capital en tenant compte des versements effectués et de l'intérêt reçu.

Taux nominal $j = (6\ \%,2)$.

Nombre de périodes, $n = 4$

Taux périodique $j/m =$ 3 % aux six mois

Période	Valeur cumulée, début de période	Versement (annuité)	Capital total, début de période	Intérêt pour la période	Valeur cumulée, fin de période
1	0,00 $	500,00 $	500,00 $	15,00 $	515,00 $
2	515,00 $	500,00 $	1 015,00 $	30,45 $	1 045,45 $
3	1 045,45 $	500,00 $	1 545,45 $	46,36 $	1 591,81 $
4	1 591,81 $	500,00 $	2 091,81 $	62,75 $	2 154,56 $

On constate que le travail serait assez fastidieux si on faisait des versements mensuels pendant vingt ans pour constituer un capital de préretraite. Nous allons tenter d'améliorer la façon de calculer le capital constitué par de tels versements. Pour ce faire, il faut prendre un peu de recul et analyser le problème sans effectuer les calculs et en considérant chaque versement comme un capital distinct. Le premier versement de 500 $ est alors un capital placé pour 4 périodes à un taux périodique de 3 %. La valeur de ce versement à l'échéance est donc $500\ (1{,}03)^4$. Le deuxième versement est placé pendant 3 périodes à un taux de 3 %. Sa valeur à l'échéance est $500\ (1{,}03)^3$. De la même façon, la valeur à l'échéance du troisième versement est 500 $(1{,}03)^2$ et celle du dernier versement est 500 (1,03). Le capital accumulé est la somme des valeurs à l'échéance, soit

$$500(1{,}03) + 500(1{,}03)^2 + 500(1{,}03)^3 + 500(1{,}03)^4.$$

On peut vérifier, à l'aide de la calculatrice, que cette somme donne bien 2 154,56 $. La somme à effectuer pour trouver le capital constitué est une somme de termes qui forment ce que l'on appelle une **progression géométrique**.

Annuités

On appelle **annuités** les versements égaux que l'on fait à intervalle régulier pour constituer un capital ou rembourser un emprunt. Les versements permettant de constituer un capital sont appelées **annuités de début de période** et les versements permettant de rembourser un emprunt sont appelées **annuités de fin de période**.

Progressions géométriques

Annuités02

Pour trouver la valeur finale ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités, il faut effectuer la somme d'une progression géométrique, c'est pourquoi nous allons présenter un bref rappel de cette notion avant d'aborder l'étude des annuités. Nous allons donc présenter la définition de progression géométrique, voir comment décrire le terme général d'une progression géométrique et comment effectuer la somme des n premiers termes d'une progression géométrique.

Considérons la suite de nombres { 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96 ; ... }. On détecte facilement un comportement régulier dans cette suite. En effet, chaque nombre de la suite est obtenu du précédent en le multipliant par 2. La suite de nombres forme alors ce que l'on appelle une **progression géométrique croissante** dont la raison est 2.

On donne souvent les caractéristiques des termes en fonction de leur rang dans la suite. On indique ce rang à l'aide d'un indice comme dans l'exemple suivant :

$$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}.$$

On peut donner une description de la suite {3; 6 ;12 ;24 ;48 ;96; ... } en indiquant seulement que $a_1 = 3$ et $a_n = 2\,a_{n-1}$, ce qui signifie que le terme de rang n est obtenu en multipliant le terme de rang $n - 1$ par 2. Connaissant le premier terme, on peut alors trouver tous les autres en les multipliant successivement par 2. Dans une progression géométrique, la raison est le rapport d'un nombre quelconque de la suite sur le précédent.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

On remarque une parenté entre la progression géométrique et la modélisation exponentielle de données à pas constant présentée au chapitre précédent. De plus, la progression est finie car elle comporte un nombre fini de termes.

Progression géométrique

Une **progression géométrique** est une suite ordonnée de nombres telle que chaque nombre de la suite, sauf le premier, satisfait une règle de récurrence de la forme

$$a_n = a_{n-1}\, r,$$

où a_n est le terme de rang n, a_{n-1} est le terme de rang $n - 1$ et r est la raison constante. La progression est croissante lorsque $|r| > 1$ et décroissante lorsque $0 < |r| < 1$.

Ainsi la suite { 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; 243} forme une progression géométrique croissante dont la raison est 3. De plus, la progression est **finie** car elle comporte un nombre fini de termes.

Le terme général d'une progression géométrique peut s'exprimer par rapport au premier terme et à la raison comme l'indique le théorème suivant.

THÉORÈME

Terme général d'une progression géométrique

Le terme général d'une progression géométrique de raison r et de premier terme a_1 est donné par

$$a_n = a_1 r^{n-1}.$$

Démonstration

Exprimons chacun des termes par rapport au premier terme et à la raison en utilisant la formule de récurrence $a_n = a_{n-1}\, r$, on a alors

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 r\\
&a_3 = a_2 r = (a_1 r)r = a_1 r^2\\
&a_4 = a_3 r = (a_1 r^2)r = a_1 r^3\\
&\ldots\\
&a_n = a_{n-1}\, r = (a_1 r^{n-2})r = a_1 r^{n-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire la progression géométrique {3; 6; 12; 24; 48; 96} de la façon suivante:

$$\{\, 3 \times 2^0; 3 \times 2^1; 3 \times 2^2; 3 \times 2^3; 3 \times 2^4; 3 \times 2^5\}.$$

On constate que terme général nous permet de trouver un terme quelconque de la progression géométrique, il suffit de substituer le rang du terme à n dans la forme générale.

THÉORÈME

Somme d'une progression géométrique finie

La somme des n termes d'une progression géométrique finie est

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}.$$

Démonstration

La somme des n termes est

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

En exprimant chacun des termes par rapport au premier terme et par rapport à la raison, on a

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1},$$

en multipliant les deux membres de l'égalité par r, on obtient

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^{n-1} + a_1r^n,$$

en soustrayant ces deux égalités l'une de l'autre, on trouve

$$S_n - r\,S_n = a_1 - a_1r^n,$$

d'où $S_n\,(1-r) = a_1\,(1-r^n)$ et, si $r \neq 1$, on a $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$.

REMARQUE

Dans les problèmes de mathématiques financières, la raison est $r = 1 + i$. Le terme $(1 - r)$ est alors négatif et, en changeant le signe du numérateur et du dénominateur, on peut exprimer la somme de la façon suivante

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}.$$

PROCÉDURE

Somme d'une progression géométrique finie

1. On identifie le premier terme et la raison.
2. On substitue ces données dans l'expression donnant la somme des termes d'une progression géométrique finie, soit

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}.$$

Nous allons appliquer cette procédure dans les exercices et théorèmes qui suivent pour calculer la somme d'une suite de versements. Ainsi, la somme de la progression

$$\{3\,;3\times 2;\ 3\times 2^2;\ 3\times 2^3;\ 3\times 2^4;\ 3\times 2^5\}$$

est $$S_6 = \frac{3(2^6-1)}{2-1} = \frac{3(64-1)}{1} = 3\times 63 = 189.$$

Considérons à nouveau la progression de la mise en situation, soit

$$500(1{,}03) + 500(1{,}03)^2 + 500(1{,}03)^3 + 500(1{,}03)^4.$$

Le premier terme de la progression est 500(1,03), la raison est 1,03 et il y a quatre termes, la somme est donc

$$S_4 = \frac{500(1{,}03)\left[(1{,}03)^4-1\right]}{1{,}03-1} = \frac{500(1{,}03)\left[(1{,}03)^4-1\right]}{0{,}03} = 2\ 154{,}56\ \$.$$

REMARQUE

On constate, en analysant ce résultat et la façon dont on l'obtient, qu'il est peut-être possible de généraliser la démarche pour effectuer le travail plus efficacement. En effet, si on représente le montant de 500 \$ par A, le taux par i et le nombre de capitalisations par n, on a

$$S_n = \frac{A(1\quad i)[(1\quad i)^n-1]}{i}.$$

Il faut cependant se méfier car, comme le dit l'adage: « une fois n'est pas coutume». On ne peut garantir que cette formule est toujours valide sans l'avoir démontrée. Avant d'investir nos énergies dans la recherche d'une démonstration, nous allons vérifier, après avoir défini quelques termes, si on pourra faire la même constatation dans des situations analogues.

Notations

Avant d'aller plus loin, il nous faut une notation adaptée aux situations que nous allons rencontrer. Puisque nous allons parler de placements et de remboursements, notre notation doit permettre de distinguer la valeur actuelle et la valeur future ainsi que les annuités de début et les annuités de fin de période. Pour favoriser le transfert sur le logiciel Excel, les notations utilisées seront *VC* pour la valeur cumulée et *VA* pour la valeur actuelle. Les indices *d* et *f* seront utilisés pour indiquer s'il s'agit d'une annuité de début (*d*) ou de fin (*f*) de période. Nous noterons donc VA_d la **valeur actuelle** d'une suite de placements et VC_d la **valeur cumulée** à l'échéance. Notons, de plus, que la valeur cumulée est également appelée, selon les auteurs, **valeur définitive** ou **valeur future**.

EXEMPLE 8.1.1

Vous décidez de constituer un capital en déposant dès maintenant 800 $ à un taux de 7 % capitalisé annuellement et en faisant un dépôt similaire à la même date pour les trois prochaines années.

a) Quelle sera la valeur cumulée dans quatre ans ?

b) Quelle est la valeur actuelle de ce placement ?

Annuités03

Solution

a) Représentons par des points sur une droite chacun des débuts de période, soit le moment où les dépôts sont effectués. Pour le premier dépôt, il y aura quatre capitalisations, sa valeur cumulée sera donc $800(1{,}07)^4$. Pour le deuxième dépôt, il y aura trois capitalisations, sa valeur cumulée sera $800(1{,}07)^3$. Pour le troisième dépôt, il y aura deux capitalisations, sa valeur cumulée sera $800(1{,}07)^2$ et pour le dernier dépôt, il y aura une seule capitalisation, sa valeur cumulée sera 800(1,07).

		Première période	Deuxième période	Troisième période	Quatrième période
Premier dépôt	800	800(1,07)	$800(1{,}07)^2$	$800(1{,}07)^3$	$800(1{,}07)^4$
Deuxième dépôt		800	800(1,07)	$800(1{,}07)^2$	$800(1{,}07)^3$
Troisième dépôt			800	800(1,07)	$800(1{,}07)^2$
Quatrième dépôt				800	800(1,07)

Pour trouver la valeur cumulée, il faut faire la somme des valeurs futures de chacun des dépôts, soit

$$S_4 = 800(1{,}07) + 800(1{,}07)^2 + 800(1{,}07)^3 + 800(1{,}07)^4.$$

Cette dernière expression est une progression géométrique pour laquelle $a_1 = 800(1{,}07)$ et la raison est $r = 1{,}07$. La somme est donc

$$VC_d = 800(1{,}07)\frac{(1{,}07)^4 - 1}{0{,}07} = 3\ 800{,}59\$,$$

c'est la valeur cumulée de la suite de placements.

REMARQUE

On constate, en analysant ce résultat et la façon dont on l'obtient, qu'il est peut-être possible de généraliser la démarche pour effectuer le travail plus efficacement. En effet, si on représente le montant de 800 $ par *A*, le taux par *i* et le nombre de capitalisations par *n*, on a encore

$$VC_d = \frac{A(1\quad i)[(1\quad i)^n - 1]}{i}.$$

b) La valeur actuelle de cette suite de versements est le montant qu'il faudrait placer actuellement à 7 % capitalisé annuellement pour accumuler 3 800,59 $ dans quatre ans. La relation entre la valeur cumulée et la valeur actuelle d'un capital, établie au chapitre précédent, est $C = C_0 (1 + i)^n$. Dans le présent exemple, la valeur cumulée est VC_d. Le taux i est le taux annuel réel de 7 % et n représente le nombre de périodes, soit quatre années, on a donc

$$VC_d = VA_d (1 + i)^n.$$

Par substitution, on a alors $3\,800{,}59 = VA_d (1{,}07)^4$

En isolant VA_d, on a alors $VA_d = \dfrac{3\,800{,}59}{(1{,}07)^4} = 2\,899{,}45$ $.

Au taux de 7 % par année, il faut placer, actuellement, 2 899,45 $ pour avoir un capital accumulé de 3 800, 59 $ dans quatre ans.

THÉORÈME

Valeur cumulée de *n* annuités

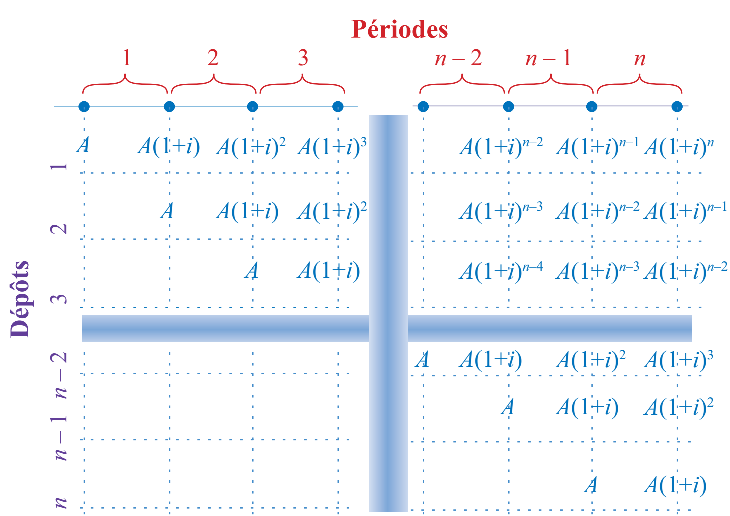
La valeur cumulée de n annuités de début de période placées à un taux périodique i est donnée par

$$VC_d = \frac{A(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i},$$

où VC_d est la valeur cumulée à l'échéance d'une annuité de début de période, A est le montant de l'annuité (versement périodique), i est le taux par période et n est le nombre de périodes.

Démonstration

En représentant sur une droite chacun des n débuts de période où on effectue un versement d'un montant A, la valeur future de chacune des annuités est alors celle apparaissant dans la colonne à l'extrême droite du graphique suivant :



La somme de ces valeurs cumulées est alors

$$VC_d = A(1+i) + A(1+i)^2 + ... + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^n$$

C'est la somme d'une progression géométrique dont le premier terme est $A(1+i)$ et la raison est $(1+i)$. On obtient donc

$$VC_d = \frac{A(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}, \text{ puisque } S_n = a_1\frac{(r^n - 1)}{r-1}.$$

On trouve donc que la valeur cumulée de n annuités de début de période placées à un taux périodique i est donnée par

$$VC_d = \frac{A(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}.$$

Nous avons maintenant démontré que la valeur cumulée est donnée par cette expression quelle que soit la valeur des paramètres A, i et n. On peut donc l'utiliser directement pour effectuer le calcul de la valeur cumulée.

PROCÉDURE

Calculer la valeur cumulée d'une annuité de début de période

1. On identifie le montant des versements, le nombre de périodes, le taux périodique.
2. On substitue ces données dans l'expression décrivant la somme des valeurs futures de ces versements.

$$VC_d = \frac{A(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}.$$

Annuités04

EXEMPLE 8.1.2

Vous désirez vous constituer un capital en déposant 50 $ par mois à un taux mensuel de 0,6 %. Quel sera le capital accumulé dans cinq ans ? Dans dix ans ? Dans quinze ans ?

Solution

On veut calculer la valeur cumulée d'une suite de versements $A = 50$ $ placés à un taux périodique $i = 0{,}006$ pour $n = 60$ périodes. En substituant ces valeurs dans

$$VC_d = \frac{A(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i},$$

on a

$$VC_d = \frac{50(1{,}006)[(1{,}006)^{60} - 1]}{0{,}006} = 3\ 619{,}83\ \$.$$

En dix ans, il y aura 120 périodes et le capital accumulé sera

$$VC_d = \frac{50(1{,}006)[(1{,}006)^{120} - 1]}{0{,}006} = 8\ 802{,}65\ \$.$$

En quinze ans, il y aura 180 périodes et le capital accumulé sera

$$VC_d = \frac{50(1,006)[(1,006)^{180} - 1]}{0,006} = 16\ 223,36\ \$$$

EXEMPLE 8.1.3

Quel montant trimestriel faut-il placer à un taux trimestriel de 2 % pour constituer un capital de 15 000 $ en dix ans ? Quel est le gain en intérêts ?

Solution

On cherche le montant de l'annuité sachant que la valeur définitive est de 15 000 $, le taux i est de 2 %. La durée est de dix ans, il y aura donc 40 trimestres et en substituant dans

$$VC_d = \frac{A(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i},$$

on trouve
$$15\ 000 = \frac{A(1,02)[(1,02)^{40} - 1]}{0,02},$$

et, en isolant A, on a $A = \dfrac{15\ 000 \times 0,02}{(1,02)[(1,02)^{40} - 1]} = 243,47\ \$.$

On détermine le gain en intérêts en soustrayant le montant placé par versements de la valeur cumulée. Le montant placé est

$$243,47 \times 40 = 9\ 738,80\ \$.$$

Le gain en intérêts est donc 15 000 – 9 738,80 = 5 261,20 $

Annuités de fin de période

Les annuités de fin de période sont celles servant à calculer les versements à effectuer pour rembourser un emprunt, car le versement se fait à la fin de la période. Ainsi, lorsqu'on emprunte et qu'on désire rembourser par des versements mensuels, le premier versement est effectué un mois après avoir obtenu cet emprunt. Nous représenterons la valeur actuelle d'une annuité de fin de période par VA_f et la valeur cumulée par VC_f.

Annuités05

Mise en situation

Vous voulez effectuer un emprunt de 2 000 $ pour trois ans et le taux d'intérêt est de 10 % capitalisé semestriellement. Pour l'institution financière, ce prêt constitue un placement qui doit rapporter selon le taux en vigueur. La valeur cumulée de ce montant dans trois ans (six semestres) sera

$$VC_f = 2\ 000(1,05)^6 = 2\ 680,19\ \$.$$

C'est le montant que vous devriez payer si le remboursement se faisait en un seul versement à la fin des trois années. Le coût de l'emprunt serait alors de 680,19 $ d'intérêts.

Le conseiller de l'institution financière vous recommande de rembourser par 6 versements semestriels de 394,03 $ au lieu d'un seul versement de 2 680,19 $. En personne prudente, vous voulez en savoir plus sur les avantages de ce mode de remboursement et, surtout, connaître le critère qui a permis de fixer le montant des versements semestriels.

Le conseiller vous explique que le remboursement par des versements semestriels de 394,03 $ permettra à chacune des parties liées au contrat d'y trouver son compte

- l'emprunteur, en effectuant des versements réguliers diminue, à chaque période, le montant initial de sa dette, ce qui diminue d'autant le montant d'intérêts à payer. Selon lui, pour une dette de 2 000 $ remboursée en six versements semestriels à un taux nominal (10 %,2) l'intérêt est de

$$6 \times 394{,}03 - 2\,000 = 364{,}18\ \$.$$

  alors qu'en remboursant en un seul versement à l'échéance, l'intérêt est de 680,19 $. Le mode de remboursement par versements périodiques est donc, selon lui, avantageux pour l'emprunteur.
- le prêteur, en récupérant à chaque période une partie du capital et l'intérêt versé par l'emprunteur, pourra prêter le montant des versements à quelqu'un d'autre et continuer à faire fructifier son capital. Selon lui, pour un prêt de 2 000 $, si on fixe le montant des versements à 394,03 $, la valeur cumulée par le placement des versements semestriels sera de 2 680,19 $, soit exactement le montant qu'il faudrait payer si le remboursement se faisait en un seul versement à la fin des trois ans. Il vous assure que c'est pour obtenir cette égalité de rendement que le prêteur fixe le montant à 394,03 $.

Pour vérifier les allégations du conseiller, vous décidez de construire le tableau d'amortissement de la dette et le tableau de la valeur cumulée par l'institution financière.

Taux nominal $j = (10\ \%,2)$
Nombre de périodes $n = 6$
Taux périodique $j/m = 5\ \%$ aux six mois

Montant des versements 394,03 $ aux six mois

AMORTISSEMENT DE VOTRE DETTE

Période	Dette, début de période	Intérêt à payer, période	Versement, annuités	Amortissement de la dette	Dette, fin de période
1	2 000,00 $	100,00 $	394,03 $	294,03 $	1 705,97 $
2	1 705,97 $	85,30 $	394,03 $	308,73 $	1 397,24 $
3	1 397,24 $	69,86 $	394,03 $	324,17 $	1 073,07 $
4	1 073,07 $	53,65 $	394,03 $	340,38 $	732,69 $
5	732,69 $	36,63 $	394,03 $	357,40 $	375,29 $
6	375,29 $	18,76 $	394,03 $	375,27 $	0,02 $
Total		**364,20 $**	**2 364,18 $**	**1 999,98 $**	

VALEUR CUMULÉE PAR L'INSTITUTION FINANCIÈRE

Période	Capital, début de période	Intérêt à recevoir, période	Capital accumulé, fin de période	Valeur cumulée Versements et intérêts
1	0,00 \$	0,00 \$	0,00 \$	394,03 \$
2	394,03 \$	19,70 \$	413,73 \$	807,76 \$
3	807,76 \$	40,39 \$	848,15 \$	1 242,18 \$
4	1 242,18 \$	62,11 \$	1 304,29 \$	1 698,32 \$
5	1 698,32 \$	84,92 \$	1 783,24 \$	2 177,27 \$
6	2 177,27 \$	108,86 \$	2 286,13 \$	2 680,16 \$
Total		**315,98 \$**		

Il y a une légère différence due aux arrondis, mais on constate que l'institution financière aura accumulé, à l'échéance, un capital de 2 680,16 \$. Cette valeur cumulée, représentée par VC_f, est bien donnée par

$$VC_f = 2000 \times 1{,}05^6 = 2\ 680{,}19\ \$.$$

Vous devrez débourser 2 364,18 \$ pour rembourser l'emprunt, mais l'institution place l'argent à mesure que vous remboursez et elle recevra ainsi un montant additionnel de 315,98 \$ en intérêts.

Nous allons maintenant établir le lien entre les différents paramètres de la situation, soit la valeur cumulée, le montant des annuités, le nombre de périodes et le taux périodique. Puisque le premier versement est effectué à la fin de la première période, le premier montant de 394,03 \$ sera placé pour cinq périodes (semestres) à un taux de 5 % par semestre. Le deuxième versement sera placé pour quatre périodes, ainsi de suite, on a donc

$$\begin{aligned} VC_f &= 394{,}03 \times 1{,}05^5 + 394{,}03 \times 1{,}05^4 + 394{,}03 \times 1{,}05^3 \\ &\quad + 394{,}03 \times 1{,}05^2 + 394{,}03 \times 1{,}05^1 + 394{,}03. \end{aligned}$$

Pour simplifier le traitement, considérons cette somme dans l'autre sens, en commençant par le plus petit terme de la somme. On a alors

$$\begin{aligned} VC_f &= 394{,}03 + 394{,}03 \times 1{,}05 + 394{,}03 \times 1{,}05^2 + 394{,}03 \times 1{,}05^3 \\ &\quad + 394{,}03 \times 1{,}05^4 + 394{,}03 \times 1{,}05^5. \end{aligned}$$

La valeur cumulée par l'institution prêteuse à l'échéance est la somme d'une progression géométrique dont le premier terme est 394,03 \$, la raison est 1,05 et le nombre de termes est 6, ce qui donne

$$VC_f = \frac{394{,}03[(1{,}05)^6 - 1]}{0{,}05} = 2\ 680{,}16\ \$.$$

En analysant ce résultat, on peut énoncer la conjecture suivante:

$$VC_f = \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i}.$$

EXEMPLE 8.1.4

Un de vos amis vient d'effectuer un emprunt qu'il doit rembourser par quatre versements annuels de 800 $ à un taux annuel de 7 %.

a) Quelle sera la valeur accumulée par l'institution prêteuse à l'échéance si elle place l'argent au même taux immédiatement après chaque paiement ?

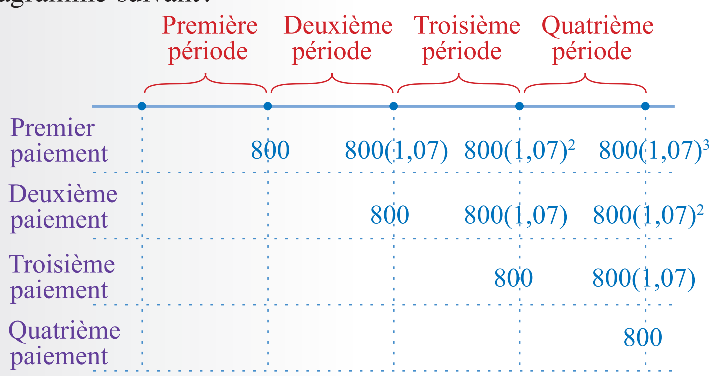
b) Quel est le montant de cet emprunt ?

c) Calculer le coût en intérêts de cet emprunt.

Solution

Annuités06

a) Représentons par VC_f la valeur cumulée de ces remboursements. La valeur cumulée par l'institution prêteuse sera alors décrite par le diagramme suivant :



L'institution prêteuse recevra le premier paiement à la fin de la première période et ce montant sera capitalisé trois fois. Le deuxième paiement sera effectué à la fin de la deuxième période et sera capitalisé deux fois, ainsi de suite. La valeur cumulée, ou remboursement total sera donc

$$VC_f = 800 + 800 \times 1{,}07 + 800 \times 1{,}07^2 + 800 \times 1{,}07^3.$$

En effectuant la somme de cette progression géométrique dont le premier terme est 800, la raison est 1,07 et le nombre de termes est 4, on a

$$VC_f = \frac{800[(1{,}07)^4 - 1]}{0{,}07} = 3\,551{,}95\ \$.$$

b) Pour trouver le montant de l'emprunt, on doit calculer la valeur actuelle qui représente la somme due actuellement, la relation entre la valeur actuelle et la valeur cumulée est

$$VC_f = VA_f\,(1 + i)^n.$$

La valeur actuelle est donc

$$VA_f = \frac{VC_f}{(1+i)^n} = \frac{3\,551{,}95\ \$}{(1{,}07)^4} = 2\ 709{,}77\ \$.$$

La valeur actuelle ou le montant de l'emprunt est 2 709,77 $. Cette somme sera remboursée par quatre versements de 800 $ soit 3 200 $ en tout.

c) La différence entre la somme versée et la valeur actuelle est le coût en intérêts, soit

$$4 \times 800\ \$ - 2\,709{,}77\ \$ = 490{,}23\ \$.$$

THÉORÈME

Valeur cumulée, fin de période

La valeur cumulée de n annuités de fin de période placées à un taux périodique i est donnée par

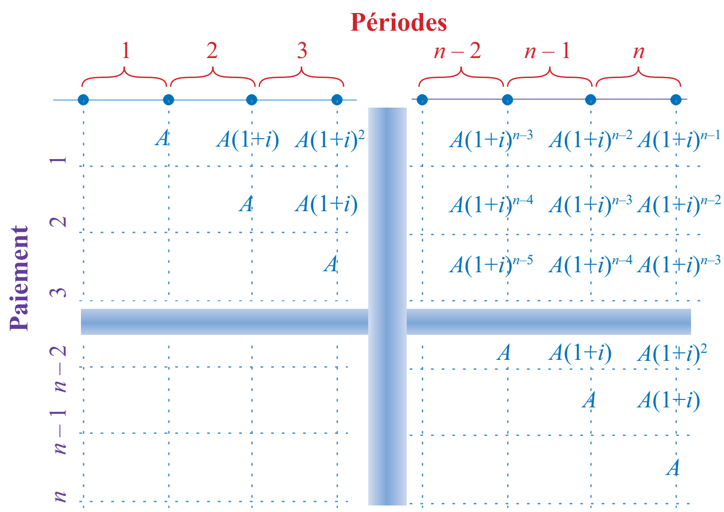
$$VC_f = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i},$$

où A est le montant de l'annuité et VC_f est la valeur cumulée.

Annuités07

Démonstration

Dans une annuité de fin de période, il y a une période de capitalisation de moins que dans celle de début de période, comme l'illustre la figure suivante.



On doit donc faire la somme de la progression géométrique suivante

$$VC_f = A + A(1 + i) + A(1 + i)^2 + ... + A(1 + i)^{n-2} + A(1 + i)^{n-1}.$$

La progression comporte n termes, le premier est A et la raison est $1 + i$;

$$VC_f = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}, \text{ puisque } S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}.$$

On remarque qu'il y a une capitalisation de moins, représentée par le facteur $(1 + i)$, dans la valeur cumulée de l'annuité de début de période qui est donnée par

$$VC_d = \frac{A(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}.$$

Lorsqu'on effectue un emprunt, on connaît la valeur actuelle et on désire calculer le montant des remboursements à effectuer en tenant compte du taux d'intérêt et de la durée de l'emprunt. On peut procéder en calculant d'abord la valeur cumulée par l'institution prêteuse en utilisant la relation

$$VC_f = VA_f\,(1+i)^n.$$

On peut alors calculer le montant des annuités en utilisant la relation

$$VC_f = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i(1+i)^n}.$$

RELATIONS

Annuités de début et de fin de période

1. Les annuités de début de période comportent une période de capitalisation de plus que les annuités de fin de période, on a donc $VC_d = VC_f + VC_f\,i = VC_f\,(1+i)$ ou encore $VC_f = VC_d\,(1+i)^{-1}$ et $VA_f = VA_d\,(1+i)^{-1}$.
2. La relation entre la valeur cumulée et la valeur actuelle est toujours valide, on a donc $VC_d = VA_d\,(1+i)^n$ de même, $VC_f = VA_f(1+i)^n$.
3. Le montant d'une annuité de début de période se calcule normalement à partir de la valeur future, car la valeur future représente le montant que l'investisseur veut accumuler.
4. Le montant d'une annuité de fin de période se calcule à partir de la valeur actuelle, car la valeur actuelle représente le montant emprunté ou la somme qui reste à rembourser si une partie des versements ont déjà été effectués.

Annuités08

REMARQUE

Dans cet exemple, la valeur future du montant de 12 000 $ est donnée par

$VC_f = VA_f\,(1+i)^n$, on obtient :

$VC_f = 12\,000(1{,}01)^{60} = 21\,800{,}36$ $.

Ce montant peut être interprété de différentes façons :

- c'est le montant qu'il faudrait remettre si le paiement de l'emprunt se faisait en un seul versement à la fin des cinq années;

EXEMPLE 8.1.5

Quel est le montant des versements mensuels qu'il faut effectuer pour rembourser un emprunt de 12 000 $ en cinq ans sachant que l'intérêt est de 12 % capitalisé mensuellement ? Quel est le coût en intérêts ?

Solution

La valeur actuelle est de 12 000 $. Les paiements seront mensuels et l'intérêt mensuel est de 1 %. La durée de l'emprunt est de cinq ans, il y aura donc 60 paiements à effectuer. La relation entre la valeur actuelle et la valeur cumulée est

$$VC_f = VA_f\,(1+i)^n$$

La relation entre les paramètres et la valeur actuelle est donc

$$VA_f = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i(1+i)^n}.$$

Ce qui donne $$12\ 000 = \frac{A[(1,01)^{60} - 1]}{0,01(1,01)^{60}},$$

d'où $$A = \frac{12\ 000 \times 0,01(1,01)^{60}}{[(1,01)^{60} - 1]} = 266,93\ \$.$$

Le paiement total sera de 266,93 \$ × 60 = 16 015,80 \$

Le coût en intérêts est donc 16 015,80 – 12 000 = 4 015,80 \$

- c'est le capital que détiendra l'institution prêteuse si, dès la réception d'un paiement, elle place le montant reçu au même taux. Ce capital inclut les annuités versées (remboursement et intérêt sur l'emprunt) et l'intérêt provenant du placement des annuités.

On constate que pour le consommateur, il est avantageux de rembourser son prêt par des versements réguliers car, l'intérêt se calcule seulement sur le montant qu'il reste à rembourser. Il paiera donc 16 015,80 \$ au lieu de 21 800,36 \$. Pour l'institution prêteuse, il n'y a pas de perte non plus car elle peut toujours prêter les sommes remboursées au même taux et obtenir la même croissance de capital.

EXEMPLE 8.1.6

Calculer la valeur cumulée et la valeur actuelle de douze remboursements annuels de 2 000 \$ à un taux d'intérêt annuel de 6 %. Dire ce que représentent ces deux valeurs et calculer le coût en intérêts.

Solution

La valeur cumulée est donnée par

$$VC_f = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} = \frac{2\ 000\left[(1,06)^{12} - 1\right]}{0,06} = 33\ 739,88\ \$.$$

La relation entre la valeur cumulée et la valeur actuelle est donnée par

$$VC_f = VA_f\,(1 + i)^n.$$

$$VA_f = \frac{VC_f}{(1+i)^n} = \frac{33\ 739,88\$}{(1,06)^{12}} = 16\ 767,69\$\ .$$

La valeur actuelle représente la somme due **actuellement**, elle est de 16 767,69 \$. Cette somme sera remboursée par douze versements de 2 000 \$ soit 24 000 \$, ce qui inclut la somme due et les intérêts. La valeur future représente le montant qu'il faudrait verser pour rembourser cette dette en un seul paiement dans douze ans, soit 33 739,88 \$. La différence entre la somme versée et la valeur actuelle est le coût en intérêts, soit

$$24\ 000\ \$ - 16\ 767,69\ \$ = 7\ 232,31\ \$.$$

EXEMPLE 8.1.7

Quel est le montant des versements mensuels qu'il faut effectuer pour rembourser un emprunt de 6 000 \$ en cinq ans sachant que l'intérêt est de 9 % capitalisé mensuellement ? Quel est le coût en intérêts ?

Solution

La valeur actuelle est de 6 000 \$, l'intérêt est de 9 % capitalisé mensuellement. On a donc un taux périodique de 0,75 %. La durée est de cinq ans, il y aura donc 60 versements à effectuer. La valeur cumulée par l'institution prêteuse sera

$VC_f = 6\,000(1{,}0075)^{60} = 9\,394{,}09$ \$

En substituant dans la formule de la valeur cumulée, soit

$$VC_f = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i},$$

on trouve

$$9\,394{,}09 = \frac{A\left[(1{,}0075)^{60} - 1\right]}{0{,}0075}.$$

et, en isolant A, on a $A = \dfrac{9\,394{,}09 \times 0{,}0075}{(1{,}0075)^{60} - 1} = 124{,}55$ \$.

Le paiement total sera de124,55 × 60 = 7 473 \$.

Le coût en intérêts est donc 7 473 \$ – 6 000 \$ = 1 473 \$.

PROCÉDURE

Problème d'annuités simples

1. Déterminer s'il s'agit d'une annuité de début de période (placement) ou de fin de période (remboursement).
2. Déterminer si on doit chercher la valeur actuelle VA, la valeur cumulée VC ou le montant A.
3. Trouver le taux périodique ($i = j/m$).
4. Calculer le nombre de périodes lorsque celui-ci n'est pas donné (nombre de versements annuels multiplié par le nombre d'années).
5. Substituer les données dans l'expression appropriée et effectuer les calculs.

Quelles formules mémoriser ? Une seule suffit ! La formule de la valeur cumulée de l'annuité de fin de période, soit

$$VC_f = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}.$$

Si cette formule est connue on peut trouver celle de la valeur cumulée de l'annuité de début de période. En effet, ce qui différencie les deux annuités, c'est que celle de début de période a une période de capitalisation de plus puisque la capitalisation se fait en début plutôt qu'en fin de période. Pour capitaliser une fois, on multiplie par (1 + i), on obtient donc VC_d en multipliant VC_f par (1 + i), ce qui donne

$$VC_d = \frac{A(1+i)\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}.$$

De plus, pour trouver la valeur actuelle de l'une ou l'autre, il suffit de diviser les expressions ci-haut par le facteur $(1 + i)^n$.

8.2 Exercices

Trouver les six premiers termes des progressions géométriques suivantes:

1. $a_1 = 8$ et $r = 1/2$

2. $a_1 = 1$ et $r = 2$

3. $a_1 = 42$ et $r = 1/3$

4. Trouver la somme des huit premiers termes de la progression géométrique définie par $a_1 = 8$ et $r = 1/2$.

5. Trouver la somme des six premiers termes de la progression géométrique définie par $a_1 = 1$ et $r = 2$.

6. Trouver la somme des six premiers termes de la progression géométrique pour laquelle $a_1 = 42$ et $a_2 = 14$.

7. Trouver la somme des douze premiers termes de la progression géométrique suivante:
$\{ 1; 1{,}07 ; 1{,}07^2 ; 1{,}07^3 ; ... \}$.

8. Vous décidez de constituer un capital en faisant quatre versements semestriels de 800 $ à un taux de 7 % capitalisé semestriellement. En complétant le tableau suivant, déterminer l'évolution du capital en tenant compte des versements effectués et de l'intérêt reçu.
Taux nominal $j =$
Nombre de périodes $n =$
Taux périodique $j/m =$
Montant des versements

n	VC_d	Versement (annuité)	Capital total, début de période	Intérêt pour la période	Valeur cumulée, fin de période
1					
2					
3					
4					

9. Vous devez rembourser un emprunt de 3 500 $ par des versements semestriels de 711,77 $ pendant trois ans. Le taux d'intérêt est de 12 % capitalisé semestriellement. Construire le tableau d'amortissement de la dette en complétant le tableau suivant. Déterminer l'évolution de l'emprunt en tenant compte des versements effectués et de l'intérêt payé.
Taux nominal $j =$
Nombre de périodes $n =$
Taux périodique $j/m =$
Montant des versements

n	Dette, début de période	Intérêt à payer	Versement (annuité)	Amortissement	Dette, fin de période
1					
2					
3					
4					
5					
6					

10. Trouver la valeur future et la valeur actuelle d'un placement constitué de huit versements annuels de 1 500 $ chacun sachant que le taux d'intérêt est de 8 % capitalisé annuellement. Expliquer ce que représente la valeur actuelle et la valeur définitive, comparativement au montant total placé par versements.

11. Vous devez préparer le contrat de deux clients empruntant chacun 2 000 $. L'un désire rembourser en deux ans et l'autre en quatre ans. Le taux pour les prêts personnels est de 12 % capitalisé mensuellement et vous devez déterminer les versements mensuels que chacun doit effectuer ainsi que le coût total du prêt.

12. Un client désire emprunter 6 000 $ à un taux de 8 % capitalisé mensuellement pour l'achat d'une automobile. Ce client désire connaître le montant des versements mensuels qu'il aura à effectuer ainsi que le coût du prêt selon que le remboursement se fait en trois, quatre ou cinq ans.

13. Quelle est la valeur du capital constitué par des versements mensuels de 100 $ pendant quinze ans à un taux de 7,5 % capitalisé mensuellement. Quel est le gain en intérêts ?

14. Vous placez 60 $ par mois à un taux nominal de 9 % capitalisé mensuellement. Combien aurez-vous accumulé dans dix ans ? Quel est le gain en intérêts ?

15. Vous versez 100 $ par mois pour rembourser une dette. Le taux est de 14,4 % capitalisé mensuellement. Déterminer la valeur actuelle de la dette s'il reste quatre ans pour la rembourser.

16. Vous achetez une automobile de 13 500 $ en versant 3 500 $ comptant et vous empruntez le reste à 12 % capitalisé mensuellement que vous devrez rembourser en cinq ans. Quels seront les versements mensuels ? Quel sera le coût de cet emprunt ?

17. Quels versements trimestriels devrez vous effectuer pour constituer un capital de 10 000 $ en dix ans, le taux étant de 8 % capitalisé trimestriellement ? Quel est le gain en intérêts ?

18. Vous désirez accumuler 5 000 $ au cours des trois prochaines années en prévision de l'achat d'une automobile. Sachant que le taux d'intérêt est de 7,2 % capitalisé mensuellement, quels devraient être les versements mensuels ? Quel est le gain en intérêts ?

19. Vous remboursez actuellement un emprunt par des versements mensuels de 80 $. Il vous reste dix ans pour rembourser et vous désirez augmenter le montant des remboursements de façon à vous acquitter de la dette en cinq ans. Quels seront les versements sachant que le taux est de 12 % capitalisé mensuellement ?

20. Vous remboursez actuellement un emprunt par des versements mensuels de 60 $. Il vous reste 28 versements à effectuer et vous désirez augmenter le montant de ces remboursements pour vous acquitter de la dette en un an. Quels seront les versements sachant que le taux est de 15 % capitalisé mensuellement ?

21. Vous placez 30 $ par semaine à un taux de 0,15 % capitalisé hebdomadairement. Dans combien de temps aurez-vous accumulé un montant de 10 000 $?

8.3 Annuités générales

Dans les exemples présentés jusqu'ici, le nombre de versements annuels coïncidait avec le nombre de capitalisations annuelles. Dans la pratique, ce n'est pas toujours le cas, le taux est nominal et le nombre de versements peut être différent du nombre de capitalisations. Par exemple, supposons que vous remboursez votre prêt-auto par des prélèvements automatiques aux deux semaines, le lendemain de la paye, et que la capitalisation est mensuelle. Le nombre de versements dans l'année diffère alors du nombre de capitalisations. Cependant, dès que vous avez effectué un versement, vous ne souhaitez pas continuer à payer de l'intérêt sur le montant versé. Pour traiter ce genre de situations, il faut, par l'équivalence de taux présentée au chapitre précédent, trouver le taux i applicable à la période de versements pour pouvoir ensuite résoudre le problème comme nous l'avons fait à la section précédente.

Calcul du taux périodique

Rappelons que des taux équivalents sont des taux qui donnent le même rendement sur une même période. En pratique, on considère une base annuelle pour calculer l'équivalence. Dans les annuités, lorsque les capitalisations ne coïncident pas avec les versements, il faut trouver le taux périodique qui donnera le même rendement annuel que le taux nominal. En particulier, pour les hypothèques, il y a deux capitalisations par année. Si les remboursements sont mensuels, il faut calculer le taux périodique i qui donnera le même rendement annuel.

Annuités11

EXEMPLE 8.3.1

On affiche un taux nominal de 9 % capitalisé semestriellement, trouver le taux périodique équivalent pour des versements mensuels.

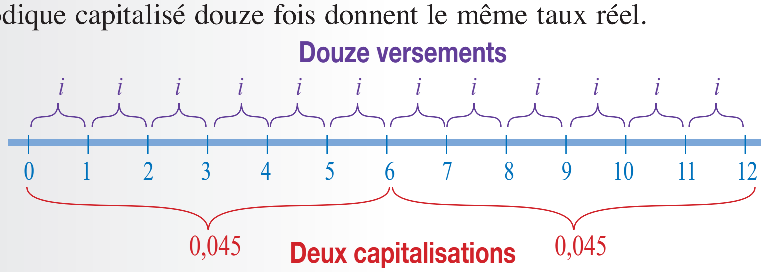
Solution

Il y a, annuellement, 2 capitalisations et 12 versements.

On a $j/m = 0{,}09/2 = 0{,}045$, on cherche le taux périodique i, tel que

$$(1 + i)^{12} = (1{,}045)^2.$$

En effet, il faut que le taux nominal, capitalisé deux fois et le taux périodique capitalisé douze fois donnent le même taux réel.



On a donc $(1 + i)^{12} = (1{,}045)^2$

En extrayant la racine douzième, on a $1 + i = (1{,}045)^{2/12}$

En simplifiant les exposants, on a $1 + i = (1{,}045)^{1/6}$

Ce qui donne $i = (1{,}045)^{1/6} - 1 = 0{,}007363 \ldots$

Le taux périodique est alors $i = 0{,}74$ %.

Rappelons que les taux, exprimés en pourcentage, ne comportent jamais plus de deux décimales. Cependant, lorsqu'on calcule un taux périodique, on obtient généralement plus de décimales. Dans les exemples et les exercices, on conservere au moins quatre chiffres significatifs pour le taux i. Cependant, dans certains cas, les sommes en jeu peuvent justifier l'utilisation d'un plus grand nombre de chiffres.

EXEMPLE 8.3.2

Annuités11

On affiche un taux nominal de 9% capitalisé mensuellement, trouver le taux périodique équivalent pour des versements trimestriels.

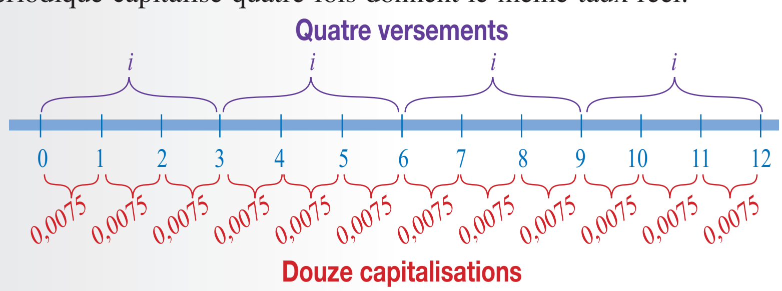
Solution

Il y a, annuellement, 12 capitalisations et 4 versements.

On a donc $j/m = 0{,}09/12 = 0{,}0075$ et on cherche le taux périodique i tel que

$$(1 + i)^4 = (1{,}0075)^{12},$$

En effet, il faut que le taux nominal, capitalisé douze fois et le taux périodique capitalisé quatre fois donnent le même taux réel.



On a donc $(1 + i)^4 = (1{,}0075)^{12}$

En extrayant la racine quatrième, on a $(1 + i) = (1{,}0075)^3$

Ce qui donne $i = (1{,}0075)^3 - 1 = 0{,}02267$

Le taux périodique est alors $i = 2{,}27$ %.

Après avoir déterminé le taux périodique et le nombre de périodes, on procède comme à la section précédente pour calculer la valeur actuelle ou la valeur future.

EXEMPLE 8.3.3

Un de vos clients dépose 1 000 $ par trimestre à un taux nominal de 12 % capitalisé mensuellement. Il vous demande de calculer:

a) le capital accumulé dans cinq ans.

b) le gain en intérêts.

Annuités12

Solution

a) On doit calculer la valeur future d'un placement, soit la valeur future d'une annuité de début de période. Annuellement, il y a 4 versements et 12 capitalisations. On a alors $j/m = 0{,}12/12 = 0{,}01$ et on cherche le taux périodique i tel que

$$(1 + i)^4 = (1{,}01)^{12}.$$

Ce qui donne $\quad i = (1{,}01)^3 - 1 = 0{,}030301.$

La valeur future d'une annuité de placement est donnée par

$$VC_d = \frac{A(1+i)[(1+i)^n - 1]}{i}$$

En cinq ans, il y aura 20 versements de 1 000 $ et le taux est 0,03030. En substituant, on a alors

$$VC_d = \frac{1\,000(1{,}030\ 30)[(1{,}030\ 30)^{20} - 1]}{0{,}030\ 30} = 27\ 769{,}18\ \$.$$

b) Puisqu'il y a vingt versements de 1 000 $, le montant placé est de 20 000 $ et le gain en intérêts est de

$$27\ 769{,}18\ \$ - 20\ 000\ \$ = 7\ 769{,}18\ \$.$$

EXEMPLE 8.3.4

Un de vos clients rembourse un emprunt par des versements mensuels de 120 $ et il reste deux ans à cet emprunt. Le taux nominal est de 9 % capitalisé trimestriellement.

a) Calculer la valeur future et la valeur actuelle.

b) Calculer le paiement total et le coût en intérêts jusqu'à l'échéance.

Annuités13

Solution

a) Annuellement, il y a 12 versements et 4 capitalisations. On a alors $j/m = 0{,}09/4 = 0{,}0225$ et on cherche le taux périodique i tel que

$$(1 + i)^{12} = (1{,}0225)^4.$$

Ce qui donne $\quad i = (1{,}0225)^{1/3} - 1 = 0{,}0074\ 444$

La valeur future est alors donnée par

$$VC_f = \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i}.$$

Puisqu'il reste deux ans à l'emprunt, il y a encore $n = 24$ versements à effectuer et le taux périodique est 0,007444. La valeur future est donc

$$VC_f = \frac{120[(1{,}007\ 444)^{24} - 1]}{0{,}007\ 444} = 3\ 140{,}55\ \$.$$

La relation entre la valeur future et la valeur actuelle est donnée par

$$VC_f = VA_f(1{,}007444)^{24}.$$

La valeur actuelle est donc

$$VA_f = \frac{VC_f}{(1{,}007\ 444)^{24}} = \frac{3\ 140{,}55}{(1{,}007\ 444)^{24}} = 2\ 628{,}47\ \$.$$

b) Le paiement total est 24 × 120 = 2 880 $, le coût en intérêts jusqu'à l'échéance sera donc

$$2\ 880\ \$ - 2\ 628{,}47\ \$ = 251{,}53\ \$.$$

EXEMPLE 8.3.5

Annuités14

Un de vos clients rembourse un emprunt par des mensualités de 100 $ à un taux de 14 % capitalisé semestriellement. Il reste 5 ans à cet emprunt et il vous demande combien il devrait verser pour rembourser sa dette en un seul versement dès maintenant.

a) Calculer ce montant.

b) Votre client demande combien il économisera en intérêts s'il rembourse en un versement dès maintenant. Quelle est cette économie ?

Solution

a) Pour connaître le montant qu'il reste à rembourser, il faut calculer la valeur actuelle. Annuellement, il y a 12 versements et 2 capitalisations. On a alors $j/m = 0{,}14/2 = 0{,}07$ et on cherche le taux périodique i tel que

$$(1 + i)^{12} = (1{,}07)^2.$$

Ce qui donne

$$i = (1{,}07)^{1/6} - 1 = 0{,}01134.$$

La valeur future est alors donnée par

$$VC_f = \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i}.$$

Puisqu'il reste cinq ans à l'emprunt, il y a encore $n = 60$ versements à effectuer et le taux périodique est 0,01134, on a donc

$$VC_f = \frac{100[(1{,}011\ 34)^{60} - 1]}{0{,}011\ 34} = 8\ 528{,}40\ \$.$$

La relation entre la valeur future et la valeur actuelle est donnée par

$$VC_f = VA_f(1{,}01134)^{60}.$$

La valeur actuelle est donc

$$VA_f = \frac{VC_f}{(1{,}011\ 34)^{60}} = \frac{8\ 528{,}40}{(1{,}011\ 34)^{60}} = 4\ 335{,}47\ \$.$$

Le client doit donc verser 4 335,47 $ pour rembourser en un seul versement dès maintenant.

b) Si le client continue ses versements, il va verser 60 × 100 = 6 000 $ en cinq ans. L'économie est alors de

$$6\ 000\ \$ - 4\ 335{,}47\ \$ = 1\ 664{,}53\ \$.$$

PROCÉDURE

Résolution d'un problème d'annuités générales

1. Déterminer s'il s'agit d'une annuité de début de période (placement) ou de fin de période (remboursement).
2. Déterminer si on doit chercher la valeur actuelle VA, la valeur cumulée VC, ou le montant A.
3. Trouver le taux périodique équivalent $(1 + i)^k = (1 + j/m)^m$ où k est le nombre de versements annuels et m est le nombre de capitalisations annuelles.
4. Calculer le nombre de périodes lorsque celui-ci n'est pas donné (nombre de versements annuels multiplié par le nombre d'années).
5. Substituer les données dans l'expression appropriée et effectuer les calculs.

Un peu *d'histoire*

DÉVELOPPEMENTS ET LOGARITHMES

En développant les logarithmes, Napier a fait beaucoup plus que développer des méthodes facilitant les calculs. Il a permis la découverte d'une nouvelle fonction et ouvert la voie à de nouvelles techniques de modélisation.

En 1647, Grégoire de Saint-Vincent (1584-1687) travaille sur la quadrature de l'hyperbole[1] et met en évidence une nouvelle fonction (NH St-Vincent). En 1661, Christiaan Huygens (1629-1695) remarque que cette fonction se trouve être une fonction logarithme particulière : le logarithme naturel. La notion de fonction et la correspondance entre les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes apparaissent après le travail de Leibniz sur la notion de fonction, en 1697.

Le mathématicien anglais d'origine galloise Edmund Gunter (1581-1626) développe l'échelle logarithmique (NH ÉchelleLog) et l'utilise dans une première version de règle à calcul. Jumelée à la régression linéaire, l'échelle logarithmique constitue un outil de modélisation important du lien entre deux variables (NH Log-Modélisation).

C'est en utilisant une représentation de mesures à l'aide d'une échelle logarithmique qu'Henrietta Leavitt (NH Leavitt) a pu déterminer la relation entre la luminosité et la période des céphéïdes et que Vilfredo Pareto a établi la relation entre le revenu familial et le nombre de familles ayant ce revenu (NH Pareto) . En fait, on retrouve les exponentielles et les logarithmes dans plusieurs domaines, la croissance des capitaux en gestion, la croissance des populations en biologie et la radioactivité en physique. On les retrouve également en chimie, notamment dans les équations d'Arrhenius (NH Arrhenius).

La découverte de la radioactivité et la description de la quantité de matière radioactive en fonction du temps par une fonction exponentielle a mis à la disposition des savants un moyen de datation très efficace. La fonction inverse, qui est une fonction logarithmique, permet de calculer le temps écoulé depuis le début de la désintégration de la matière radioactive. Cette découverte a facilité les démarches de datation en archéologie et en sciences de la nature (NH Log-Datation01-02).

Notes et vidéos historiques disponibles gratuitement à :

http://www.lozedion.com/complements-dinfo/

1. La quadrature d'une surface est la recherche d'un carré ayant même aire que la surface en question. La quadrature de l'hyperbole porte sur l'aire entre la courbe et l'axe horizontal.

8.4 Exercices

1. On affiche un taux nominal de 6 % capitalisé mensuellement, trouver le taux périodique équivalent pour des versements mensuels.

2. On affiche un taux nominal de 9 % capitalisé semestriellement, trouver le taux périodique équivalent pour des versements bimensuels.

3. On affiche un taux nominal de 12 % capitalisé trimestriellement, trouver le taux périodique équivalent pour des versements bimensuels.

4. On affiche un taux nominal de 9 % capitalisé mensuellement, trouver le taux périodique équivalent pour des versements trimestriels.

5. On affiche un taux nominal de 9 % capitalisé semestriellement, trouver le taux périodique équivalent pour des versements trimestriels.

6. On affiche un taux nominal de 9 % capitalisé six fois par année, trouver le taux périodique équivalent pour des versements trimestriels.

7. Vous empruntez 6 000 $ au taux de 12 % capitalisé trimestriellement. Quelles sont les mensualités à verser pour acquitter cette dette en trois ans ? Quel sera le coût en intérêts ?

8. Quelle est la valeur actuelle et la valeur définitive d'une suite de remboursements de 75 $ par mois au taux nominal de 9 % capitalisé semestriellement sachant que la durée du contrat est de trois ans ?

9. Vous placez 100 $ par mois à un taux de 7,5 % capitalisé trimestriellement pour constituer un capital pour votre retraite dans 25 ans. Quel sera le montant accumulé et le gain en intérêts ?

10. Il vous reste 38 versements à effectuer pour rembourser un emprunt. Les versements sont de 50 $ par semaine à un taux de 15 % capitalisé mensuellement. Quelle est la valeur actuelle de cette dette ?

11. Vous remboursez actuellement un emprunt par des mensualités de 125 $. Cet emprunt est à un taux de 15 % capitalisé trimestriellement et il vous reste vingt versements à effectuer. Le taux d'intérêt ayant baissé depuis que vous avez négocié cet emprunt, vous désirez le renouveler au taux actuel de 9 %.
   a) Quelles seraient les mensualités si vous gardiez le même nombre de versements ?
   b) Si vous désirez accélérer le remboursement pour vous acquitter de la dette en douze mois, quelles seront les mensualités ?

12. Vous effectuez un emprunt de 40 000 $ pour vingt ans afin d'acheter une nouvelle machine pour votre usine. Le taux est de 9 % capitalisé trimestriellement.
   a) Quelles seront les mensualités ?
   b) Quelle sera la valeur actuelle après un an ?
   c) Quel aura été le montant de l'amortissement ?
   d) Lors du renouvellement de votre emprunt après un an, le taux est de 15 %. Quels seront les versements mensuels que vous devrez effectuer au cours de la deuxième année ?

13. Un de vos clients désire donner 5 000 $ à chacun de ses trois enfants lorsqu'ils atteindront leur majorité. Pour ce faire, il veut déposer mensuellement un montant au nom de chacun de ses enfants. Sachant que le taux d'intérêt est de 7,5 % capitalisé mensuellement et que les enfants sont âgés de deux, cinq et neuf ans, quelle somme mensuelle doit être versée au nom de chacun des enfants ?

14. Quelle est la valeur actuelle d'une dette remboursable en trois ans par des mensualités de 150 $ à un taux nominal de 14 % capitalisé semestriellement ?

15. Quel capital peut-on constituer en dix ans par des versements mensuels de 200 $ à un taux de 9 % capitalisé trimestriellement ? Quel est le gain en intérêts ?

16. Quels sont les versements mensuels permettant de rembourser un emprunt de 5 000 $ en trois ans, le taux étant de 14 % capitalisé semestriellement ? Quel est le coût en intérêts ?

17. Quels placements trimestriels vous permettront d'accumuler 12 000 $ en huit ans sachant que le taux nominal est 9 % capitalisé semestriellement ?

18. La compagnie qui vous emploie rembourse actuellement un emprunt par des versements de 3 500 $ à tous les deux mois. On vous demande d'établir le montant qu'il faudrait verser pour liquider cette dette. Le taux d'intérêt est de 13 % capitalisé trimestriellement et il reste vingt-deux versements à effectuer.

19. À l'achat de votre maison vous prenez une hypothèque de 50 000 $ à un taux de 9 % capitalisé semestriellement.
    a) Votre hypothèque étant de vingt ans, trouver les versements mensuels que vous allez effectuer.
    b) Quel est le montant de l'amortissement après un an ?
    c) Quel sera le montant versé en intérêts durant cette année ?
    d) Si le taux demeure constant, quel est le montant total que vous verserez pour payer cette hypothèque ?
    e) Si le taux d'intérêt grimpe à 16 % après la première année, quels seront les versements que vous devrez effectuer au cours de la deuxième année ?
    f) Quel est le montant de l'amortissement durant la deuxième année ?
    g) Quel est le montant consacré au paiement des intérêts au cours de la deuxième année ?
    h) Si le taux demeure constant à 16 % pour les dix-neuf dernières années, quel est le montant total que vous aurez dû verser pour acquitter votre hypothèque ?

20. Votre compagnie fait un emprunt qui devra être remboursé par des versements semestriels de 2 000 $ pendant huit ans. Sachant que le taux d'intérêt est de 11 % capitalisé trimestriellement, déterminer le solde de la dette après le dixième versement.

21. Vous désirez prendre une hypothèque de 50 000 $ et vous hésitez entre un remboursement sur 15 ans, 20 ans ou 25 ans. Le taux étant de 12 % capitalisé semestriellement, trouver:
    a) les mensualités dans chaque cas;
    b) le paiement total dans chaque cas;
    c) le coût en intérêts dans chaque cas.

22. Quels versements annuels permettent de rembourser en quatre ans un emprunt de 5 000 $ à un taux annuel de 13 % ? Quel est le coût en intérêts ?

23. Quelle est la valeur actuelle d'un emprunt remboursable en trois ans par des versements mensuels de 175 $ à un taux de 9 % capitalisé mensuellement ?

24. Quel montant pouvez-vous accumuler en cinq ans par des versements de 100 $ par mois à un taux de 9 % capitalisé mensuellement ? Quel est le gain en intérêts ?

25. Quels versements mensuels permettent d'accumuler 8 000 $ en cinq ans à un taux de 7,5 % capitalisé mensuellement ?

26. Quelle est la valeur actuelle d'un emprunt dont le remboursement se fera par des versements de 102 $ par mois pendant quatre ans, sachant que le taux est de 8,4 % capitalisé trimestriellement?

27. Quelle est la valeur définitive de placements trimestriels de 400 $ à un taux de 10,5 % capitalisé semestriellement pendant cinq ans ?

28. Quelle est la valeur définitive de placements semestriels de 2 000 $ à un taux de 7,6 % capitalisé mensuellement pendant huit ans ?

29. Vous remboursez un emprunt par des versements mensuels de 75 $ à un taux de 6 % capitalisé semestriellement. Quel versement permettrait d'acquitter la dette sachant qu'il reste 21 versements à effectuer ?

30. Trouver le taux effectif correspondant à un taux nominal de 8,4% si la capitalisation est:
a) annuelle;
b) semestrielle;
c) trimestrielle;
d) mensuelle;
e) bimensuelle;
f) hebdomadaire.

31. Vous remboursez actuellement une dette par des versements de 60 $ par mois au taux mensuel de 1,3 %. Il vous reste 16 versements à effectuer et vous désirez vous acquitter de cette dette en un seul versement. Quel sera ce versement ?

32. Vous empruntez 3 000 $ au taux de 0,8 % par mois. Pour ne pas déséquilibrer votre budget, vous désirez rembourser par des versements de 50 $ par mois. Combien de versements devrez-vous effectuer ?

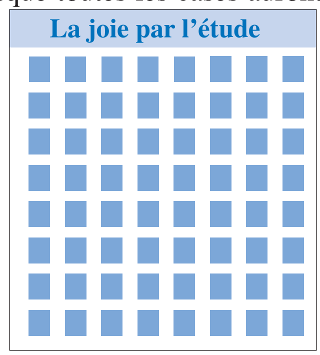
33. Vous désirez accumuler 20 000 $ pour effectuer un premier versement pour l'achat d'une maison. Pour ce faire, vous placez 150 $ par mois au taux mensuel de 1 %. Combien de versements seront nécessaires pour atteindre votre objectif ?

34. Excédé par la hausse des prix, un fumeur décide d'arrêter de fumer et de placer l'argent économisé pour accumuler un fonds de retraite. En considérant qu'il arrête de fumer à 40 ans alors qu'il fume un paquet par jour au prix de 11 $ et que le prix du paquet reste le même, déterminer le montant qu'il aura accumulé à 65 ans en plaçant les 330 $ d'économies mensuelles à un taux mensuel de 0,9 %.

35. Quel montant peut-on accumuler en plaçant 500 $ à chaque trimestre pendant six ans à un taux trimestriel de 2,5 % ? Quel est le gain en intérêts ?

36. Vous désirez échelonner le remboursement d'un emprunt de 5 000 $ sur quatre ans à un taux mensuel de 0,7 %. Quelles sont les mensualités que vous devrez verser ? Quel sera le coût en intérêts ?

37. Lors d'une visite dans un centre d'achats vous êtes abordé par un individu qui prétend être un ancien prisonnier et demande votre aide pour financer ses études. Il vous suffit de gratter une ou des cases du carton qu'il vous présente. Dans chaque case est indiqué un montant d'argent et vous devez lui remettre le montant ou les montants indiqués. Vous vous informez de la valeur des montants indiqués et il vous explique que tous les montants sont différents, que ce sont des multiples de 0,05 $ et que la carte comporte les 64 premiers multiples de ce montant. À l'aide des renseignements donnés, déterminer le montant total que lui rapportera la carte lorsque toutes les cases auront été grattées.



38. Votre caisse vous fait parvenir le relevé suivant:

RELEVÉ DE COMPTE

LA CAISSE MUTUELLE DES POTAGERS

	Page 1
G.D.Pinsons 450 des Faucons Québec	Folio 32154
	Fin de période 31 mar. 91

Service Date	Débit	Crédit	Solde	
Prêt 1			6 534,82	
4 MAR	21,66	220,34	6 314,48	
11 MAR	21,22	220,78	6 093,70	
18 MAR	20,78	221,22	5 872,48	
25 MAR	20,34	221,66	5 650,82	

Aviser votre caisse de tout changement d'adresse
Veuillez vérifier ce relevé sans tarder
et aviser votre caisse de toute erreur ou omission

Vos versements sont de 242 $ par semaine et vous constatez que la partie consacrée au paiement des intérêts forme une progression arithmétique décroissante alors que la partie servant au remboursement de la dette forme une progression arithmétique croissante.

a) Déterminer la somme des remboursements de capital pour les treize prochains versements.
b) Combien de versements vous reste-t-il à effectuer pour acquitter votre dette ?
c) Quel sera le montant du dernier remboursement de capital ?