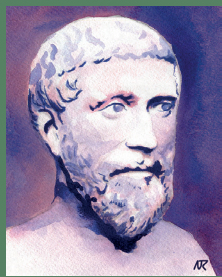
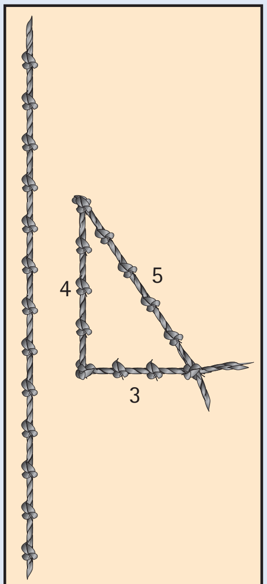


Illustration : Noémie Ross

Pythagore
vers –580 à –495

La représentation géométrique des nombres a permis aux Pythagoriciens de déterminer une démarche facilitant la recherche des nombres formant un triplet pythagoricien. Platon et Euclide ont par la suite développé des démarches permettant de trouver des triplets que la méthode pythagoricienne ne permettait pas de trouver.

Pythagore
Des triplets au théorème



Corde à treize nœuds

Triplets pythagoriciens

Durant ses voyages, Pythagore a appris l'existence de triplets de nombres, appelés maintenant *triplets pythagoriciens*, qui ont la caractéristique que la somme des carrés des deux plus petits est égale au carré du plus grand. Le plus connu des triplets pythagoriciens est formé des nombres 3, 4 et 5.

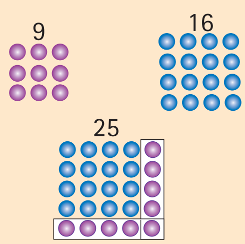
Les géomètres égyptiens obtenaient un angle droit à l'aide d'une corde à treize nœuds en formant un triangle dont les longueurs des côtés sont 3, 4 et 5. Ces cordes faisaient partie des instruments utilisés pour délimiter des parcelles de terrain après les crues du Nil.

Triplets pythagoriciens et nombres carrés

Les Pythagoriciens, habitués à la représentation géométrique des nombres, pouvaient facilement détecter une relation intéressante entre les carrés des nombres 3, 4 et 5. Ainsi, le carré de 3 est le gnomon du carré de 4 pour obtenir le carré de 5. Ce qui, en écriture moderne, donne :

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

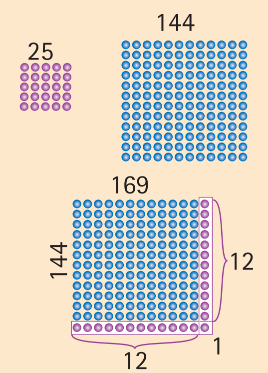
Les Pythagoriciens ont cherché à connaître tous les nombres carrés décomposables en une somme de deux carrés.



9 est le gnomon de 16 pour obtenir 25

Puisque le gnomon d'un nombre carré est toujours un nombre impair, cela signifie que tous les carrés impairs font partie d'un triplet. Ainsi, le nombre carré impair plus grand que 9 est 25. En considérant que $2n + 1 = 25$, on peut donc le disposer pour former le gnomon d'un autre nombre carré. On obtient la configuration ci-contre, soit :

$$12^2 + 5^2 = 13^2.$$



25 est le gnomon de 144 pour obtenir 169

En écriture moderne, les Pythagoriciens avaient constaté qu'en additionnant à n^2 le gnomon $2n + 1$, on a $(n + 1)^2$, soit :

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Il suffit donc de déterminer les nombres impairs qui sont des carrés pour découvrir d'autres triplets. C'est-à-dire les nombres m tels que :

$$m^2 = (2n + 1).$$

Connaissant un nombre impair qui est un carré, il est alors facile de déterminer les trois nombres du triplet. Par exemple, 49 est un nombre impair carré et en posant

$$m^2 = (2n + 1) = 49,$$

on a $m = 7$, $n = 24$ et $n + 1 = 25$. Ces trois nombres satisfont à la relation :

$$24^2 + 7^2 = 25^2.$$

1. Les Babyloniens connaissaient certains triplets pythagoriciens comme en témoigne la tablette d'argile appelée Plimpton 322.

Dans une approche moderne, on détermine une formulation générale en posant $m^2 = 2n + 1$. En isolant n, on a :

$$n = \frac{m^2 - 1}{2} \quad \text{et} \quad n + 1 = \frac{m^2 + 1}{2}.$$

En substituant ces expressions dans

$$n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

On a :

$$\left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2 \qquad *$$

où m est un nombre impair. Il suffit donc de donner à m une valeur impaire pour déterminer un triplet pythagoricien. Ainsi, en posant $m = 9$, on obtient

$$40^2 = 9^2 = 41^2.$$

La relation *, appelée *formule de Pythagore*, est valide pour tout entier impair $m \geq 3$.

Formule de Pythagore

Si m est un nombre entier impair tel que $m \geq 3$, alors

$$\left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2$$

est un triplet pythagoricien.

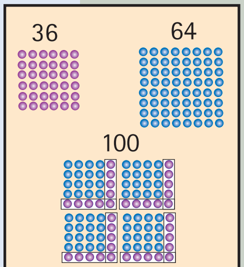
Des triplets au théorème

La recherche des triplets a-t-elle joué un rôle dans la découverte du théorème? Pour les Pythagoriciens, les produits de nombres représentaient des aires de rectangles et les nombres carrés représentaient des aires de carrés. Il était naturel pour eux de considérer que le carré des nombres d'un triplet était le reflet d'une relation entre les aires de carrés. De plus, le triplet 3, 4 et 5 forme un triangle rectangle, ce qui signifie que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse de ce triangle est égal à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit. A-t-on la même propriété pour tous les triangles rectangles? Les triplets pythagoriciens forment-ils tous des triangles rectangles? La culture du secret des Pythagoriciens ne nous permet pas de savoir avec certitude comment ils démontraient ce théorème ni comment ils sont parvenus à l'énoncer. Ont-ils découvert cette propriété en constatant qu'un nombre carré impair est toujours le gnomon d'un nombre carré ?

Voir :
Pythagore05
Pythagore05

Formule de Platon

Peut-on déterminer tous les triplets pythagoriciens avec la formule de Pythagore? Le philosophe Platon, qui a été initié à la philosophie pythagoricienne par Archytas de Tarente, a répondu par la négative à cette question en tenant le raisonnement suivant qui est illustré par la figure ci-contre. Si on reproduit quatre fois la configuration des carrés des nombres d'un triplet, on obtient encore un triplet pythagoricien dont tous les chiffres sont pairs.



$4\times(3^2 + 4^2) = 4\times5^2$
$4\times3^2 + 4\times4^2 = 4\times5^2$
$36 + 64 = 100$
$6^2 + 8^2 = 10^2$

Dans une approche moderne, le raisonnement de Platon revient à multiplier les deux membres de l'équation par 4. Cela donne :

$$(m^2 - 1)^2 + 4m^2 = (m^2 + 1)^2.$$

En simplifiant cette expression, on obtient la *relation de Platon* soit :

$$(m^2 - 1)^2 + (2m)^2 = (m^2 + 1)^2.$$

Cette relation est valide pour tout $m \geq 2$. C'est-à-dire qu'en remplaçant n par un nombre entier plus grand ou égal à 2, on obtient un triplet pythagoricien[1].

Formule de Platon

Si $m \geq 2$ est un nombre entier, alors

$$(m^2 - 1)^2 + (2m)^2 = (m^2 + 1)^2$$

est un triplet pythagoricien.

1. Au lemme 1 de la proposition 29 du livre X, Euclide pose le problème : trouver deux nombres carrés de manière que leur somme soit un carré. Il y développe une méthode qui, en écriture moderne, s'énonce :
Soit deux nombres entiers $m > n$, alors
$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$