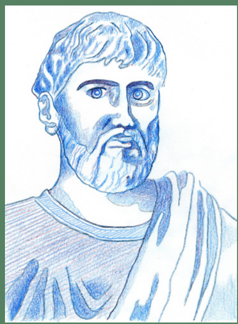


Archimède
~287 à ~212

Dans sa démarche pour déterminer la valeur de ϖ, Archimède a utilisé le théorème sur la division en segments du côté opposé à un angle par la bissectrice de celui-ci.

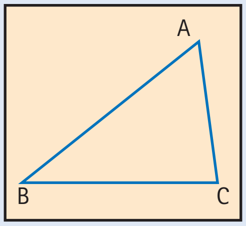
Bissectrice

Proposition

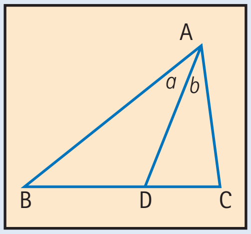
La bissectrice d'un angle d'un triangle divise le côté opposé à cet angle dans le rapport des côtés adjacents.

Démonstration

Soit ABC un triangle quelconque.



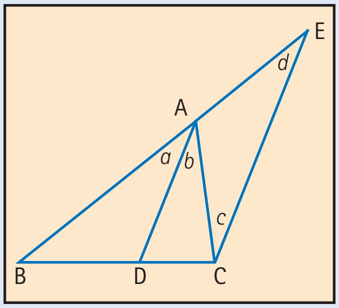
Traçons AD, la bissectrice de l'angle A.



On veut montrer que :

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$$

Traçons CE, parallèlement à la bissectrice AD et prolongeons le côté BA jusqu'à sa rencontre avec la parallèle en E.



On a alors :

$\angle a = \angle b$, car AD est la bissectrice de l'angle en A.

$\angle b = \angle c$, comme angles alternes-internes.

$\angle a = \angle d$, comme angles correspondants.

On a donc $\angle c = \angle d$, et le triangle ACE est isocèle.

Par conséquent, $\overline{EA} = \overline{CA}$ comme côtés opposés aux angles égaux d'un triangle isocèle. Le segment AD est alors une droite parallèle au côté CE du triangle BEC. Cette droite détermine des segments proportionnels sur les côtés BE et BC. On a donc :

$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{EA}}$ et, puisque $\overline{EA} = \overline{CA}$,

on a $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}}$.

Ce qui complète la preuve.