Jacques Bernoulli
1654-1705

La loi des grands nombres présentée par Jacques Bernoulli dans *Ars Conjectandi* **a de multiples applications dans le monde moderne. C'est la loi des grands nombres qui sert de fondement aux sondages d'opinions et à la méthode de Monte-carlo.**

Jacques Bernoulli
La loi des grands nombres

Le calcul d'une probabilité n'est pas toujours possible à partir d'un modèle théorique car dans certaines situations les variables en cause sont tellement nombreuses qu'il est impossible de construire un modèle théorique. Le théorème de Jacques Bernoulli, appelé *loi des grands nombres*, permet de résoudre cette difficulté. Selon la loi des grands nombres :

Si A est un événement de probabilité p dont la réalisation est le résultat d'une épreuve et f_n la fréquence de réalisation de l'événement A après n répétitions de l'épreuve, alors f_n tend vers p lorsque n tend vers l'infini.

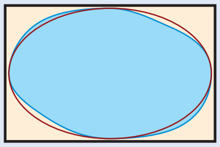
Ainsi, en lançant une pièce de monnaie un grand nombre de fois, la loi des grands nombres indique que le nombre de fois qu'on obtient face divisé par le nombre de lancers s'approche de plus en plus de 1/2 à mesure que *n* devient grand.

Ce théorème est intéressant car il permet d'estimer expérimentalement la probabilité de certains événements dont on ne pourrait obtenir la probabilité autrement. C'est ainsi que l'on peut estimer la probabilité qu'une personne de 35 ans vive encore 25 ans et déterminer en conséquence le montant de ses primes d'assurance. C'est en se basant sur la loi des grandes nombres que Nicolas Bernoulli, neveu de Jacques, estima que la probabilité de donner naissance à un garçon est de 18/35. C'est sur cette loi que reposent la plupart des sondages. En interrogeant un nombre suffisamment important de personnes choisies au hasard, on peut déterminer l'opinion probable de la population entière.

Il y a plusieurs phénomènes physiques qui illustrent cette loi des grands nombres. Citons le cas des molécules d'un gaz qui ont des trajectoires et des vitesses aléatoires mais qui exercent sur les parois d'un récipient une pression pratiquement constante lorsque le nombre des molécules est très grand.

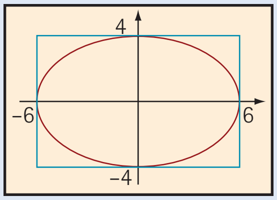
Méthode de Monte-Carlo

Le théorème de la loi des grands nombres est utilisé de nos jours en tirant profit de la rapidité des ordinateurs. Il sert de fondement à une technique qui s'appelle *Méthode de Monte-Carlo*. Ce terme désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes.



Supposons que l'on souhaite trouver l'aire d'un lac dont la forme pourrait être estimée par l'aire d'une ellipse.

En mesurant la longueur et la largeur du lac, on peut déterminer l'équation de l'ellipse par rapport à un système d'axes. Supposons que l'on a obtenu



$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$$

On peut estimer l'aire de l'ellipse en adoptant une approche probabiliste. On détermine un rectangle contenant l'ellipse. On programme alors l'ordinateur pour sélectionner aléatoirement des valeurs pour x telles que $-6 \leq x \leq 6$ et des valeurs pour y telles que $-4 \leq y \leq 4$. L'ordinateur détermine donc des couples (x; y) représentés graphiquement par des points dans le rectangle. On peut alors faire vérifier par ordinateur si les points sélectionnés sont à l'intérieur de l'ellipse ou à l'extérieur. Les points à l'intérieur ou sur l'ellipse satisfont la relation

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}\leq 1$$

alors que les points à l'extérieur de l'ellipse ne satisfont pas cette relation. Supposons maintenant que l'ordinateur a sélectionné 500 couples de valeurs et que parmi celles-ci il a détecté que 393 sont à l'intérieur ou sur l'ellipse. La probabilité qu'un point choisi au hasard dans le rectangle soit à l'intérieur ou sur l'ellipse est de 393/500. Cette probabilité représente la proportion de l'aire du rectangle occupée par l'ellipse. On estime donc que l'aire de l'ellipse est

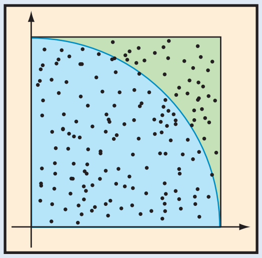
$$A=\frac{393}{500}\times 96 \approx 74{,}5 \text{ m}^2$$

Évidemment, dans ce cas on pourrait utiliser l'intégrale, mais notre propos était d'illustrer la méthode de Monte-Carlo basée sur la loi des grands nombres en présentant une situation simple. Il est assez rare qu'un lac ait la forme d'une ellipse. On pourrait avoir à approximer la forme par un polygone en situant les sommets dans un système d'axes. Les équations décrivant le polygone sont alors des équations de droites et le principe est le même. On peut voir que la méthode est adaptable à différentes situations.

Estimation de $\varpi/4$

On programme l'ordinateur pour sélectionner aléatoirement des valeurs pour x telles que $0 \leq x \leq 1$ et des valeurs pour y telles que $0 \leq y \leq 1$. L'ordinateur détermine donc des couples (x; y) représentés graphiquement par des points dans le carré illustré. On peut facilement par simple calcul, déterminer pour chacun des points si

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$



Si oui, le point est à l'intérieur du quart de cercle, sinon il est à l'extérieur du quart de cercle. Théoriquement, la probabilité que le point de coordonnées choisies aléatoirement appartienne au quart de cercle est $\pi/4$.

En faisant le rapport du nombre de points dans le disque au nombre de tirages, on obtient une approximation du nombre $\pi/4$ si le nombre de tirages est grand.

La qualité de l'estimation s'améliore en augmentant le nombre de tirages aléatoires de valeurs pour x et y. Il faut aussi s'assurer de la qualité du générateur aléatoire qui est primordiale pour avoir de bons résultats dans la méthode de Monte-Carlo.