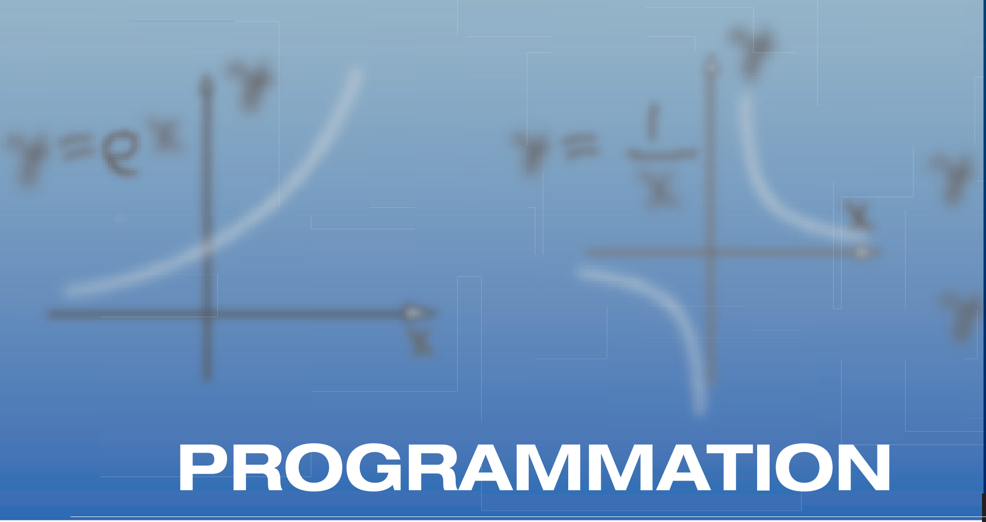


CHAPITRE 12

PROGRAMMATION LINÉAIRE

Résoudre des problèmes d'optimisation à l'aide d'un système d'inéquations linéaires

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la description d'un ensemble de contraintes par un système d'inéquations linéaires;
- l'interprétation de la solution d'un système d'inéquations linéaires selon le contexte.
- la représentation d'un problème de transport par un tableau ;
- la détermination d'une solution initiale d'un problème de transport ;
- la résolution d'un problème de transport par la méthode des pierres de gué (stepping-stone).

12.1 Représenter graphiquement et résoudre un système d'inéquations linéaires à deux variables.

12.2 Déterminer l'ensemble des solutions applicables d'un problème de programmation linéaire.

12.3 Déterminer la solution optimale d'une fonction soumise à des contraintes linéaires.

12.4 Utiliser des algorithmes pour déterminer une solution initiale et une solution optimale d'un problème de transport.

12.1 Notions fondamentales

Mise en situation

ProgLin01

La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a trop de temps libre dans chacun des départements. Pour remédier à cette situation, elle décide de fabriquer deux nouveaux modèles de bureau, soit M_1 et M_2.

Les temps de fabrication de chacun de ces modèles, dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés ci-contre sous forme de tableau.

Atelier	Modèle		Temps libre
	M_1	M_2	
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

Identification des variables et des contraintes

Soit x, le nombre de bureaux du modèle M_1, et y, le nombre de bureaux du modèle M_2. Le temps libre dans chaque atelier impose des contraintes dont il faut tenir compte. La contrainte imposée par le temps libre à l'atelier de sciage est :

$$x + 2y \leq 20;$$

à l'atelier d'assemblage, la contrainte est

$$2x + y \leq 22;$$

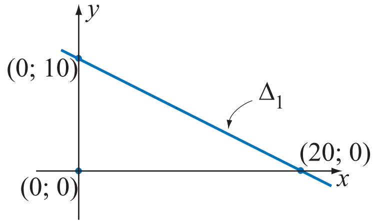
à l'atelier de sablage, la contrainte est

$$x + y \leq 12.$$

Il existe de plus des contraintes de non-négativité puisque le nombre de bureaux ne peut être négatif; ce sont

$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0.$$

Représentation graphique des droites frontières

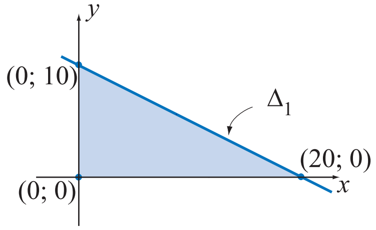


Pour représenter graphiquement la contrainte à l'atelier de sciage, on considère la droite frontière décrivant le cas où toutes les heures disponibles à l'atelier de sciage sont utilisées dans la solution. Cette situation se traduit par l'équation

$$x + 2y = 20.$$

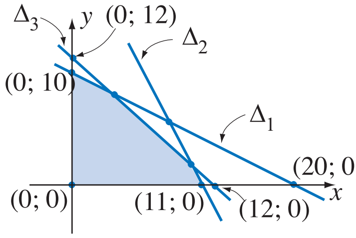
On détermine d'abord les points d'intersections de cette droite notée Δ_1 avec les axes : si $x = 0$, alors $y = 10$, de sorte que la droite coupe l'axe des y au point (0; 10); si $y = 0$, alors $x = 20$, ce qui signifie que la droite coupe l'axe des x au point (20; 0). La droite Δ_1 est appelée **droite frontière** de l'ensemble solution de l'inéquation :

$$x + 2y \leq 20.$$



Les points situés de l'un des côtés de la droite Δ_1 sont également des solutions de l'inéquation. Pour déterminer de quel côté se situent les solutions, il suffit de prendre un point quelconque d'un côté de la droite et de vérifier par substitution s'il fait partie de l'ensemble solution. Si on remplace x et y par 0, dans l'inéquation $x + 2y \leq 20$, on obtient $0 \leq 20$, ce qui est une inégalité vraie. Le point (0; 0) fait donc partie de l'ensemble solution et il en est de même de tous les points situés du même côté de la droite que l'origine. Compte tenu des contraintes de non-négativité, il faut cependant que $x \geq$

0 et que $y \geq 0$. L'ensemble des solutions satisfaisant à ces contraintes est représentée ci-contre par la partie ombrée du graphique.

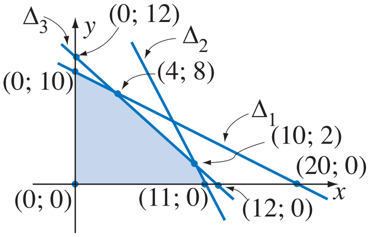


En procédant de façon analogue, on obtient respectivement les droites frontières Δ_2 et Δ_3 pour les ateliers d'assemblage et de sablage :

$$\Delta_2 : 2x + y = 22$$

$$\Delta_3 : x + y = 12$$

Les **solutions admissibles** sont représentées ci-contre par les points du **polygone convexe**.



En représentant les droites frontières, on obtient les sommets suivants du polygone convexe : (0; 0), (11; 0) et (0; 10). Pour compléter la représentation graphique, on doit déterminer les autres sommets qui sont les points d'intersection des droites frontières. En résolvant le système d'équations

$$\begin{array}{l} \Delta_1 \\ \Delta_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} x+2y=20 \\ x+y=12 \end{array} \right.$$

On obtient $x = 4$ et $y = 8$. Par conséquent, (4; 8) est le point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_3. En procédant de façon analogue, on obtient le point d'intersection de Δ_2 et Δ_3, soit (10; 2). On ne se soucie pas du point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_2, car ce n'est pas un sommet du polygone des solutions admissibles.

Évaluation de la fonction économique

Le profit réalisé est de 300 \$ pour un exemplaire du modèle M_1 et de 200 \$ pour un exemplaire du modèle M_2. La direction veut maximiser son profit, c'est-à-dire maximiser la fonction

$$z = P(x; y) = 300x + 200y$$

appelée **fonction économique**.

REMARQUE

Pour choisir une solution dans l'ensemble solution (ou le polygone convexe) des équations tirées des contraintes, il faut des critères. Pour ce faire, on associe des informations aux solutions. Par exemple, le temps nécessaire pour réaliser telle solution, le coût, le profit ou le nombre d'heures-techniciens. Autrement dit, on définit une **fonction économique**,

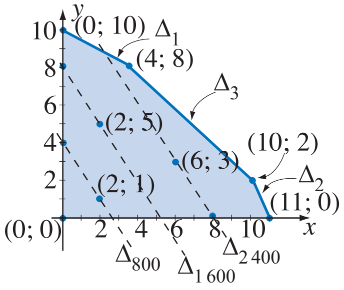
Pour chacun des points du polygone convexe, la compagnie réalisera un profit. Pour illustrer, calculons ce profit pour quelques-uns des points du polygone convexe. Par exemple, si la compagnie fabrique deux exemplaires du modèle M_1 et un exemplaire du modèle M_2, elle réalise un profit

$$z = P(2; 1) = (300 \times 2) + (200 \times 1) = 800 \text{ \$}.$$

Il est clair que la compagnie ferait le même profit en ne fabriquant aucun exemplaire du premier modèle et quatre exemplaires du second modèle. Le tableau suivant donne le profit réalisé pour quelques points appartenant à l'ensemble des solutions admissibles.

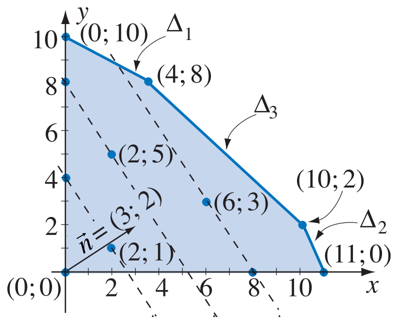
FONCTION ÉCONOMIQUE

(x; y)	Profit	Ensemble de points donnant le même profit
(2; 1)	800 \$	Tout point de la droite passant par (2; 1) et (0; 4); on note cette droite Δ_{800} : $300\,x + 200y = 800$.
(2; 5)	1 600 \$	Tout point de la droite passant par (2; 5) et (0; 8); on note cette droite Δ_{1600} : $300\,x + 200y = 1\,600$.
(6; 3)	2 400\$	Tout point de la droite passant par (6; 3) et (8; 0); on note cette droite Δ_{2400} : $300\,x + 200y = 2\,400$.



Il ne saurait être question de calculer le profit pour chacun des points du polygone convexe, mais on peut tirer les informations suivantes des valeurs calculées :

- $P(x; y) = 300x + 200y$ est un ensemble de droites parallèles ayant toutes comme vecteur normal $\vec{n} = (3; 2)$;
- plus une droite est éloignée de l'origine, plus le profit est grand;
- la solution optimale est un sommet du polygone convexe ou le segment de droite joignant deux sommets adjacents.



Il suffit donc d'évaluer la fonction économique en chacun des sommets du polygone convexe. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant.

Sommet	(0; 0)	(0; 10)	(4; 8)	(10; 2)	(11; 0)
Profit ($)	0	2 000	2 800	3 400	3 300

Pour maximiser le profit, il faut donc fabriquer dix bureaux du modèle M_1 et deux bureaux du modèle M_2. Le profit est alors de 3 400$.

On peut aussi déterminer le temps libre affecté à la production des bureaux. La matrice du temps de production est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et en la multipliant par le vecteur production, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}, \text{soit} \left\{\begin{array}{l} \text{14 h à l'atelier de sciage,} \\ \text{22 h à l'atelier d'assemblage,} \\ \text{12 h à l'atelier de sablage.} \end{array}\right.$$

Le temps libre après le début de la production des bureaux est donné par

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{soit} \left\{\begin{array}{l} \text{6 h à l'atelier de sciage,} \\ \text{0 h à l'atelier d'assemblage,} \\ \text{0 h à l'atelier de sablage.} \end{array}\right.$$

Il n'y a plus de temps libre dans les ateliers d'assemblage et de sablage, mais il reste 6 h de temps libre à l'atelier de sciage.

Discussion des solutions

ProgLin02

La solution du problème dépend des contraintes (le polygone des solutions admissibles) mais également de la fonction décrivant le profit. Si le profit est de 200 $ pour le modèle M_1 et de 300 $ pour le modèle M_2, alors le profit total est :

$$z = P_2(x; y) = 200x + 300y\ .$$

Dans ce cas, le vecteur normal de l'ensemble des droites parallèles est $\vec{n} = (2; 3)$ et la droite la plus éloignée de l'origine est celle qui passe par le sommet (4; 8). Comme le confirme les données du tableau suivant :

Sommet	(0; 0)	(0; 10)	(4; 8)	(10; 2)	(11; 0)
$P_2(x; y)$ ($)	0	3 000	3 200	2 600	2 200

Dans ce cas, le temps récupéré est donné par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}, \text{soit } \left\{\begin{array}{l} \text{20 h à l'atelier de sciage,} \\ \text{16 h à l'atelier d'assemblage,} \\ \text{12 h à l'atelier de sablage.} \end{array}\right.$$

Le temps libre résiduel est donc la différence

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{soit } \left\{\begin{array}{l} \text{0 h à l'atelier de sciage,} \\ \text{6 h à l'atelier d'assemblage,} \\ \text{0 h à l'atelier de sablage.} \end{array}\right.$$

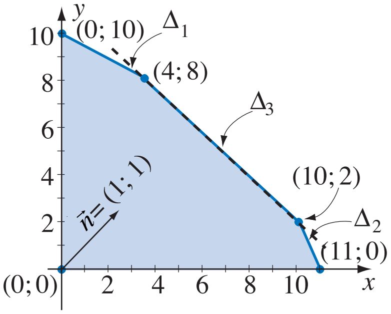
La solution d'un problème de programmation linéaire n'est pas toujours unique. Ainsi, si le profit est le même pour chaque modèle, soit 300 $, le profit total est :

$$z = P_3(x; y) = 300x + 300y.$$

Dans ce cas, le vecteur normal de l'ensemble des droites parallèles est $\vec{n} = (1; 1)$ et, en évaluant la fonction économique en chacun des sommets, on obtient les valeurs regroupées dans le tableau suivant.

Sommet	(0; 0)	(0; 10)	(4; 8)	(10; 2)	(11; 0)
$P_3(x; y)$ ($)	0	3 000	3 600	3 600	3 300

Le profit maximal est de 3 600 $, mais il y a plus d'une solution admissible parce que les droites représentant les différentes valeurs du profit sont parallèles à l'une des droites frontières. En effet, le vecteur $\vec{n} = (1; 1)$ est normal à la droite frontière Δ_3 et tous les points à coordonnées entières du segment de droite joignant les sommets (4; 8) et (10; 2) correspondent à un profit de 3 600 $.



L'ensemble solution est alors :

$$\{(x; y) \mid 300x + 300y = 3\,600\} \text{ où } 4 \leq x \leq 10 \text{ et } x \text{ et } y \text{ sont des entiers}.$$

La compagnie peut donc choisir l'une des solutions données dans le tableau suivant.

Nombre d'unités produites		**Temp libre utilisé (h)**		
M_1 x	M_2 y	Sciage $x + 2y \leq 20$	Assemblage $2x + y \leq 22$	Sablage $x + y \leq 12$
4	8	20	16	12
5	7	19	17	12
6	6	18	18	12
7	5	17	19	12
8	4	16	20	12
9	3	15	21	12
10	2	14	22	12

Problème de programmation linéaire

L'exemple de la mise en situation illustre d'un point de vue géométrique une méthode de résolution d'un problème de programmation linéaire. Pour bien décrire cette technique, il faut préalablement d'abord définir quelques termes.

Demi-plan et demi-espace

L'ensemble solution d'une inéquation linéaire à deux variables de la forme

$$ax + by \leq c$$

est un **demi-plan fermé** et l'ensemble solution d'une inéquation définie par une inégalité stricte (< ou >) est un demi-plan **ouvert**.

L'ensemble solution d'une inéquation linéaire à trois variables de la forme

$$ax + by + cz \leq d$$

est un **demi-espace fermé** et l'ensemble solution d'une inéquation définie par une inégalité stricte (< ou >) est un demi-espace **ouvert**.

REMARQUE

Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble-solution d'un système d'inéquations linéaires à deux variables forme toujours un polygone convexe.

Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble-solution d'un système d'inéquations linéaires à trois variables forme toujours un polyèdre convexe.

Polygone (polyèdre) convexe

L'intersection d'un nombre fini de demi-plans de $\mathbb{R}^2$ est appelée **polygone convexe.** L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$ est appelée **polyèdre convexe**.

Sommet d'un polygone ou d'un polyèdre

On dit qu'un point P est un **sommet** d'un polygone (respectivement d'un polyèdre) convexe si :

- P appartient au polygone (respectivement au polyèdre) convexe;
- P est l'intersection d'au moins deux côtés du polygone convexe (respectivement d'au moins trois faces du polyèdre convexe).

Certains systèmes d'équations ont plusieurs solutions admissibles. Celles-ci appartiennent toutes à un même côté du polygone ou à une même face du polyèdre convexe.

EXEMPLE 12.1.1

Une compagnie désire créer un nouveau produit en mélangeant trois produits en vente sur le marché soit M_1, M_2 et M_3. Ceux-ci contiennent des substances A et B dans les proportions suivantes; M_1 contient 20% de A et 10% de B, M_2, 10% de A et 10% de B; M_3, 10% de A et 20% de B.

Les contenants prévus pour ce nouveau produit sont de 200 ml et doivent comporter au plus 15% de A et au plus 10 % de B. Déterminer les volumes respectifs de M_1, M_2 et M_3 qu'il faut mélanger pour respecter ces contraintes.

Solution

Définition des variables

Soit x_1, le volume de M_1 à utiliser (en millilitres);
x_2, le volume de M_2 à utiliser (en millilitres);
x_3, le volume de M_3 à utiliser (en millilitres).

Définition du système de contraintes

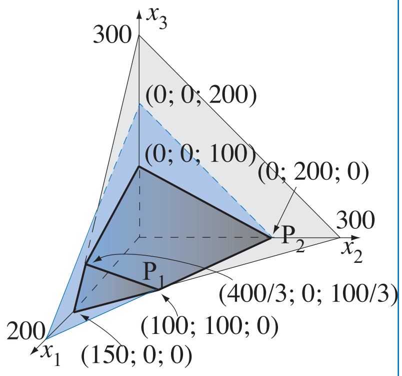
Les contraintes sont :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 200$$
$$0{,}20x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}10x_3 \leq 30, \text{ soit (15\% de 200 ml)}$$
$$0{,}10x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}20x_3 \leq 20, \text{ soit (10\% de 200 ml).}$$

En déterminant l'intersection des plans définissant les contraintes, on constate que les volumes qui pourraient être utilisés sont tous représentés par des points du segment de droite joignant les points $P_1(100; 100; 0)$ et $P_2(0; 200; 0)$. L'ensemble solution est donc :

$$\{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1 = 100 - t, x_2 = 100 + t, x_3 = 0\}, \text{ où } t = 0 \ldots 100.$$

Dans le cas présent, rien n'indique qu'une solution est meilleure qu'une autre. Cependant, le coût des produits M_1 et M_2 sur le marché pourrait être déterminant.



THÉORÈME

Théorème fondamental de la programmation linéaire

Soit *P* une fonction linéaire définie sur un polygone (ou un polyèdre) convexe. Si *P* a une ou plusieurs valeurs optimales, celles-ci sont atteintes en au moins un des sommets du polygone (ou du polyèdre) convexe.

De ce théorème, que nous ne démontrerons pas, découle la marche à suivre décrite ci-dessous.

PROCÉDURE

Résolution d'un problème de programmation linéaire

1. Représenter les données sous la forme d'un tableau de contraintes, c'est-à-dire structurer les données.
2. Décrire mathématiquement le problème c'est-à-dire définir les variables et les inéquations de contrainte.
3. Représenter graphiquement les contraintes et tracer le polygone (ou le polyèdre) convexe.
4. Calculer les coordonnées des sommets.
5. Évaluer la fonction économique en chacun des sommets, s'il y a lieu.
6. Analyser les résultats en tenant compte du contexte.

EXEMPLE 12.1.2

Un industriel désire ajouter deux nouveaux produits (des bibliothèques et des tables de nuit) à sa production afin d'utiliser les surplus hebdomadaires de ressources. Ces meubles seraient faits de contreplaqué et d'acrylique. La fabrication d'une table de nuit nécessite une heure de travail, un panneau de contreplaqué de 1 m^2 et trois panneaux d'acrylique de 1 m^2; la fabrication d'une bibliothèque nécessite 1 heure de travail, 4 m^2 de contreplaqué et 1 m^2 d'acrylique. Les ressources hebdomadaires sont de 24 m^2 de contreplaqué, de 21 m^2 d'acrylique et de 9 heures de temps de travail. On prévoit un profit de 24 $ par table de nuit et de 60 $ par bibliothèque. Calculer le nombre d'articles à produire par semaine pour maximiser le profit.

ProgLin03

Solution

Représentation des données dans un tableau

Structurons l'information dans un tableau. Cela donne :

	Produit		Disponibilité
	Table de nuit	Bibliothèque	
Contreplaqué (m^2)	1	4	24
Acrylique (m^2)	3	1	21
Temps (h)	1	1	9
Profit ($)	24	60	

Description mathématique du problème

Il y a trois contraintes: une pour le contreplaqué, une pour l'acrylique et une pour le temps de fabrication.

Si on désigne par T le nombre de tables de nuit produites et par B le nombre de bibliothèques produites, le problème s'énonce comme suit

Maximiser la fonction $z = 24T + 60B$ en respectant les contraintes :

$$T + 4B \leq 24$$

$$3T + B \leq 21$$

$$T + B \leq 9$$

$$T \geq 0$$

$$B \geq 0$$

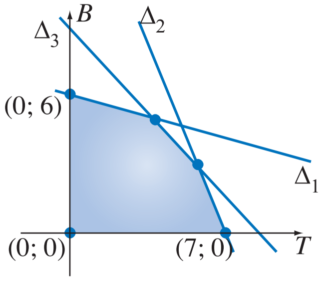
Construction du polygone convexe

Pour construire le polygone convexe, il faut tracer chacune des droites frontières en déterminant les points d'intersection avec les axes. Ces droites frontières sont :

$\Delta_1 : T + 4B = 24$

$\Delta_2 : 3T + B = 21$

$\Delta_3 : T + B = 9$

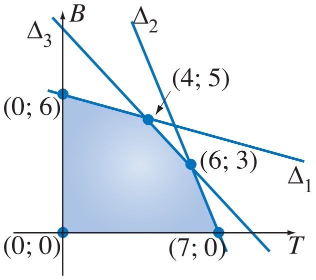


Les points d'intersection avec les axes sont :

(0; 6) et (24; 0) pour la droite Δ_1;

(0; 21) et (7; 0) pour la droite Δ_2;

(0; 9) et (9; 0) pour la droite Δ_3.



Calcul des coordonnées des sommets

On a obtenu trois sommets en construisant graphiquement le polygone convexe, soit (0; 0), (0; 6) et (7; 0). Les autres sommets sont les points d'intersection des droites de contraintes. L'intersection des droites Δ_1 et Δ_3 s'obtient en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} T+4B=24 \\ T+B=9 \end{cases}$$

ce qui donne le sommet (4; 5).

L'intersection des droites Δ_2 et Δ_3 s'obtient en résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} 3T+B=21 \\ T+B=9 \end{cases}$$

ce qui donne le sommet (6; 3).

Évaluation de la fonction économique

L'évaluation de la fonction économique $z = 24T + 60B$ en chacun des sommets.

$(T; B)$	(0; 0)	(0; 6)	(4; 5)	(6; 3)	(7; 0)
z	0	360	396	324	168

Analyse des résultats selon le contexte

Le maximum est donc atteint à (4; 5); il faut produire 4 tables de nuit et 5 bibliothèques par semaine pour maximiser le profit, qui serait alors de 396 $.

EXEMPLE 12.1.3

Le responsable des achats d'une entreprise doit se procurer au moins 210 chaises, 120 bureaux et 80 tables d'ordinateurs pour le nouveau siège social. Deux compagnies vendent des meubles de bureaux en lots non divisibles. La compagnie Ameublements de bureaux (AB) offre des lots de 30 chaises, 10 bureaux et 10 tables d'ordinateurs pour 2 000 $, et AC offre des lots de 20 chaises, 30 bureaux et 10 tables d'ordinateurs pour 2 000$. Combien de lots faut-il acheter de chacun de ces fournisseurs pour minimiser le coût total?

ProgLin04

Solution

Représentation des données sous forme de tableau

Article	Fournisseur		Quantité minimale requise
	AB	AC	
Chaise	30	20	210
Bureau	10	30	120
Table	10	10	80
Coût ($)	2 000	2 000	

Description mathématique du problème

Soit x, le nombre de lots achetés du fournisseur AB;

y , le nombre de lots achetés du fournisseur AC.

Il faut donc résoudre le problème linéaire suivant.

Minimiser $w = C(x; y) = 2000x + 2000y$ en respectant les contraintes

$$30x + 20y \geq 210$$
$$10x + 30y \geq 120$$
$$10x + 10y \geq 80$$

où $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

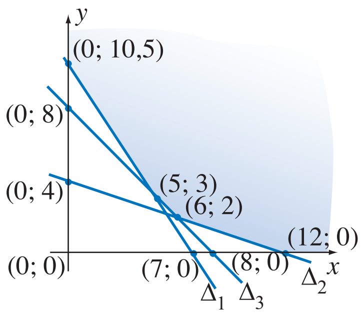
Représentation graphique des droites frontières

Les droites frontières sont :

Δ_1 : $30x + 20y = 210$, qui coupe les axes aux points (0; 10,5) et (7;0);

Δ_2 : $10x + 30y = 120$,qui coupe les axes aux points (0;4) et (12;0);

Δ_3 : $10x + 10y = 80$, qui coupe les axes aux points (0;8) et (8;0).



Calcul des coordonnées des sommets

L'intersection de Δ_1 et Δ_3 est (5; 3) et celle de Δ_2 et Δ_3 est (6; 2).

Évaluation de la fonction économique

En évaluant la fonction économique $w = 2000x + 2000y$ en chacun des sommets du polygone, on obtient

$(x; y)$	(0; 10,5)	(5; 3)	(6; 2)	(12; 0)
w	21 000	16 000	16 000	24 000

Analyse des résultats en tenant compte du contexte

Dans ce cas, la solution (0; 10,5) n'est pas admissible puisque les deux compagnies ne vendent que des lots complets. La valeur minimale est 16 000 $. Elle est atteinte à (5; 3) et à (6; 2). Il n'y a pas d'autre solution entière sur le segment de droite joignant ces deux points. Le produit des matrices sert à comparer ces deux solutions.

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 10 & 30 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 210 \\ 140 \\ 80 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 10 & 30 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 220 \\ 120 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

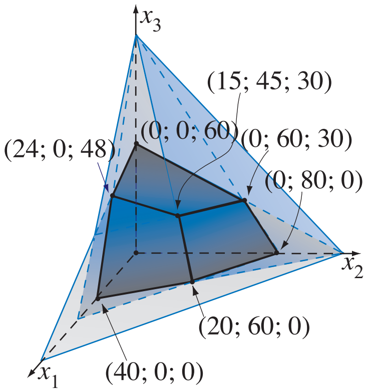
Si elle opte pour la solution (5; 3), l'entreprise achètera en tout 210 chaises pour 220 postes de travail (tables et bureaux); si elle opte pour la solution (6; 2), elle achètera en tout 220 chaises pour 200 postes de travail. La décision finale ne relève pas des mathématiques : c'est une décision administrative.

EXEMPLE 12.1.4

Un marchand d'aliments naturels prépare des mélanges à grignoter, vendus en sachets, dont les ingrédients de base sont des arachides, des raisins secs et des noix de cajou. Il achète chaque semaine 2 400 g d'arachides, 1 200 g de raisins secs et 1 200 g de noix de cajou. Le mélange M_1 rapporte 2,00$ par sachet et il est composé de 30 g d'arachides, de 10 g de raisins et de 30 g de noix de cajou; le mélange M_2 rapporte 1,50$ par sachet et il est composé de 30 g d'arachides, 10 g de raisins et de 10 g de noix de cajou; le mélange M_3 rapporte 1,00$ du sachet et il est composé de 20 g d'arachides, de 20 g de raisins et de 10 g de noix de cajou. Sachant que le commerçant vend chaque semaine tous les mélanges qu'il peut préparer, calculer combien il en prépare de chaque sorte si son profit est maximal.

ProgLin05

REMARQUE
L'objectif est de déterminer le sommet pour lequel le profit est maximal.



On sait que le profit est maximal en un point du plan de vecteur normal $\vec{n}$ = (2; 1,5; 1) le plus éloigné de l'origine. Cependant, il n'est pas toujours simple de construire une représentation graphique pour identifier les solutions admissibles et déterminer les points d'intersection des plans.

Solution

Représentation des données sous forme de tableau

	Mélange			Disponibilité
	M_1	M_2	M_3	
Arachides	30	30	20	2 400
Raisins	10	10	20	1 200
Noix de cajou	30	10	10	1 200
Profit	2,00$	1,50$	1,00$	

Description mathématique du problème

Soit x_1, le nombre de sachets de mélange M_1,
x_2, le nombre de sachets de mélange M_2,
x_3, le nombre de sachets de mélange M_3.

Le problème s'énonce comme suit :

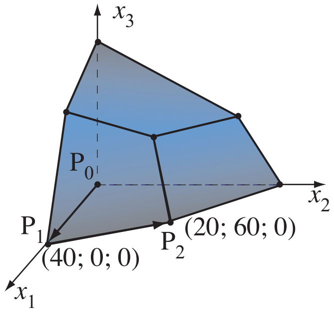
Maximiser la fonction $z = 2x_1 + 1{,}5x_2 + x_3$ avec les contraintes

$$30x_1 + 30x_2 + 20x_3 \le 2\,400$$
$$10x_1 + 10x_2 + 20x_3 \le 1\,200$$
$$30x_1 + 10x_2 + 10x_3 \le 1\,200$$

où $x_i \ge 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

REMARQUE

La solution admissible initiale est représentée par le sommet $P_0(0; 0; 0)$. Au sommet $P_1(40; 0; 0)$, le profit est de 80 $.



Au sommet $P_2(20; 60; 0)$, le profit est de 130$. C'est en ce sommet que le profit est maximal.

REMARQUE

La méthode du simplexe, développée par George Bernard Dantzig, permet de résoudre les problèmes de programmation linéaire sans construire de représentation graphique.

Pour déterminer les sommets, il faut prendre trois à trois les équations de contraintes. Ainsi, en considérant les deux premières contraintes de disponibilité et la première contrainte de non négativité, on obtient

$$\begin{cases} 30x_1 + 30x_2 + 20x_3 = 2\ 400 \\ 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 1\ 200 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

En substituant 0 à x_1 dans les deux premières équations, puis en simplifiant les équations, on a le système

$$\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = 240 \\ x_2 + 2x_3 = 120 \end{cases}$$

d'où l'on tire $x_2 = 60$ et $x_3 = 30$. Le sommet est (0; 60; 30).

Interprétation des résultats

La valeur maximale est atteinte à $x_1 = 20$, $x_2 = 60$ et $x_3 = 0$. Pour maximiser son profit, le marchand doit préparer 20 sachets de mélange M_1, 60 sachets de mélange M_2 et ne préparer aucun de mélange M_3. Le profit hebdomadaire est ainsi de 130 $ et il reste 400 g de raisins.

Un peu *d'histoire*

GEORGE BERNARD DANTZIG

1914-2005

George Bernard Dantzig, un mathématicien américain, naquit à Portland en Oregon en 1914. Son père, Tobias, mathématicien russe, étudia avec Henri Poincaré à Paris et épousa une collègue de la Sorbonne, Anja Ourisson, avant d'émigrer aux États-Unis.

Dantzig fut l'acteur principal d'une anecdote bien connue des mathématiciens. Un jour que Dantzig était en retard à un cours de statistiques de niveau doctoral à l'université de Berkeley, le professeur Jerzy Neyman proposa deux problèmes ouverts aux étudiants. Un problème ouvert est un problème clairement formulé, mais non résolu en raison de son haut niveau de difficulté. La résolution d'un tel problème demande parfois des années de recherche. Pensant que les deux problèmes constituaient un devoir, Dantzig les résolut en quelques jours.

Dantzig reçut son doctorat de l'université Berkeley en 1946 et il travailla d'abord comme statisticien, puis il devint conseiller mathématique pour l'aviation militaire américaine. Il s'intéressa aux problèmes d'allocation optimale des ressources et mit au point la méthode du simplexe, qui sert à résoudre ce type de problèmes. Cette découverte, faite en 1947, coïncida avec l'invention d'ordinateurs permettant de résoudre des problèmes comportant un grand nombre de variables. À l'origine, sa méthode fut surtout employée pour planifier des sessions d'entraînement, organiser la distribution d'équipement et déployer des militaires. En moins de 25 ans, elle devint un instrument indispensable pour la gestion industrielle, l'étude de systèmes économiques et l'affectation de personnel et de ressources.

12.2 Exercices

1. Résoudre les problèmes suivants en évaluant la fonction économique en chacun des points sommets du polygone convexe.

   a) Maximiser $z = 3x + 3y$
   soumise aux contraintes :
   $x + 4y \leq 12$
   $2x + y \leq 10$
   où $x \geq 0$ et $y \geq 0$

   b) Maximiser $z = 5x + 8y$
   soumise aux contraintes :
   $x + y \leq 13$
   $5x + 2y \leq 50$
   $4x + 5y \leq 60$
   où $x \geq 0$ et $y \geq 0$

   c) Maximiser $z = 4x + 4y$
   soumise aux contraintes :
   $x + y \leq 13$
   $5x + 2y \leq 50$
   $4x + 5y \leq 60$
   où $x \geq 0$ et $y \geq 0$

   d) Minimiser $w = 5x + 7y$
   soumise aux contraintes :
   $x + 2y \geq 8$
   $2x + y \geq 8$
   $x + y \geq 6$
   où $x \geq 0$ et $y \geq 0$

   e) Minimiser $w = 6x + 9y$
   soumise aux contraintes :
   $x + 3y \geq 12$
   $3x + y \geq 12$
   $x + y \geq 8$
   où $x \geq 0$ et $y \geq 0$

2. Un manufacturier de meubles en plastique moulé à armature de métal désire ajouter à sa gamme de produits deux nouveaux modèles de chaises afin de diminuer le temps libre dans ses ateliers de moulage, de soudure et d'assemblage.

   Étant donné la rapidité d'exécution des différentes opérations par les machines, le temps de réalisation est donné en unités de deux minutes chacune. La fabrication du premier modèle nécessite 1 unité de temps au moulage, 2 unités à la soudure et 4 unités à l'assemblage. La fabrication du deuxième modèle nécessite 3 unités de temps au moulage, 3 unités à la soudure et 3 unités à l'assemblage.

   Le relevé des temps morts a révélé qu'il y a 105 unités de temps disponibles à l'atelier de moulage, 120 à l'atelier de soudure et 180 à l'atelier d'assemblage. Par ailleurs, il n'y a pas de contraintes sur les matières premières, le manufacturier pouvant se procurer facilement ce dont il a besoin. Si le profit de l'entreprise est de 60 $ par chaise.

   Combien de chaises de chaque modèle doit-elle produire par semaine pour maximiser ses profits.

3. Une entreprise doit fabriquer deux modèles d'armoires de cuisine (Antique et Traditionnel) pour une firme de construction. Dans leur version standard, les deux modèles ont les mêmes dimensions et peuvent s'intégrer aux différentes maisons que la firme construit. Le procédé de fabrication des armoires comporte trois étapes distinctes, réalisées dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de finition. La durée de chacune des opérations est exprimée en unités de 15 minutes chacune. Le temps de sciage d'un exemplaire du modèle Antique est de 2 unités de temps; l'assemblage prend 1 unité de temps et la finition 3 unités. Le temps de sciage d'un exemplaire du modèle Traditionnel est de 3 unités; l'assemblage nécessite 1 unité de temps et la finition 2 unités. Le relevé des temps morts de ces ateliers a permis de constater qu'il y a mensuellement 60 unités de temps disponibles à l'atelier de sciage, 25 à l'atelier d'assemblage et 60 à l'atelier de finition. Si le profit sur les armoires est de 225 $ pour le modèle Antique et de 200 $ pour le modèle Traditionnel, déterminer combien d'armoires de chaque modèle l'entreprise doit produire pour maximiser ses profits mensuels en supposant qu'elle est certaine de vendre toute sa production.

4. Une entreprise projette de fabriquer deux nouveaux modèles d'étagères à disques afin d'occuper les temps morts dans ses ateliers. La production du premier modèle nécessite 2 unités de temps à l'atelier de sciage, 3 unités à l'atelier d'assemblage et 3 unités à l'atelier de sablage. La production du deuxième modèle nécessite 3 unités de temps à l'atelier de sciage, 2 unités à l'atelier d'assemblage et 1 unité à l'atelier de sablage.

Le relevé des temps morts a révélé qu'il y a 240 unités de temps disponibles à l'atelier de sciage, 210 à l'atelier d'assemblage et 180 à l'atelier de sablage. Par ailleurs, il n'y a pas de contraintes sur les matières premières puisque l'entreprise peut se procurer facilement ce dont elle a besoin.

a) Sachant que le profit est de 80 $ pour le premier modèle et de 60 $ pour le deuxième modèle, déterminer combien d'étagères de chaque modèle l'entreprise doit produire pour maximiser son profit.

b) Quelle serait la solution si le profit était de 90 $ pour le premier modèle et de 60 $ pour le deuxième modèle?

5. Le directeur d'une usine de meubles désire ajouter à la production mensuelle deux modèles d'étagères en utilisant les surplus de matériaux qui s'accumulent chaque mois et le temps libre dans les ateliers. Les matériaux nécessaires pour fabriquer les étagères sont des montants, dont les surplus mensuels sont de 250 mètres linéaires et des panneaux de contreplaqué dont les surplus mensuels sont de 100 panneaux. Par ailleurs, le directeur a constaté qu'il se perd actuellement 60 h de travail dans les ateliers et que ce temps pourrait être affecté à la production des étagères. La fabrication du premier modèle nécessite 1 h de travail, 3 mètres linéaires de montants et 2 panneaux de contreplaqué. La fabrication du deuxième modèle nécessite 1 h de travail, 5 mètres linéaires de montants et 1 panneau de contreplaqué.

a) Sachant que les profits escomptés pour les étagères sont de 40 $ pour le premier modèle et de 50 $ pour le deuxième modèle, déterminer combien l'usine doit produire d'étagères de chaque modèle pour maximiser ses profits.

b) Quels sont les surplus mensuels de montants et de contreplaqué si l'usine produit les quantités déterminées en a)?

6. Un marchand offre à sa clientèle deux mélanges de café maison qui contiennent trois types de café : brésilien, colombien et africain, et qui sont vendus en sachets de 500 g. Pour préparer un sachet du mélange corsé, le marchand utilise 100 g de brésilien, 300 g de colombien et 100 g d'africain; pour préparer un sachet du mélange velouté, il utilise 100 g de brésilien, 100 g de colombien et 300 g d'africain. Par ailleurs, il bénéficie d'un rabais s'il commande simultanément au moins 6 kg de brésilien, 10 kg de colombien et 10 kg d'africain.

a) Les sachets de 500 g sont tous vendus au même prix. Cependant, le café africain coûte plus cher que les deux autres de sorte que le coût de production des deux mélanges n'est pas identique; il est de 3 $ pour le mélange corsé et de 4 $ pour le mélange velouté. Le marchand veut continuer à offrir les deux mélanges à sa clientèle tout en minimisant ses coûts. Combien de sachets de chaque mélange devrait-il produire hebdomadairement?

b) Quelles quantités de chaque type de grains doit-il alors acheter par semaine?

7. Un manufacturier reçoit une commande pour deux de ses produits en rupture de stock, soit P_1 et P_2. La fabrication de ces deux produits nécessite l'emploi de trois machines, soit M_1, M_2 et M_3 qui ne sont utilisées pour aucun autre produits. Cependant, lorsqu'elles sont mises en marche, un temps d'utilisation trop court peut entraîner des dommages à ces machines. Le temps minimum d'emploi spécifié par le fabricant est de 380 min pour M_1, 120 min pour M_2 et 150 min pour M_3. La fabrication du produit P_1 nécessite 4 min sur la machine M_1, 3 min sur la machine M_2 et 1 min sur la machine M_3. La fabrication du produit P_2 nécessite 5 min sur la machine M_1, 1 min sur la machine M_2 et 4 min sur la machine M_3.

a) Sachant que le manufacturier a reçu une commande de 10 exemplaires de P_1 et de 10 exemplaires de P_2 et que le coût de fabrication est de 5 $ par exemplaire de l'un ou de l'autre de ces produits, déterminer le nombre d'exemplaires de chaque produit que le manufacturier doit fabriquer pour minimiser le coût de production.

b) Quel sera alors le temps d'utilisation de chaque machine?

8. Une entreprise fabrique des compléments alimentaires pour le bétail qui doivent respecter certaines contraintes quant à leur contenu en vitamines A, B et C. Un kilo de la variété SuperA doit contenir 400 g de vitamine A, 300 g de vitamine B et 300 g de vitamine C; un kilo de la variété ExtraC doit contenir 200 g de vitamine A, 300 g de vitamine B et 500 g de vitamine C. Les fournisseurs de

l'entreprise lui garantissent 38 kg de vitamine A, 30 kg de vitamine B et 45 kg de vitamine C par semaine.

a) Sachant que l'entreprise est certaine de vendre toute sa production et qu'elle escompte réaliser un profit de 3 $/kg sur la variété SuperA et de 2 $/kg sur la variété ExtraC, quel doit être son plan de production?

b) Quelle quantité de chaque vitamine la compagnie doit-elle commander par semaine pour ne pas accumuler de surplus?

9. Un manufacturier de jouets désire ajouter à sa gamme de produits une table pour enfants et une maison de poupée en bois. Pour fabriquer une table, il faut 6 min à l'atelier de sciage, 8 min à l'atelier d'assemblage et 8 min à l'atelier de peinture.

Pour fabriquer une maison de poupée, il faut 4 min à l'atelier de sciage, 12 min à l'atelier d'assemblage et 8 min à l'atelier de peinture. Les temps morts par semaine dans ces ateliers sont actuellement de 72 min à l'atelier de sciage, 144 min à l'atelier d'assemblage et 112 min à l'atelier de peinture.

a) Sachant que le manufacturier réalise un profit de 50 $ par table et de 60 $ par maison de poupée, calculer combien d'exemplaires de chaque article il doit produire pour maximiser son profit.

b) Quels sera le temps mort dans chaque atelier si le manufacturier applique le plan de production déterminé en a) ?

10. Le responsable des ventes d'une usine de meubles signale que les chaises Grand-mère et Grand-père sont en rupture de stock. Comme la politique de l'entreprise est d'avoir toujours au moins un exemplaire de chaque modèle qu'elle produit pour sa salle de montre, elle doit fabriquer des exemplaires des deux meubles.

Pour ce faire, l'usine doit rappeler du personnel au travail, car le reste de la production monopolise tous les employés actuels. La convention stipule que la compagnie doit payer au moins 6 h à un tourneur rappelé au travail et au moins 4 h à tout autre ouvrier.

La fabrication du modèle Grand-mère nécessite 20 min à l'atelier de sciage, 60 min à l'atelier de tournage et 24 min à l'atelier d'assemblage et finition; la fabrication du modèle Grand-père nécessite 40 min à l'atelier de sciage, 30 min à l'atelier de tournage et 24 min à l'atelier d'assemblage et finition.

Les travailleurs de l'atelier de sciage sont payés 15,00 $ l'heure, les tourneurs 17,00 $ l'heure et les assembleurs 12,00 $ l'heure.

a) Calculer le coût de la main-d'œuvre pour la construction d'une unité de chaque modèle.

b) Déterminer le nombre de chaises de chaque modèle que l'usine doit produire pour minimiser les coûts de main-d'œuvre.

c) Quelle sera la durée du rappel pour chaque classe de travailleurs ?

11. Une entreprise de produits chimiques fabrique deux produits pour les carrosseries d'automobile: Brillenet et Clairnet. Les deux produits contiennent les mêmes ingrédients de base, mais dans des proportions différentes. Pour ne pas divulguer de secret industriel, on désigne les ingrédients par I_1, I_2 et I_3. Ces produits sont commercialisés dans des contenants de un litre.

Pour fabriquer un litre de Brillenet, il faut 0,4 L de I_1, 0,3 L de I_2 et 0,3 L de I_3; pour fabriquer un litre de Clairnet, il faut 0,5 L de I_1, 0,2 L de I_2 et 0,3 L de I_3. Les fournisseurs de l'entreprise peuvent garantir, à chaque semaine, 94 L de I_1, 51 L de I_2, et 60 L de I_3. Le profit réalisé est de 1,50 $/L pour le produit Brillenet et de 1,20 $/L pour le produit Clairnet.

a) Combien de litres de chaque produit l'entreprise doit-elle fabriquer chaque semaine pour maximiser son profit ?

b) Quelle quantité des trois ingrédients la compagnie doit-elle acheter par semaine si elle ne veut pas entreposer de surplus?

c) Le service de distribution avise le gérant de la production qu'il lui est impossible de vendre toute la production de Brillenet. Les relevés des derniers mois indiquent que les distributeurs n'ont écoulé que 70 L de ce produit par semaine. Compte tenu de cette information, quel doit être le plan de production ?

d) La modification du plan de production implique-t-elle une modification des achats hebdomadaires? Quelles quantités de chaque ingrédient la compagnie doit-elle acheter par semaine?

12. Une entreprise veut fabriquer deux modèles d'armoires de cuisine dont les temps de réalisation sont donnés dans le tableau suivant.

Ateliers	Modèles		Temps libres
	M_1	M_2	
Sciage	2	3	60
Assemblage	3	2	60
Sablage	1	1	25

Sachant que les profits sur ces armoires sont de 225 \$ pour le modèle M_1 et de 200 \$ pour le modèle M_2, déterminer combien d'armoires de chaque modèle il faut produire pour maximiser les profits en supposant que l'entreprise est assurée d'écouler toute sa production.

13. Un fabricant de jouets désire ajouter à sa gamme de produits un camion de pompiers et un camion à benne. Les temps de réalisation en minutes dans les ateliers de moulage des pièces, de peimture et d'assemblage ainsi que les temps libres sont donnés dans le tableau suivant. Les temps libres sont en minutes par semaine.

Ateliers	Pompier	Benne	Temps libres (min)
Moulage	4	6	150
Peinture	4	4	120
Assemblage	8	4	200

a) Sachant que l'entreprise fera un profit de 35 \$ par camion de pompier et de 25 \$ par camion à benne, déterminer combien d'exemplaires de chaque article il faut produire par semaine pour maximiser le profit.

b) Quels seront alors les temps libres dans les différents ateliers ?

14. Votre entreprise achète trois nouvelles machines M_1, M_2 et M_3 qui permettent de fabriquer les produits P_1, P_2 et P_3. Les temps de réalisation sur les différentes machines sont donnés en minutes dans le tableau suivant.

	P_1	P_2	P_3	Disponibilités par jour
M_1	2	1	1	480
M_2	1	2	2	480
M_3	1	1	3	480

Le profit réalisé à la vente des articles est de 10 \$ par article. Déterminer combien d'articles de chaque produit il faudra fabriquer chaque jour pour maximiser le profit journalier.

15. Un épicier souhaite offrir à ses clients trois mélanges de jus produits sur place en utilisant du jus d'orange, du jus de pamplemousse et du jus de pêches.

Le mélange M_1 « fruit de la passion » contient 40 % de jus d'orange, 40 % de jus de pamplemousse et 20 % de jus de pêche. Le mélange M_2 « passion tropicale» contient 60 % de jus d'orange et 40 % de jus de pamplemousse et 0 % de jus de pêche. Le mélange M_3 « passion équatoriale » contient 40 % de jus d'orange, 20 % de jus de pamplemousse et 40 % de jus de pêche.

Pour préparer ces mélanges, l'épicier dispose hebdomadairement de 120 L de jus d'orange, 100 L de jus de pamplemousse et de 160 L de jus de pêches. Le profit escompté est de 1,20 \$ pour le mélange M_1, de 1,40 \$ pour le mélange M_2 et de 1,50 \$ pour le mélange M_3.

a) Décrire le problème et les contraintes à l'aide d'un tableau.

b) Écrire le programme linéaire permettant de déterminer les quantités à produire de chacune des saveurs pour maximiser le profit de l'épicier.

16. Votre entreprise envisage l'achat de deux nouvelles machines qui permettraient de fabriquer trois nouveaux produits. Cependant, ces machines doivent fonctionner au moins quatre heures de suite lorsqu'elles sont mises en marche, un temps d'utilisation plus court pouvant causer des dommages à la machine. Les temps de production en minutes sont donnés dans le tableau suivant.

	P_1	P_2	P_3	Temps minimum
M_1	1	1	2	240
M_2	1	1	3	240

Le coût des matériaux utilisés est de 3 \$ pour P_1, de 4 \$ pour P_2 et de 5 \$ pour P_3. Combien d'exemplaires de chaque produit faut-il fabriquer pour minimiser le coût des matériaux lorsque les machines sont mises en marche?

17. Le responsable des ventes d'une usine de fabrication de meubles signale que les réserves de deux modèles de chaises sont épuisées. Comme la politique de l'entreprise est d'avoir toujours au moins un exemplaire de chacun des meubles qu'elle produit pour sa salle de montre, il faut produire des exemplaires de ces deux modèles de chaises dont les temps de fabrication en minutes sont donnés dans le tableau suivant.

Ateliers	Modèles	
	M_1	M_2
Sciage	20	40
Tournage	60	30
Assemblage	24	24

Pour ce faire, il faut rappeler des employés au travail, car les autres productions monopolisent complètement le personnel actuellement au service de l'entreprise. La convention collective des travailleurs de cette usine prévoit que l'entreprise doit payer un minimum de 4 heures à un ouvrier rappelé au travail, sauf pour les tourneurs dont le minimum est de 6 heures. Les travailleurs de l'atelier de sciage sont payés 18 $ l'heure, les tourneurs 17 $ l'heure et les assembleurs 15 $ l'heure.

a) Déterminer le coût de fabrication en heures de travail de chacun de ces modèles.

b) Déterminer le nombre de chaises de chaque modèle qu'il faut produire pour minimiser les coûts en main-d'œuvre.

c) En appliquant le plan de production déterminé en b), quel sera le temps de rappel des travailleurs ?

18. Une entreprise fabrique trois produits P_1, P_2 et P_3 dont le processus de fabrication comporte trois étapes effectuées respectivement dans les ateliers A_1, A_2 et A_3. La fabrication d'une unité de P_1 nécessite 3 h à la première étape, 3 h à la deuxième et 2 h à la troisième étape. La fabrication d'une unité de P_2 nécessite 2 h à la première étape, 2 h à la deuxième et 2 h à la troisième étape. La fabrication d'une unité de P_3 nécessite 4 h à la première étape, 2 h à la deuxième et 1 h à la troisième étape.

Les temps disponibles sont de 80 h par mois à l'atelier A_1, de 60 h par mois à l'atelier A_2 et de 80 h par mois à l'atelier A_3.

L'entreprise prévoit dégager respectivement 25 $, 30 $ et 35 $ pour chaque exemplaire de ces produits.

a) Décrire le problème et les contraintes à l'aide d'un tableau.

b) Écrire le programme linéaire permettant de déterminer les quantités à produire pour maximiser le profit

c) Déterminer s'il reste des temps disponibles en implantant ce plan de production.

19. Une épicière désire offrir à sa distinguée clientèle trois saveurs de crème glacée maison : vanille, fruits et caramel, en contenants de 1 L. Les ingrédients utilisés sont le lait, le sucre, la crème, l'essence de vanille, les petits fruits et le caramel. Il doit respecter des contraintes sur les ingrédients de base, il peut consacrer au plus 1 000 L de lait par semaine à cette production, 100 kg de sucre et 380 L de crème. Il n'y a aucune contrainte sur l'essence de vanille, les petits fruits et le caramel.

Pour produire 1 L de crème glacée à la vanille, il utilise 600 mL de lait, 50 g de sucre et 200 mL de crème. Pour produire 1 L de crème glacée aux fruits, il utilise 400 mL de lait, 50 g de sucre et 150 mL de crème. Pour produire 1 L de crème glacée au caramel, il utilise 500 mL de lait, 40 g de sucre et 200 mL de crème.

Il prévoit dégager un profit de 1,50 $/L pour sa crème glacée à la vanille, et de 1,35 $/L pour chacune des autres saveurs et il souhaite produire au moins 200 L de chacun.

a) Décrire le problème et les contraintes à l'aide d'un tableau.

b) Écrire et résoudre le programme linéaire permettant de déterminer les quantités à produire de chacune des saveurs pour maximiser le profit de l'épicière.

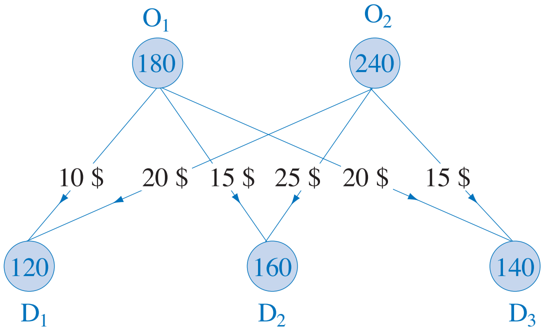
12.3 Problèmes de transport

Un aspect important du transport des marchandises est celui du coût. Lorsqu'il y a un seul point de départ et une seule destination, il n'y a pas vraiment de problèmes. Cependant, pour une entreprise qui possède plusieurs usines fabriquant les mêmes produits et un certain nombre de centres de vente, le problème est plus complexe.

Mise en situation

Une entreprise de fabrication d'engrais chimique possède deux usines O_1 et O_2 (origines), et trois entrepôts D_1, D_2 et D_3 (destination). Le diagramme qui suit indique le nombre de tonnes métriques d'engrais produit par chacune des usines, le nombre de tonnes qu'il faut livrer à chacun des entrepôts et le coût du transport par tonne vers ceux-ci. Déterminer la solution pour laquelle le coût de transport est minimal.

Transport01



Notons x_{ij}, le nombre de tonnes métriques transportées de l'usine i à l'entrepôt j. Le tableau suivant regroupe les différentes contraintes et les variables du problème.

Entrepôt Usine	D 1	D 2	D 3	Production
O 1	x_{11} $\boxed{10}$	x_{12} $\boxed{15}$	x_{13} $\boxed{20}$	180
O 2	x_{21} $\boxed{20}$	x_{22} $\boxed{25}$	x_{23} $\boxed{15}$	240
Demande	120	160	140	420

Il faut déterminer la valeur à assigner à chacune des variables de façon à minimiser la fonction :

$w = 10x_{11} + 15x_{12} + 20x_{13} + 20x_{21} + 25x_{22} + 15x_{23}$ soumise aux :

- contraintes de production (de l'offre) $\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=180 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=240 \end{cases}$
- contraintes de la demande $\begin{cases} x_{11}+x_{21}=120 \\ x_{12}+x_{22}=160 \\ x_{13}+x_{23}=140 \end{cases}$

En tenant compte de ces contraintes, on peut simplifier le problème de la façon illustrée par le tableau suivant :

Entrepôt Usine	D$_1$	D$_2$	D$_3$	Production
O$_1$	$\boxed{10}$ x_{11}	$\boxed{15}$ x_{12}	$\boxed{20}$ $x_{13} = 180 - x_{11} - x_{12}$	180
O$_2$	$\boxed{20}$ $x_{21} = 120 - x_{11}$	$\boxed{25}$ $x_{22} = 160 - x_{12}$	$\boxed{15}$ $x_{23} = 140 - x_{13}$ $= x_{11} + x_{12} - 40$	240
Demande	120	160	140	420

En substituant les expressions obtenues dans la fonction économique, on obtient :

$$\begin{aligned} w &= 10x_{11} + 15x_{12} + 20x_{13} + 20x_{21} + 25x_{22} + 15x_{23} \\ &= 10x_{11} + 15x_{12} + 20(180 - x_{11} - x_{12}) + 20(120 - x_{11}) \\ &\qquad + 25(160 - x_{12}) + 15(x_{11} + x_{12} - 40) \\ &= 10x_{11} + 15x_{12} + 3600 - 20x_{11} - 20x_{12} + 2400 - 20x_{11} \\ &\qquad + 4000 - 25x_{12} + 15x_{11} + 15x_{12} - 600 \\ &= 9\,400 - 15x_{11} - 15x_{12} \end{aligned}$$

On a donc $w = 9\,400 - 15x_{11} - 15x_{12}$

REMARQUE

On a obtenu une nouvelle formulation de la fonction économique, soit :

$$w = 9\,400 - 15\,x_{11} - 15\,x_{12}$$

Dans cette formulation, en donnant une valeur positive aux variables x_{11} et x_{12}, on diminue la valeur de la fonction coût. De cette formulation, on tire :

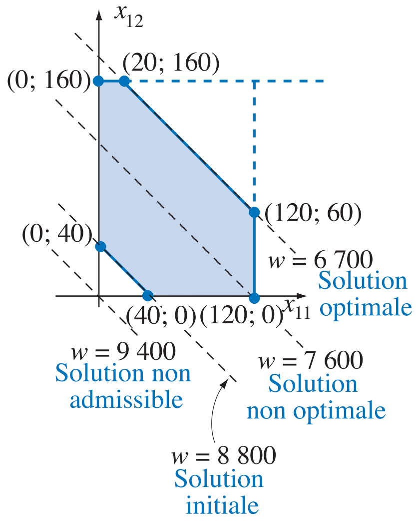
$$15\,x_{11} + 15\,x_{12} = 9\,400 - w$$

On constate que minimiser w revient à maximiser $9\,400 - w$.

soumise aux contraintes de non-négativité suivantes :

$$\begin{cases} x_{11} \geq 0 \\ x_{12} \geq 0 \\ x_{13} \geq 0, \text{ d'où } 180 - x_{11} - x_{12} \geq 0 \\ x_{21} \geq 0, \text{ d'où } 120 - x_{11} \geq 0 \\ x_{22} \geq 0, \text{ d'où } 160 - x_{12} \geq 0 \\ x_{23} \geq 0, \text{ d'où } x_{11} + x_{12} - 40 \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_{11} \geq 0 \\ x_{12} \geq 0 \\ x_{11} + x_{12} \leq 180 \\ x_{11} \leq 120 \\ x_{12} \leq 160 \\ x_{11} + x_{12} \geq 40 \end{cases}$$

En représentant graphiquement ces contraintes, on obtient le polygone convexe borné ci-contre. En évaluant la fonction économique en chacun des sommets du polygone convexe, on a :



$(x_{11}; x_{12})$	(0; 40)	(0; 160)	(20; 160)	(120; 60)	(120; 0)	(40; 0)
w	8 800 $	7 000 $	6 700 $	6 700 $	7 600 $	8 800 $

Ce tableau contient deux solutions possibles donnant le coût minimal, soit : $(x_{11}; x_{12}) = (20; 160)$ et $(x_{11}; x_{12}) = (120; 60)$. De fait, tous les points du segment de droite joignant ces deux points sommets donnent un coût minimal, car la droite $w = 9\,400$ est parallèle à ce segment.

Connaissant la valeur des variables x_{11} et x_{12}, on peut alors compléter la solution. Les valeurs obtenues sont consignées dans les tableaux suivants :

REMARQUE

On observe dans la représentation graphique que :

$9\,400 - w = 0$ pour $(x_{11}; x_{12}) = (0; 0)$

Cependant, $(x_{11}; x_{12}) = (0; 0)$ n'est pas une solution admissible. En particulier, elle ne satisfait pas à la condition

$$x_{11} + x_{12} \geq 40.$$

Solution pour $(x_{11}; x_{12}) = (20; 160)$

Entrepôt Usine	D_1	D_2	D_3	Production
O_1	$\boxed{10}$ 20	$\boxed{15}$ 160	$\boxed{20}$ 0	180
O_2	$\boxed{20}$ 100	$\boxed{25}$ 0	$\boxed{15}$ 140	240
Demande	120	160	140	420

Solution pour $(x_{11}; x_{12}) = (120; 60)$

Entrepôt Usine	D_1	D_2	D_3	Production
O_1	$\boxed{10}$ 120	$\boxed{15}$ 60	$\boxed{20}$ 0	180
O_2	$\boxed{20}$ 0	$\boxed{25}$ 100	$\boxed{15}$ 140	240
Demande	120	160	140	420

Algorithmes de résolution

AlgoTransport01

Nous allons résoudre les problèmes de transport en appliquant des algorithmes. On procède en deux étapes :

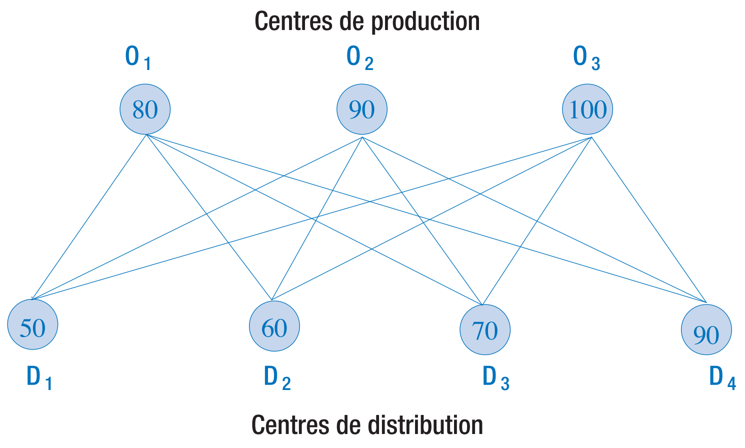
Détermination d'une solution initiale:

- méthode du coin nord-ouest;
- méthode du coût minimal.

Détermination d'une solution optimale:

- algorithme des pierres de gué ou stepping-stone.

Supposons trois usines O_1, O_2 et O_3 disposant respectivement de 80, 90 et 100 tonnes de marchandises qui doivent être livrées à quatre centres de distribution D_1, D_2 , D_3 et D_4 qui doivent recevoir respectivement 50, 60, 70 et 90 tonnes de ces marchandises.



Représentons par x_{ij} la quantité de marchandise devant être expédiée de l'origine O_i à la destination D_j. De la même façon, représentons par c_{ij} le coût du transport d'une unité de marchandise de l'origine O_i à la destination D_j. On se propose de déterminer un plan de transport de telle sorte que le coût total soit minimal. Pour rendre l'exemple plus concret, supposons que les valeurs des c_{ij}, en centaines de dollars, sont les suivantes :

$$c_{11} = 4, c_{12} = 1, c_{13} = 2, c_{14} = 6$$

$$c_{21} = 6, c_{22} = 4, c_{23} = 3, c_{24} = 5$$

$$c_{31} = 5, c_{32} = 2, c_{33} = 6, c_{34} = 4$$

Représentons ces données sous forme de tableau.

Usine	Destination				Production
	D_1	D_2	D_3	D_4	
0_1	4 x_{11}	1 x_{12}	2 x_{13}	6 x_{14}	80
0_2	6 x_{21}	4 x_{22}	3 x_{23}	5 x_{24}	90
0_3	5 x_{31}	2 x_{32}	6 x_{33}	4 x_{34}	100
Demande	50	60	70	90	270

Ce tableau définit entièrement le problème à résoudre; les coûts de transport c_{ij} sont représentés dans des cases (coin supérieur droit des cellules des variables x_{ij}). De plus, les colonnes représentent les contraintes de la demande et les lignes montrent les contraintes de la production ou de l'offre. Ce tableau résume le problème de programmation linéaire suivant :

Minimiser la fonction :

$$\begin{aligned} w = {} & 4x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 6x_{14} + 6x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 5x_{24} + 5x_{31} \\ & + 2x_{32} + 6x_{33} + 4x_{34} \end{aligned}$$

soumise aux contraintes :

$$\text{Contraintes de la production ou de l'offre} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 80 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 90 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100 \end{cases}$$

$$\text{Contraintes de la demande} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 90 \end{cases}$$

où $x_{ij} \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3, 4$.

Recherche d'une solution initiale

Méthode du coin nord-ouest

La méthode du coin nord-ouest consiste à attribuer des valeurs aux variables x_{ij} en commençant par le coin supérieur gauche et en s'assurant, étape par étape, que les contraintes sont satisfaites. On attribue donc à x_{11} la plus petite des valeurs entre O_1 et D_1. À cette première étape, une seule des contraintes impliquant la variable x_{11} est satisfaite. Il faut alors assigner une valeur dans une des cases adjacentes, sur la même ligne ou dans la même colonne, de façon à satisfaire la contrainte qui ne l'est pas; on continue ainsi jusqu'à atteindre la case x_{mn}, où m est le nombre de contraintes sur l'offre, et n le nombre de contraintes sur la demande.

REMARQUE

Les cellules dans lesquelles rien n'est inscrit sont celles pour lesquelles la variable associée est nulle. La solution obtenue par la méthode du coût minimal est en général plus proche de la solution optimale que celle qui est obtenue par la méthode du coin nord-ouest.

Appliquons cette méthode à la mise en situation.

Origine	Destination				Production
	D_1	D_2	D_3	D_4	
0_1	4 50	1 30	2	6	80
0_2	6	4 30	3 60	5	90
0_3	5	2	6 10	4 90	100
Demande	50	60	70	90	270

On remarque qu'il y a six variables non nulles dans la solution de base, soit $m + n - 1$ variables non nulles. La solution décrite dans ce tableau est :

$$x_{11} = 50, x_{12} = 30, x_{13} = 0, x_{14} = 0$$

$$x_{21} = 0, x_{22} = 30, x_{23} = 60, x_{24} = 0$$

$$x_{31} = 0, x_{32} = 0, x_{33} = 10, x_{34} = 90$$

On peut évaluer le coût de cette solution en multipliant les valeurs des variables non nulles par les coûts de transport correspondants, ce qui donne :

$$w = 4 \times 50 + 1 \times 30 + 4 \times 30 + 3 \times 60 + 6 \times 10 + 4 \times 90 = 950.$$

Cela signifie un coût de 95 000 $.

PROCÉDURE

Solution initiale par l'algorithme du coin nord-ouest

1. Assigner à la variable x_{11} la plus grande valeur possible en tenant compte des contraintes d'offre et de demande.
2. Trouver la contrainte à laquelle la variable seule ne satisfait pas (ligne ou colonne) et assigner à la cellule adjacente (x_{12} ou x_{21}) la plus grande valeur possible en tenant compte des contraintes d'offre et de demande.
3. Continuer le processus jusqu'à la cellule de la dernière ligne et de la dernière colonne.

Méthode du coût minimal

La méthode du coût minimal consiste à déterminer la case ayant le plus petit coût de transport et à attribuer à la variable correspondante la valeur la plus petite entre l'offre et la demande. Si l'offre (ou la demande) n'est pas satisfaite, on assigne une valeur à la cellule de la ligne (ou de la colonne) à saturer ayant le plus petit coût de façon à satisfaire la contrainte de l'offre (ou de la demande).

Dans notre exemple, le coût minimal est 1 et ce coût est associé à la cellule x_{12}. On attribuera donc à cette variable la plus petite valeur entre l'offre et la demande. Puisque $O_1 = 80$ et $D_2 = 60$, on pose $x_{12} = 60$. La demande est satisfaite, mais l'offre ne l'est pas; on devra donc donner une valeur non nulle à une autre variable de la même ligne.

Le plus petit coût de cette ligne est dans la cellule de la variable x_{13}; on posera donc $x_{13} = 20$ pour satisfaire à la contrainte de l'offre. L'offre O_1 est alors satisfaite, mais la demande D_3 ne l'est pas. Le plus petit coût dans les cellules vides de cette colonne est en x_{23} et nous posons $x_{23} = 50$ pour satisfaire à la demande D_3. En continuant ainsi, on aura les assignations du tableau suivant :

Origine	Destination				Production
	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	4	1 60	2 20	6	80
O_2	6	4	3 50	5 40	90
O_3	5 50	2	6	4 50	100
Demande	50	60	70	90	270

Si l'on évalue la fonction coût de cette solution, on trouve :

$$w = 1 \times 60 + 2 \times 20 + 3 \times 50 + 5 \times 40 + 5 \times 50 + 4 \times 50 = 900,$$

soit un coût de 90 000 $.

PROCÉDURE

Solution initiale par l'algorithme du coût minimal

1. Repérer, parmi les cellules du tableau, celle qui affiche le plus petit coût de transport. Si plusieurs cellules affichent le même coût, on doit choisir l'une ou l'autre; le déroulement n'est pas unique.
2. Assigner à la cellule choisie la plus grande valeur possible en tenant compte des contraintes d'offre et de demande.
3. Trouver la contrainte qui n'est pas satisfaite (offre ou demande).
4. Repérer dans la ligne ou dans la colonne de cette contrainte la cellule affichant le plus petit coût de transport (effectuer un choix au besoin).
5. Assigner à la cellule choisie la plus grande valeur possible en tenant compte des contraintes d'offre et de demande.
6. Continuer jusqu'à ce que toutes les contraintes soient satisfaites.

La solution de ce type de problème s’obtient par un algorithme, ce qui signifie qu’il faut prendre des décisions et faire des choix en cours de route. Ces décisions peuvent être arbitraires, par exemple lorsque plusieurs cellules ont le même coût de transport. Il faut dès lors s’attendre à ce que le déroulement diffère d’une personne à l’autre. Les assignations également peuvent différer, c’est-à-dire que deux solutions différentes peuvent donner le même coût. Il faut donc être en mesure d’analyser et de critiquer ses choix. On peut même avoir à analyser diverses solutions engendrant le même coût pour pouvoir faire un choix en tenant compte d’autres critères. Cela se produit, par exemple, lorsque l’étude des coûts de transport vise à déterminer à quel emplacement on doit construire une nouvelle usine. Le coût de transport des matériaux nécessaires à la production n’est alors pas le seul facteur dont il faille tenir compte.

AlgoTransport02

Origine	D_1	D_2	Offre
O_1	4 700	1 100	800
O_2	3	4 500	500
Demande	700	600	

Origines	D_1	D_2	Offre
O_1	4 –1	1 +1	800
O_2	3 +1	4 –1	500
Demandes	700	600	

Origine	D_1	D_2	Offre
O_1	4 200	1 600	800
O_2	3 500	4	500
Demande	700	600	

Origine	D_1	D_2	Offre
O_1	4 +1	1 –1	800
O_2	3 –1	4 +1	500
Demande	700	600	

Détermination d’une solution optimale

Algorithme des pierres de gué (ou stepping-stone)

Pour améliorer la solution de base, il faut voir comment variera le coût total si l’on attribue une unité à une variable nulle (ou à une cellule vide). Pour saisir le principe de cet algorithme, considérons un cas comportant peu de variables dont la solution initiale a été obtenue par la méthode du coin nord-ouest et dont le coût est

$$w = 4\,900\ \$.$$

La variable x_{21} est nulle. Si l’on assigne la valeur Δ à cette variable, il faudra, pour continuer à respecter les contraintes, soustraire Δ de x_{22}, ajouter Δ à x_{12} et soustraire Δ de x_{11}. Nous aurons alors un transfert dont on peut évaluer le coût. Dans l’évaluation du coût de transfert, on considère le transfert d’une unité pour faciliter les calculs. Le coût du transfert est alors donné par :

$$\begin{aligned} w &= c_{21} - c_{22} + c_{12} - c_{11} \\ &= 3 - 4 + 1 - 4 = -4. \end{aligned}$$

Le coût du transfert est négatif, ce qui signifie que, en donnant une valeur non nulle à x_{21}, on va diminuer le coût total. Chaque unité transférée diminuera ainsi le coût de 4 $.

Assignons donc à x_{21} la plus grande valeur possible. Puisque le transfert signifie une soustraction aux affectations des cellules $x_{11} = 700$ et $x_{22} = 500$, la plus grande valeur que l’on peut transférer est 500 unités et le coût total de ce transfert sera $-4\ \$ \times 500 = -2\,000\ \$$.

Le coût de cette solution est :

$$w = 2\,900\ \$.$$

Pour savoir si la solution est optimale, il faut refaire le test sur la cellule vide en assignant la valeur 1 à la variable x_{22} et en ajustant les autres variables en conséquence. Le coût de ce transfert est ainsi :

$$\begin{aligned} w &= c_{22} - c_{21} + c_{11} - c_{12} \\ &= 4 - 3 + 4 - 1 = 4. \end{aligned}$$

Le coût de ce transfert étant positif, il ferait augmenter le coût du transport. La solution optimale est donc atteinte.

PROCÉDURE

Recherche d'une solution optimale (pierres de gué)

1. Évaluer, pour chaque cellule vide, le coût du transfert d'une unité d'une cellule non vide à cette cellule vide en construisant une boucle de façon à respecter les contraintes du problème. Si l'on ajoute une unité dans une cellule, il faut soustraire une unité à une cellule de la même ligne et à une cellule de la même colonne pour que les contraintes soient toujours respectées. Le coût de transfert est alors obtenu en additionnant le coût de transfert des cellules de la boucle auxquelles on a ajouté une unité et en soustrayant de ce nombre le coût de transfert des cellules auxquelles on a retranché une unité.
2. Repérer la boucle donnant le coût de transfert négatif le plus important dans l'ensemble du tableau.
3. Repérer dans cette boucle, ainsi que parmi les cellules auxquelles on doit retrancher des unités, celle qui contient la plus petite valeur.
4. Assigner cette valeur à la cellule vide de la boucle et faire les ajustements dans les autres cellules de la boucle.
5. Évaluer à nouveau, pour chaque cellule vide, le coût de transfert d'une unité d'une cellule non vide à cette cellule vide et continuer le processus jusqu'à ce que les coûts de transfert d'une unité aux cellules vides soient tous positifs ou nuls. La solution optimale est alors atteinte.

REMARQUE
Lorsqu'il y a plusieurs boucles partant d'une cellule vide, il faut les vérifier toutes pour s'assurer que l'on fait le meilleur choix.

Appliquons cet algorithme au problème de la mise en situation. Considérons comme solution initiale celle qui a été obtenue par la méthode du coût minimal, soit :

Origine	Destination				Production
	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	4	1 60	2 20	6	80
O_2	6	4	3 50	5 40	90
O_3	5 50	2	6	4 50	100
Demande	50	60	70	90	270

REMARQUE

La plus petite valeur peut apparaître dans plus d'une cellule de la boucle, mais cela n'a pas d'importance; il faut choisir la plus petite valeur apparaissant dans une cellule à laquelle on doit soustraire des unités pour effectuer le transfert.

REMARQUE

Lorsque le coût de transfert dans une boucle est nul, cela signifie que tout changement à l'intérieur de cette boucle laisse le coût inchangé; la solution optimale n'est donc pas unique.

REMARQUE

Il serait bien sûr plus rassurant de savoir qu'il existe un scénario unique et inexorable menant tout droit à une réponse unique, mais ce n'est pas le cas. Il faut souligner que, dans plusieurs situations, il faut adopter une approche algorithmique pour analyser et prendre des décisions. Il n'est pas toujours facile en gestion de se convaincre que la solution retenue est la meilleure ni même qu'une telle solution existe dans la pratique. Il faut prendre la décision la plus éclairée en tenant compte de l'information disponible. Les démarches algorithmiques exigent une bonne capacité d'analyse, ce qui permet une meilleure compréhension du problème. La prise de décision est facilitée, mais jamais imposée.

Il est à noter que dans la réalité, il y a plus de variables que dans les situations présentées et l'ordinateur devient un outil incontournable.

Pour vérifier s'il est possible de trouver une solution plus économique, il faut évaluer les coûts des transferts dans les cellules vides. On peut attribuer une valeur à la cellule x_{11}, mais il faudra diminuer la valeur assignée dans les cellules de la même ligne et de la même colonne pour respecter les contraintes. Il faut de plus que les cellules impliquées dans le transfert forment une boucle fermée. En effet, si on ajoute une unité dans une cellule, il faut pouvoir la retrancher dans une cellule non vide de la même ligne et dans une cellule de la même colonne pour respecter les contraintes. On considère une cellule vide à la fois et, pour simplifier les calculs, on évalue le transfert d'une unité dans cette cellule. Pour attribuer une unité à la cellule x_{11}, il faut diminuer d'une unité la valeur assignée à la cellule x_{31} puisque la demande totale dans la colonne 1 est de 50 unités. Pour respecter la contrainte de la ligne 3, il faut maintenant augmenter d'une unité la valeur dans la cellule x_{34}. Ensuite, il faut diminuer d'une unité la valeur dans la cellule x_{24}, augmenter d'une unité la valeur dans la cellule x_{23} et diminuer d'une unité la valeur dans la cellule x_{13}, ce qui complète la boucle.

Origine	Destination				Production
	D 1	D 2	D 3	D 4	
O 1	4 + 1	60 1	20 2 − 1	6	80
O 2	6	4	50 3 +1	40 5 −1	90
O 3	50 5 −1	2	6	50 4 +1	100
Demande	50	60	70	90	270

On peut évaluer le coût d'un tel transfert, et les calculs à effectuer sont simples, car le transfert ne porte que sur une unité. Le transfert illustré dans le tableau précédent donne le coût :

$$c_{11} - c_{31} + c_{34} - c_{24} + c_{23} - c_{13} = 4 - 5 + 4 - 5 + 3 - 2 = -1.$$

Le transfert dans cette boucle donne un coût négatif; ce transfert diminue donc le coût global. Évidemment, il y a plusieurs boucles possibles dans le tableau. En pratique, on évalue le coût du transfert d'une unité dans chacune des cellules vides du tableau. Le tableau suivant représente le coût des transferts pour chaque cellule.

Cellule	Boucle	Coût
x_{11}	$c_{11} - c_{31} + c_{34} - c_{24} + c_{23} - c_{13}$	–1
x_{14}	$c_{14} - c_{13} + c_{23} - c_{24}$	2
x_{21}	$c_{21} - c_{31} + c_{34} - c_{24}$	0
x_{22}	$c_{22} - c_{12} + c_{13} - c_{23}$	2
x_{32}	$c_{32} - c_{12} + c_{13} - c_{23} + c_{24} - c_{34}$	1
x_{33}	$c_{33} - c_{23} + c_{24} - c_{34}$	4

On se rend compte que la seule valeur négative obtenue est celle de la boucle associée à la variable x_{11}. On diminuera donc la valeur du coût en donnant une valeur positive à cette variable. Nous devons cependant déterminer la plus grande valeur que l'on peut attribuer à x_{11} tout en respectant les contraintes. Dans la boucle associée à la variable x_{11} dans le tableau du haut de la page, la plus petite valeur dans les cellules où on effectue une soustraction est 20. C'est la quantité à transférer.

Origine	Destination				Production
	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	4 +20	60 1	20 2 − 20	6	80
O_2	6	4	50 3 + 20	40 5 − 20	90
O_3	50 5 − 20	2	6	50 4 + 20	100
Demande	50	60	70	90	270

En effectuant le transfert, on respecte les contraintes et on obtient :

Origine	Destination				Production
	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	4 20	1 60	2	6	80
O_2	6	4	3 70	5 20	90
O_3	5 30	2	6	4 70	100
Demande	50	60	70	90	270

Le coût de cette solution est :

$$w = 4 \times 20 + 1 \times 60 + 3 \times 70 + 5 \times 20 + 5 \times 30 + 4 \times 70 = 880.$$

Cela signifie un coût de 88 000 $. Le processus a été long, mais notre première solution avait un coût de 90 000 $. Nous venons d'économiser 2 000 $ en frais de transport. Ce n'est pas négligeable.

Pour savoir si la solution est optimale, il faut refaire le test pour chaque cellule vide de la solution. Le coût des transferts est donné dans le tableau suivant :

Cellule	Boucle	Coût
x_{13}	$c_{13} - c_{23} + c_{24} - c_{34} + c_{31} - c_{11}$	1
x_{14}	$c_{14} - c_{34} + c_{31} - c_{11}$	3
x_{21}	$c_{21} - c_{31} + c_{34} - c_{24}$	0
x_{22}	$c_{22} - c_{12} + c_{11} - c_{31} + c_{34} - c_{24}$	1
x_{32}	$c_{32} - c_{31} + c_{11} - c_{12}$	0
x_{33}	$c_{33} - c_{34} + c_{24} - c_{23}$	4

Les coûts de transfert étant tous positifs ou nuls, la solution optimale est atteinte. En effet, tout changement aurait pour effet d'accroître le coût du transport ou de le laisser inchangé.

12.4 Exercices

1. Le tableau suivant présente les données d'un problème de transport.

Centres de distribution

Centres de production

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
O_1	2 x_{11}	3 x_{12}	3 x_{13}	2 x_{14}	6 x_{15}	570
O_2	6 x_{21}	5 x_{22}	5 x_{23}	3 x_{24}	4 x_{25}	780
O_3	3 x_{31}	4 x_{32}	5 x_{33}	4 x_{34}	5 x_{35}	850
	270	420	240	440	310	

a) Écrire les équations de contrainte de l'offre de ce problème.

b) Écrire les équations de contrainte de la demande de ce problème.

2. Une entreprise possède trois usines O_1, O_2 et O_3 servant à fabriquer les composantes de produits qu'elle fait assembler dans deux autres usines D_1 et D_2. La première usine de production fabrique actuellement 600 unités par semaine, la seconde 540 unités par semaine et la troisième 800 unités par semaine.

Chacune des usines d'assemblage produit actuellement 970 unités par semaine.

Le coût de transport de O_1 vers D_1 est de 14 \$/u et vers D_2 de 20 \$/u. Le coût de O_2 vers D_1 est de 16 \$/u et vers D_2 de 18 \$/u. Le coût de O_3 vers D_1 est de 18 \$/u et vers D_2 de 16 \$/u.

a) Représenter le problème par un diagramme.

b) Regrouper les contraintes et les variables du problème dans un tableau.

c) Écrire la fonction à minimiser dans ce problème.

d) Écrire les contraintes de l'offre dans ce problème.

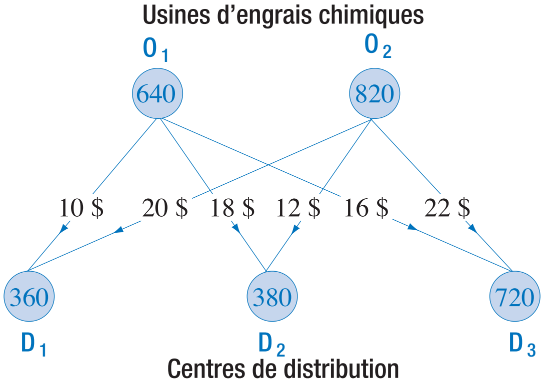
e) Écrire les contraintes de la demande dans ce problème.

f) Simplifier le tableau du problème en tenant compte des contraintes.

g) Déterminer les contraintes du problème simplifié découlant de la non négativité des variables.

h) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions admissibles pour les variables x_{11} et x_{21}.

3. Une entreprise d'engrais chimique possède deux usines O_1 et O_2 et trois centres de distribution D_1, D_2 et D_3. Le diagramme suivant indique le nombre de tonnes métriques d'engrais produit par chacune des usines, le nombre de tonnes qu'il faut livrer à chacun des centres de distribution et le coût du transport de chaque tonne vers ceux-ci.



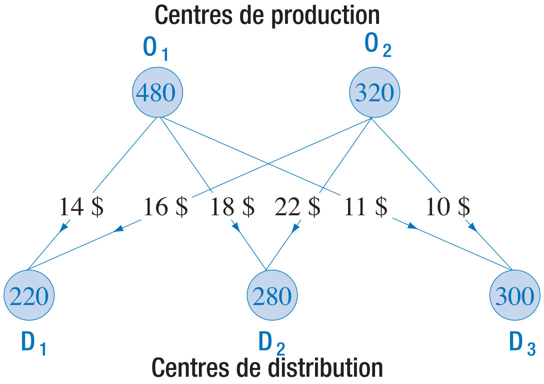
a) Représenter les données dans un tableau.

b) Établir les inéquations de contrainte et la fonction économique.

c) Représenter graphiquement le polygone des solutions admissibles.

d) Déterminer la solution optimale.

4. Une entreprise possède deux usines O_1 et O_2 et trois centres de distribution D_1, D_2 et D_3. Le diagramme suivant indique les quantités d'articles produits par chacune des usines, les quantités qu'il faut livrer à chacun des centres de distribution et le coût du transport d'une unité vers ces derniers.



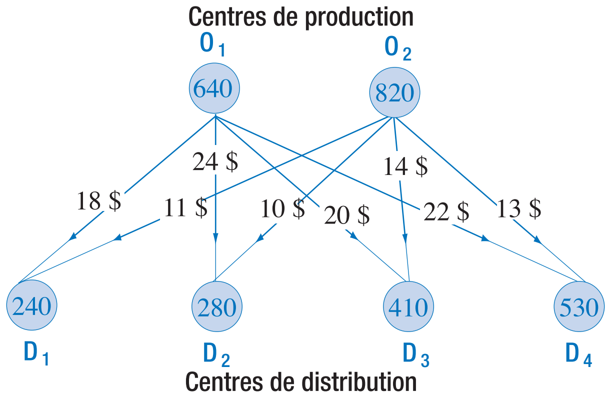
a) Représenter les données dans un tableau.

b) Établir les inéquations de contrainte et la fonction économique.

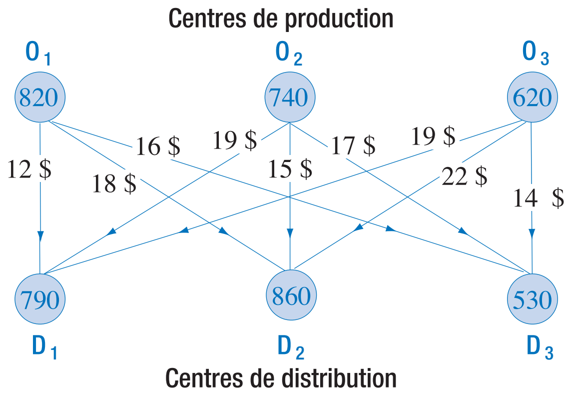
c) Représenter graphiquement le polygone des solutions réalisables.

d) Évaluer la fonction économique en chacun des sommets du polygone des solutions réalisables et trouver la solution optimale.

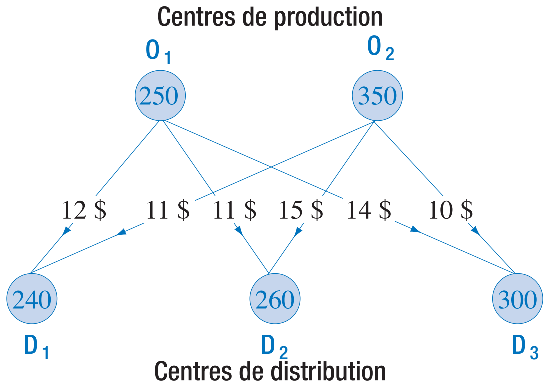
5. Une entreprise exploite deux usines O_1 et O_2 dont les produits sont acheminés dans quatre centres de distribution D_1, D_2, D_3 et D_4. Le diagramme ci-dessous indique les quantités produites par chacune des usines, les quantités qu'il faut livrer à chacun des centres de distribution et le coût du transport d'une unité vers ces derniers. Déterminer la solution pour laquelle le coût de transport est minimal.



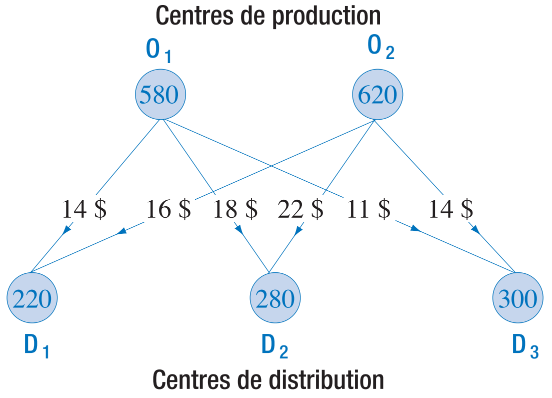
6. Une entreprise exploite trois usines O_1, O_2 et O_3 dont les produits sont acheminés dans trois centres de distribution D_1, D_2 et D_3. Le diagramme ci-dessous indique les quantités produites par chacune des usines, les quantités qu'il faut livrer à chacun des centres de distribution et le coût du transport d'une unité du produit vers ces centres. Déterminer la solution pour laquelle le coût de transport est minimal.



7. Une entreprise possède deux usines O_1 et O_2, et trois centres de distribution D_1, D_2 et D_3. Le diagramme suivant indique les quantités d'articles produits par chacune des usines, les quantités qu'il faut livrer à chacun des centres de distribution et le coût du transport d'une unité vers ces derniers. Déterminer la solution pour laquelle le coût de transport est minimal.



8. Une entreprise possède deux usines O_1 et O_2, et trois centres de distribution D_1, D_2 et D_3. Le diagramme ci-dessous indique les quantités d'articles produits par chacune des usines, les quantités qu'il faut livrer à chacun des centres de distribution et le coût du transport d'une unité vers ces derniers. Déterminer la solution pour laquelle le coût de transport est minimal.



9. Optimiser la répartition de wagons de marchandises sur un réseau de chemin de fer. Le problème consiste à déplacer les wagons des endroits où ils sont déchargés (offre) vers ceux où ils seront chargés (demande) tout en minimisant le coût de ces déplacements, qui sont donnés en dizaines de dollars.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Wagons en surplus
O_1	7	5	6	3	42
O_2	9	4	5	7	56
O_3	5	4	6	3	65
	38	26	52	47	

a) Combien y a-t-il de variables dans ce problème?

b) Combien y a-t-il de contraintes dans ce problème?

c) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coin nord-ouest et le coût correspondant à cette solution.

d) À l'aide de l'algorithme des pierres de gué, trouver la solution optimale à partir de la solution initiale obtenue par la méthode du coin nord-ouest.

e) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coût minimal et le coût correspondant à cette solution.

f) À l'aide de l'algorithme des pierres de gué, trouver la solution optimale à partir de la solution initiale obtenue par la méthode du coût minimal.

10. Un organisme qui recueille des paniers de fruits pour les détenus dispose de trois centres de collecte à partir desquels il approvisionne cinq centres de détention. L'offre représente le nombre de paniers recueillis chaque semaine dans les trois centres de collecte. Les paniers sont répartis au prorata de la population dans chacun des centres de détention. Les données du problème de transport sont consignées dans le tableau suivant, où les coûts de transport sont exprimés en dollars.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
O_1	6	3	5	2	2	14
O_2	2	4	3	1	1	17
O_3	1	2	3	4	4	28
	13	12	12	10	12	

a) Combien y a-t-il de variables dans ce problème?

b) Combien y a-t-il de contraintes dans ce problème?

c) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coin nord-ouest et le coût correspondant à cette solution.

d) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coût minimal et le coût correspondant à cette solution.

e) À l'aide de l'algorithme des pierres de gué, trouver une solution optimale.

11. Le ministère de la Justice a décidé de fermer un des centres de détention de l'exercice 2 et de regrouper les détenus dans deux des autres centres. Les paniers devant toujours être distribués au prorata de la population, les exigences de la demande ont été révisées dans le tableau suivant où les coûts de transport sont en dollars.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Offre
O_1	6	3	5	2	14
O_2	2	4	3	1	17
O_3	1	2	3	4	28
	13	12	18	16	

a) Combien y a-t-il de variables dans ce problème?

b) Combien y a-t-il de contraintes dans ce problème?

c) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coin nord-ouest et le coût correspondant à cette solution.

d) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coût minimal et le coût correspondant à cette solution.

e) À l'aide de l'algorithme des pierres de gué, trouver une solution optimale.

12. Un fabricant de chaises motorisées pour personnes à mobilité réduite possède trois centres de production et dessert cinq centres hospitaliers. Le tableau suivant donne les caractéristiques du problème de transport où les coûts sont en dizaines de dollars.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Offre
O_1	4	3	5	2	6	57
O_2	7	2	5	3	4	78
O_3	5	6	7	6	8	85
	27	42	24	44	31	

a) Combien y a-t-il de variables dans ce problème?

b) Combien y a-t-il de contraintes dans ce problème?

c) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coin nord-ouest et le coût correspondant à cette solution.

d) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coût minimal et le coût correspondant à cette solution.

13. Vous êtes à la tête d'une entreprise qui gère des machines distributrices de fruits, de légumes et de sandwichs. Vous disposez de quatre modèles de machines qui diffèrent quant à leur mécanisme et leur fiabilité. Vous constatez que les frais d'entretien pour ces machines dépendent de leur qualité et de leur emplacement. Le nombre de machines disponibles, les quantités demandées et les frais mensuels d'exploitation en dollars sont donnés dans le tableau suivant :

	M_1	M_2	M_3	M_4	Demande
Restaurants	8	6	7	5	12
Usines	4	5	7	6	10
Collèges	5	6	4	6	8
Stations-service	7	5	6	8	14
	6	11	9	18	

a) Combien y a-t-il de variables dans ce problème?

b) Combien y a-t-il de contraintes dans ce problème?

c) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coin nord-ouest et le coût correspondant à cette solution.

d) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coût minimal et le coût correspondant à cette solution.

e) À l'aide de l'algorithme des pierres de gué, trouver une solution optimale.

14. Une société possède trois usines pour manufacturer son produit. Ces usines ont été construites à proximité de ressources en matières premières, en eau et en énergie, mais elles sont éloignées des marchés. Pour faciliter la distribution, l'entreprise a implanté cinq centres de distribution pour approvisionner les marchés. On a dressé le tableau suivant donnant les coûts de transport en centaines de dollars, les capacités mensuelles de production et les exigences mensuelles d'approvisionnement des marchés.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Capacités
U_1	2	1	3	3	2	160
U_2	4	2	3	2	4	200
U_3	1	3	4	4	2	120
	80	75	125	140	60	

a) Combien y a-t-il de variables dans ce problème?

b) Combien y a-t-il de contraintes dans ce problème?

c) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coin nord-ouest et le coût correspondant à cette solution.

d) Trouver une solution de base initiale par la méthode du coût minimal et le coût correspondant à cette solution.

e) À l'aide de l'algorithme des pierres de gué, trouver une solution optimale.

15. Une entreprise possède quatre usines U_1, U_2, U_3 et U_4 servant à fabriquer les composantes de produits qu'elle fait assembler dans trois autres usines A_1, A_2 et A_3. La première usine de production fabrique actuellement 640 unités par semaine, la seconde 720 unités par semaine, la troisième 810 unités par semaine et la quatrième 560 unités par semaine.

L'usine A_1 peut assembler 910 unités par semaine, l'usine A_2, 840 unités par semaine et l'usine A_3, 980 unités par semaine.

Le coût de transport de U_1 vers A_1 est de 20 \$/u, vers A_2 de 19 \$/u et vers A_3 de 17 \$/u. Le coût de U_2 vers A_1 est de 24 \$/u, vers A_2 de 23 \$/u et vers A_3 de 16 \$/u. Le coût de U_3 vers A_1 est de 22 \$/u, vers A_2 de 20 \$/u et vers A_3 de 24 \$/u. Le coût de U_4 vers A_1 est de 18 \$/u, vers A_2 de 21 \$/u et vers A_3 de 21 \$/u.

a) Représenter le problème par un diagramme.
b) Regrouper les contraintes et les variables du problème dans un tableau.
c) Déterminer une solution de base initiale par la méthode du coin nord-ouest et le coût correspondant à cette solution.
d) Déterminer une solution de base initiale par la méthode du coût minimal et le coût correspondant à cette solution.
e) À l'aide de l'algorithme des pierres de gué, déterminer une solution optimale.