2

DÉRIVÉE : FONCTIONS ALGÉBRIQUES

Dériver des fonctions algébriques.

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- la dérivation d'une fonction en appliquant la définition;
- l'application de l'opérateur de dérivation;
- la recherche des zéros de la dérivée d'une fonction algébrique simple.

OBJECTIFS

2.1 Utiliser la définition de fonction dérivée et les propriétés de l'opérateur de dérivation pour dériver des sommes et des différences de fonctions.

2.2 Utiliser la définition de fonction dérivée et les propriétés de l'opérateur de dérivation pour dériver des produits et des quotients de fonctions.

2.1 Dérivée, fonctions polynomiales

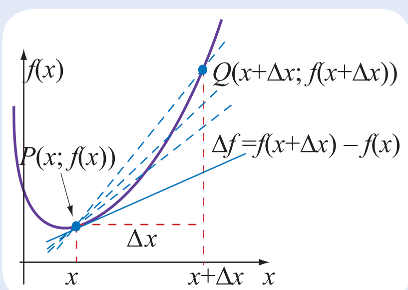
Nous avons d'abord estimé le taux de variation ponctuel en un point (c; $f(c)$) par calculs successifs pour ensuite développer une approche qui nous amenait à une indétermination de la forme 0/0. Pour lever cette indétermination, il faut modifier algébriquement le rapport. Nous généralisons maintenant notre approche pour déterminer la fonction dérivée qui décrit le taux de variation ponctuel en fonction de l'abscisse du point.

DerivPoint01

DerivPoint02

Fonction puissance

On peut décrire algébriquement le taux de variation ponctuel en fonction de l'abscisse du point comme l'indique la définition suivante :



Fonction dérivée

Soit f, une fonction réelle. La **fonction dérivée** de f, notée $f\,'$, est la fonction définie par :

$$f\,'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ou de façon équivalente, et pour alléger l'écriture :

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

REMARQUE

La fonction dérivée, comme l'indique sa définition, décrit le comportement du taux de variation ponctuel de la fonction $f(x)$ en fonction de l'abscisse x du point.

DerivPuissance01

EXEMPLE 2.1.1

Soit la fonction définie par $f(x) = k$ où k est une constante.

a) Déterminer sa fonction dérivée.

b) À l'aide de la fonction dérivée, calculer la pente de la tangente au point d'abscisse 4.

Solution

a) L'image de x par la fonction est :

1. $f(x) = k$

L'image de $x + \Delta x$ par la fonction est :

2. $f(x + \Delta x) = k$

La variation de la fonction sur l'intervalle [x; $x+\Delta x$] est :

3. $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$

Le taux de variation moyen de la fonction sur [x; $x+\Delta x$] est :

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0.$

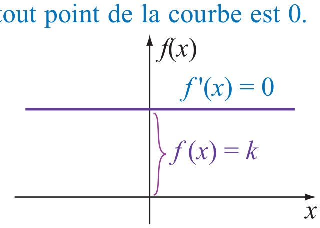
On a levé l'indétermination et la fonction dérivée est obtenue en évaluant la limite lorsque Δx tend vers 0, ce qui donne :

5. $f\,'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (0) = 0$

La fonction dérivée de la fonction $f(x) = k$ est donc $f\,'(x) = 0$.

REMARQUE

L'interprétation des résultats obtenus à l'exemple 2.1.1 est assez simple. Puisque la fonction définie par $f(x) = k$ est une fonction constante, elle est représentée graphiquement par une droite horizontale. Sa dérivée est nulle car la pente de la tangente en tout point de la courbe est 0.



b) La pente de la tangente au point d'abscisse 4 est l'image de cette valeur par la fonction dérivée, soit :

$$f'(4) = 0.$$

EXEMPLE 2.1.2

Soit la fonction définie par $f(x) = ax + b$, où a et b sont des constantes.

a) Déterminer sa fonction dérivée.

b) À l'aide de la fonction dérivée, calculer la pente de la tangente au point d'abscisse 2 et au point d'abscisse 4.

Solution

a) 1. $f(x) = ax + b$

2. $f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x) + b = ax + a\Delta x + b$

3. $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = a\Delta x$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{a\Delta x}{\Delta x} = a$

On a levé l'indétermination et la fonction dérivée est obtenue en évaluant la limite lorsque Δx tend vers 0, ce qui donne :

5. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (a) = a$

La fonction dérivée de la fonction $f(x) = ax + b$ est donc $f'(x) = a$.

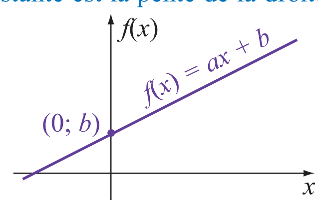
b) La pente de la tangente au point d'abscisse 2 est l'image de cette valeur par la fonction dérivée, soit :

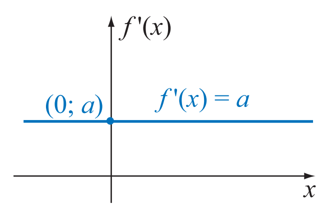
$$f'(2) = a.$$

La pente de la tangente au point d'abscisse 4 est $f'(4) = a$.

REMARQUE

Puisque la fonction $f(x) = ax + b$ est une fonction affine, elle est représentée graphiquement par une droite dont la pente est a et l'ordonnée à l'origine est b. La fonction dérivée décrit le comportement de la pente de la tangente à la courbe en fonction de l'abscisse x. La dérivée est une fonction constante et cette constante est la pente de la droite.





EXEMPLE 2.1.3

Soit la fonction définie par $f(x) = x^2$.

a) Déterminer sa fonction dérivée.

b) À l'aide de la fonction dérivée, calculer la pente de la tangente aux points d'abscisse –1, 0 et 1,5. Interpréter graphiquement l'information véhiculée par le signe de la dérivée en un point.

Solution

a) 1. $f(x) = x^2$

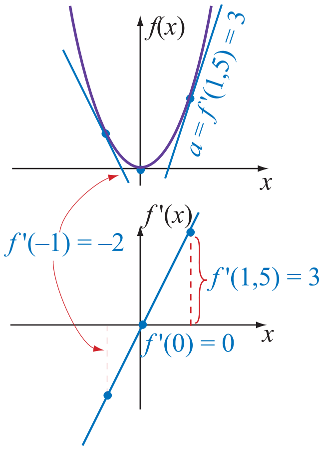
2. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

3. $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

On a levé l'indétermination et la fonction dérivée est obtenue en évaluant la limite lorsque Δx tend vers 0, ce qui donne :

5. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$



La fonction dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ est donc $f'(x) = 2x$.

b) La pente de la tangente au point d'abscisse –1 est l'image de cette valeur par la fonction dérivée, soit :

$$f'(-1) = 2 \times -1 = -2.$$

L'image de –1 par la fonction dérivée, soit $f'(-1)$ donne la pente de la tangente au graphique de la fonction f au point d'abscisse –1. La pente est négative, ce qui signifie que la fonction est décroissante au point d'abscisse –1. De la même façon, on trouve :

$$f'(0) = 2 \times 0 = 0.$$

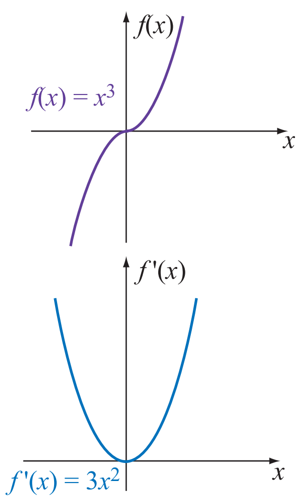
L'image de 0 par la fonction dérivée, soit $f'(0)$ donne la pente de la tangente au graphique de la fonction f au point d'abscisse 0. La pente est nulle, ce qui signifie que la tangente est horizontale en ce point et la fonction est stationnaire.

$$f'(1{,}5) = 2 \times 1{,}5 = 3.$$

L'image de 1,5 par la fonction dérivée, soit $f'(1{,}5)$ donne la pente de la tangente au graphique de la fonction f au point d'abscisse 1,5.

La pente est positive, ce qui signifie que la fonction est croissante au point d'abscisse 1,5.

EXEMPLE 2.1.4



Soit la fonction définie par $f(x) = x^3$.

a) Déterminer sa fonction dérivée.

b) À l'aide de la fonction dérivée, calculer la pente de la tangente aux points d'abscisse –1, 0 et 1. Interpréter graphiquement l'information véhiculée par le signe de la dérivée en ces points.

■ *Solution*

a) En procédant sans décomposer en étapes, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) = 3x^2. \end{aligned}$$

La fonction dérivée de $f(x) = x^3$ est donc $f'(x) = 3x^2$.

b) $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$. La fonction est croissante en (–1; –1).

$f'(0) = 3(0)^2 = 0$. La fonction est stationnaire en (0; 0).

$f'(1) = 3(1)^2 = 3$. La fonction est croissante en (1; 1).

En observant les dérivées obtenues aux exemples 2.1.3 et 2.1.4, on remarque quelque chose d'intéressant :

- la dérivée de $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$;
- la dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$.

Ces résultats suggèrent la conjecture suivante :

- la dérivée de $f(x) = x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$ où n est un nombre entier.

THÉORÈME

Dérivée d'une fonction puissance entière positive

Pour tout nombre entier positif n, la dérivée d'une fonction de la forme $f(x) = x^n$ est :

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

DerivPuissance02

Démonstration

1. $f(x) = x^n$
2. $f(x+h) = (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$
3. $\Delta f = nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$

$$= h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + h^{n-1}\right)$$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + h^{n-1}\right)}{h}$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + h^{n-1}$$

5. $f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$

La fonction dérivée de $f(x) = x^n$ est donc $f'(x) = nx^{n-1}$.

REMARQUE
Grâce à ce théorème, on peut directement écrire la dérivée d'une fonction puissance pour n entier positif.

REMARQUE
La variation Δx est représentée par h.

EXEMPLE 2.1.5

Exposants_01

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Déterminer sa fonction dérivée.

b) À l'aide de la fonction dérivée, déterminer le taux de variation de la fonction à $x = 1/2$.

c) À l'aide de la fonction dérivée, déterminer la pente de la tangente au graphique de la fonction en $x = 0$, $x = 1$ et en $x = 2$. Représenter graphiquement.

Solution

a) 1. $f(x) = 1/x$

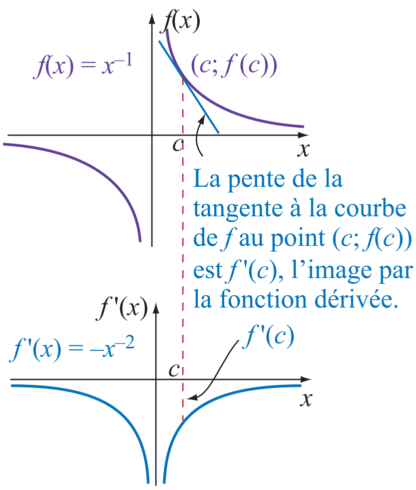
2. $f(x + h) = 1/(x + h)$

3. $\Delta f = f(x+h) - f(x) = \dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)} = \dfrac{-h}{x(x+h)}$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-h}{x(x+h)} = \dfrac{-1}{x(x+h)}$

5. $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{-1}{x(x+h)} = \dfrac{-1}{x^2}$

La fonction dérivée de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est donc $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.



b) Le taux de variation de la fonction à $x = 1/2$ est l'image par la fonction dérivée, soit :

$$f'(1/2) = \frac{-1}{(1/2)^2} = \frac{-1}{1/4} = -4.$$

c) La pente de la tangente à la courbe de la fonction en un point d'abscisse c est l'image par la fonction dérivée. Dans ce cas, la dérivée à 0 n'est pas définie car on a une division par 0, et :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

Ailleurs, la dérivée est définie et donne :

$$f'(1) = \frac{-1}{(1)^2} = -1 \text{ et } f'(2) = \frac{-1}{(2)^2} = \frac{-1}{4}.$$

La représentation graphique est donnée ci-contre.

EXEMPLE 2.1.6

Exposants_06

DerivPuissance03

Soit la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Déterminer sa fonction dérivée.

b) Déterminer le taux de variation de la fonction à $x = 1/4$.

c) Déterminer la pente de la tangente au graphique de la fonction en $x = 0$, $x = 1$ et en $x = 2$. Représenter graphiquement.

Solution

a) 1. $f(x) = \sqrt{x}$

2. $f(x+h) = \sqrt{x+h}$

3. $$\Delta f = f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right) \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

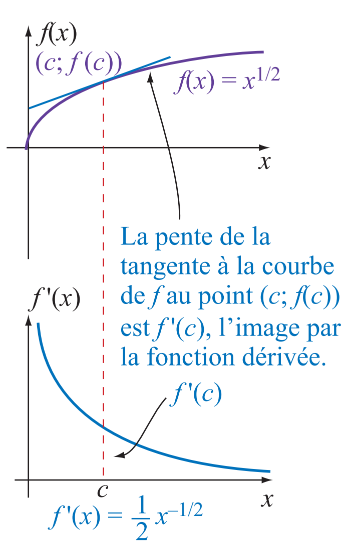
$$= \frac{x+h-x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

4. $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{h} \times \frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

En évaluant la limite lorsque h tend vers 0, on a alors :

5. $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La fonction dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ est donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.



b) Le taux de variation de la fonction à $x = 1/4$ est l'image par la fonction dérivée, soit :

$$f'(1/4) = \frac{1}{2\sqrt{1/4}} = \frac{1}{2(1/2)} = 1.$$

c) La pente de la tangente à la courbe de la fonction en un point d'abscisse c est l'image par la fonction dérivée. Dans ce cas, la dérivée à 0 n'est pas définie car on a une division par 0. Cependant,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \times 0^+} = \infty.$$

Cela signifie qu'au point (0; 0), la tangente à la courbe de la fonction f est verticale. Ailleurs, la dérivée est définie et donne :

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \text{ et } f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La représentation graphique est donnée à la page précédente.

En exprimant les fonctions des deux exemples précédents à l'aide des exposants, on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \text{ et sa dérivée est } f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}.$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \text{ et sa dérivée est } f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On constate qu'il est possible de dériver ces deux fonctions en appliquant la procédure définie dans le théorème de la dérivation d'une fonction puissance entière positive. Cela laisse entrevoir la possibilité de généraliser ce théorème. Nous accepterons cette généralisation sans démonstration

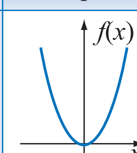
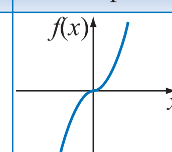
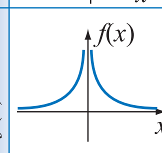
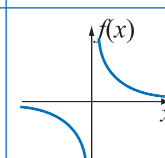
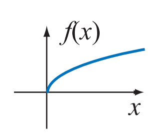
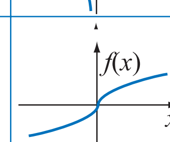
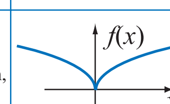
REMARQUE
Une fonction puissance peut avoir diverses formes comme on peut le voir dans le tableau suivant. Cependant, la dérivée est toujours donnée par :

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

THÉORÈME

Dérivée d'une fonction puissance (notation des fonctions)

Pour tout nombre rationnel n, la dérivée d'une fonction de la forme $f(x) = x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$.

	n pair	n impair
$f(x) = x^n$		
$f(x) = x^{-n}$		
$f(x) = x^{1/n}$		
$f(x) = x^{2/n}$	Si n est pair, après simplification, on a une forme $1/n$.	

NOTATIONS

Pour poursuivre notre étude, nous aurons besoin de diverses notations pour représenter la dérivée d'une fonction et un opérateur de dérivation.

a) notation avec y

Supposons que y est une fonction de x, par exemple $y = x^2$. Nous noterons la dérivée de cette expression de deux façons, soit :

$$\frac{dy}{dx} = 2x \text{ ou encore } y' = 2x.$$

b) notation fonctionnelle

Si on utilise la notation fonctionnelle, on note la dérivée par $f'(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$. Ainsi, pour la fonction $y = f(x) = x^2$, on notera :

$$f'(x) = 2x \text{ ou encore } \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Lorsqu'on parle de la fonction dérivée de f, on l'appelle simplement f', si on n'a pas à donner sa règle de correspondance.

c) opérateur de dérivation

Pour simplifier l'écriture, il est souvent utile d'avoir un symbole qui signifie **dériver l'expression qui suit**. Ce symbole, appelé **opérateur de dérivation**, est :

$$\frac{d}{dx}.$$

L'opérateur de dérivation affecte l'expression entre parenthèses à sa droite. Ainsi,

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

signifie : **dériver l'expression dans la parenthèse**. Une fois la dérivée effectuée, on a :

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2x.$$

d) taux de variation ponctuel à $x = c$

Le taux de variation ponctuel à $x = c$ peut être représenté par :

$$f'(c) \text{ ou } \left.\frac{dy}{dx}\right|_c .$$

NOTE HISTORIQUE

Historiquement, plusieurs mathématiciens ont développé des notations personnelles lorsque confrontés à des situations nouvelles. Certaines de ces notations ont été conservées telles quelles, d'autres ont été modifiées par l'usage ou par la nécessité de distinguer des concepts en les précisant. (NH Leibniz05)

En résumé :

Fonction dérivée $f'(x)$, y' ou $\dfrac{dy}{dx}$.

Taux de variation ponctuel en un point d'abscisse c, $f'(c)$ ou $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_c$.

Pour indiquer qu'il faut dériver l'expression à l'intérieur d'une parenthèse,

$$(\cdots)' \text{ ou } \frac{d}{dx}(\cdots).$$

On peut alors écrire l'énoncé du théorème de la dérivée d'une fonction puissance sous la forme simplifiée suivante.

DerivPuissance04

THÉORÈME

Dérivée d'une fonction puissance (opérateur de dérivation)

Pour tout nombre rationnel n, $\dfrac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$.

EXEMPLE 2.1.7

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x$ (représenter graphiquement et interpréter le résultat).

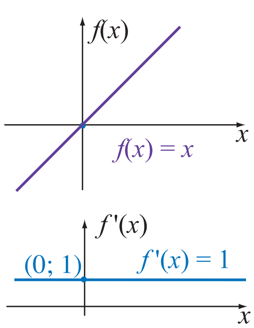
b) $f(x) = x^5$ c) $f(x)=\dfrac{1}{x^5}$ d) $f(x)=\sqrt{x}$

Solution

a) En utilisant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}\left(x^1\right)=1\times x^0=1.$$

La dérivée est $f'(x) = 1$. Cela signifie qu'en tout point du graphique de la fonction $f(x) = x$, la pente de la tangente est 1.



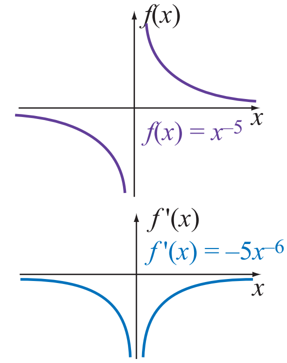
b) En utilisant l'opérateur de dérivation, on a $\dfrac{d}{dx}\left(x^5\right)=5x^4$.

La dérivée est $f'(x) = 5x^4$.

c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^5}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(x^{-5}\right)=-5x^{-6}=\dfrac{-5}{x^6}$. La dérivée est $f'(x)=\dfrac{-5}{x^6}$.

d) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right)=\dfrac{1}{2}x^{-1/2}=\dfrac{1}{x^{1/2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

La dérivée est $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.



Propriétés de l'opérateur de dérivation

Nous sommes parvenus à une première généralisation à partir de la définition de fonction dérivée. Cela est intéressant pour nous, car nous voulons savoir comment trouver efficacement la dérivée d'une fonction polynomiale. Par exemple, comment dériver des fonctions comme :

$$f(x) = x^2 - 2x \text{ ou } f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x + 5.$$

On peut facilement remarquer qu'une fonction polynomiale est une combinaison de fonctions puissance. Les trois théorèmes qui suivent nous indiquent comment procéder lorsque la règle de correspondance comporte le produit par une constante, une somme ou une différence.

THÉORÈME

Dérivée du produit d'une constante et d'une fonction

Soit $f = ku$, une fonction qui est le produit d'une constante k par une fonction dérivable u. La dérivée de f est le produit de la constante k et de la dérivée de u. Symboliquement, on écrit :

$$(ku)'=ku' \text{ ou encore } \frac{d}{dx}(ku)=k\frac{du}{dx}.$$

DerivAlgebre01

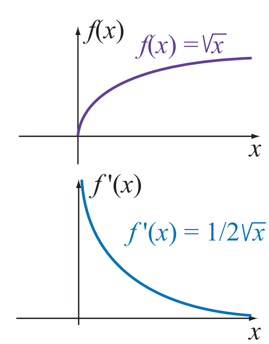
Démonstration

Puisque la fonction u est dérivable par hypothèse, on a, par définition de la dérivée :

$$u'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}.$$

On veut déterminer la dérivée de $f = k\,u$, soit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ par la définition de la dérivée;}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{ku(x+h)-ku(x)}{h}, \text{ par la définition de la fonction } f;\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{k\left(u(x+h)-u(x)\right)}{h}, \text{ par mise en évidence.}\end{aligned}$$



En admettant que la limite du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de la constante par la limite de la fonction, on a

REMARQUE
En utilisant la notation de l'opérateur de dérivation, on a :

$$\frac{d}{dx}(ku) = k\frac{du}{dx}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= k\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}, \\ &= k\,u'(x), \text{ par définition de la dérivée.} \end{aligned}$$

THÉORÈME

Dérivée d'une somme de fonctions

Soit $f = u + v$, une fonction qui est la somme de deux fonctions dérivables u et v. La dérivée de f est la somme des dérivées des fonctions u et v. Symboliquement, on écrit :

$$(u+v)' = u' + v' \text{ ou encore } \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Démonstration

Puisque les fonctions u et v sont dérivables par hypothèse, on a par définition de la dérivée :

$$u'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \text{ et } v'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

On veut déterminer la dérivée de $f = u + v$, soit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ par la définition de la dérivée;} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\big(u(x+h)+v(x+h)\big)-\big(u(x)+v(x)\big)}{h}, \text{ par la définition de } f\,; \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\big(u(x+h)-u(x)\big)+\big(v(x+h)-v(x)\big)}{h}, \text{ en regroupant.} \end{aligned}$$

REMARQUE
En utilisant la notation de l'opérateur de dérivation, on a :

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

En admettant que la limite d'une somme de fonctions est égale à la somme des limites, lorsque ces limites existent, on a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\ &= u'(x) + v'(x), \text{ par définition de la dérivée.} \end{aligned}$$

THÉORÈME

Dérivée d'une différence de fonctions

Soit $f = u - v$, une fonction qui est la différence de deux fonctions dérivables u et v. La dérivée de f est la différence des dérivées des fonctions u et v. Symboliquement, on écrit :

$$(u-v)' = u' - v' \text{ ou encore } \frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

REMARQUE
On peut démontrer ce théorème en suivant la même démarche que dans le théorème précédent.
En utilisant la notation de l'opérateur de dérivation, on a :

$$\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

EXEMPLE 2.1.8

Soit la fonction définie par la règle de correspondance $f(x) = x^2 - 2x$.

a) Trouver la dérivée de cette fonction.

b) Calculer la pente de la tangente au graphique de la fonction f aux points d'abscisse 0, 1 et 2.

■ ***Solution***

a) En utilisant l'opérateur de dérivation, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\left(x^2-2x\right)=\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-\frac{d}{dx}(2x)=\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-2\frac{d}{dx}(x)=2x-2(1).$$

La fonction dérivée est donc :

$$f'(x) = 2x - 2$$

b) Par définition de la dérivée, la pente de la tangente à la courbe en un point d'abscisse a est l'image de a par la fonction dérivée. Les pentes demandées sont donc respectivement

$f'(0) = (2 \times 0) - 2 = -2$; $f'(1) = (2 \times 1) - 2 = 0$ et $f'(2) = 2$.

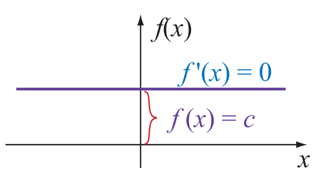
Dérivée d'une constante

Lorsqu'on doit dériver une fonction, il faut gérer correctement les constantes. Nous avons vu comment dériver le produit d'une constante et d'une fonction; il nous faut également voir comment dériver une constante qui ne multiplie pas une fonction. En pratique, nous les considérons comme des fonctions constantes. Ainsi, la fonction $f(x) = 3x^5 + 2$ peut être considérée comme la somme de deux fonctions dont l'une est la fonction constante $v(x) = 2$. Puisque cette fonction est constante, elle ne varie pas et son taux de variation est nul. Graphiquement, cette fonction est une droite horizontale et la pente de cette droite est égale à 0.

THÉORÈME

Dérivée d'une fonction constante (Exemple 2.1.1)

Soit f, une fonction constante, alors la dérivée de f est égale à 0.



PROCÉDURE

Dérivée d'une fonction polynomiale

1. Appliquer l'opérateur de dérivation à chacun des termes de la fonction.
2. Appliquer la règle du produit d'une constante et d'une fonction (constante multiplicative).
3. Appliquer la règle de dérivation d'une fonction puissance.
4. Appliquer la règle de la dérivée d'une constante additive.

2.2 EXERCICES

1. En appliquant la définition de fonction dérivée, soit $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ démontrer les résultats suivants :
   a) Si $f(x) = x^2 + 4$ alors $f'(x) = 2x$
   b) Si $f(x) = x^3 + 2x$ alors $f'(x) = 3x^2 + 2$
   c) Si $f(x) = x^3 + 3x^2$ alors $f'(x) = 3x^2 + 6x$
   d) Si $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, alors $f'(x)=\dfrac{-2}{x^3}$.
   e) Si $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$, alors $f'(x)=\dfrac{-1}{(x+3)^2}$.
   f) Si $f(x)=\sqrt{x+1}$, alors $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.
   g) Si $f(x)=\sqrt{3x-5}$, alors $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-5}}$.
   h) Si $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$, alors $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+4)^2}$.

2. En utilisant l'opérateur de dérivation et ses propriétés, déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes et exprimer le résultat avec des exposants positifs ou avec des radicaux, le cas échéant.

a) $f(x) = 2x$	k) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$
b) $f(x) = x^2 - 3x$	l) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$
c) $f(x) = 4x^2-5x+3$	m) $f(x)=\sqrt{x^3}$
d) $f(x) = x^3 - 4x$	n) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
e) $f(x) = 2x^3 + 8x$	o) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$
f) $f(x) = x^4 - 3x^3+2x$	p) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$
g) $f(x)=\sqrt{x}$	q) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
h) $f(x)=x\sqrt{x}$	r) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$
i) $f(x)=\sqrt[3]{x}$	s) $f(x)=x^3+\dfrac{3x}{x^3}-\dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$
j) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$	

3. Écrire les fonctions suivantes comme somme de fonctions puissance et déterminer la fonction dérivée.
   a) $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{x^2}$
   c) $f(x)=\dfrac{x^3-\sqrt{x}}{x}$
   b) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$
   d) $f(x)=\dfrac{x^4-5x+1}{x\sqrt{x}}$

4. Soit $f(x) = x^2 - 3x + 4$.
   a) Déterminer sa fonction dérivée.
   b) Calculer la pente de la tangente à la fonction f aux points d'abscisse –1, 0 et 1.
   c) Trouver pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée s'annule. Donner l'interprétation de ce taux de variation.
   d) Trouver dans quels intervalles la fonction est croissante, décroissante.

5. Soit $f(x) = x^3 - 12x$.
   a) Déterminer sa fonction dérivée.
   b) Calculer la pente de la tangente à la fonction f aux points d'abscisse –4, 1 et 5.
   c) Trouver pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée s'annule. Donner l'interprétation de ce taux de variation.
   d) Trouver dans quels intervalles la fonction est croissante, décroissante.

6. Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.
   a) Déterminer sa fonction dérivée.
   b) Calculer la pente de la tangente à la fonction f aux points d'abscisse –3, 0 et 3.
   c) Trouver en quel(s) point(s) la tangente est horizontale.
   d) Trouver dans quels intervalles la fonction est croissante, décroissante.

7. Soit $f(x)=\sqrt[3]{x}$
   a) Déterminer sa fonction dérivée et donner son domaine.
   b) Calculer la pente de la tangente à la fonction f aux points d'abscisse –8, 0 et 8.
   c) Trouver pour quelle(s) valeur(s) de x la dérivée s'annule.
   d) Trouver dans quels intervalles la fonction est croissante, décroissante.

2.3 Produits et quotients

Théorèmes sur les produits et quotients

THÉORÈME

Dérivée d'un produit de fonctions

Soit $f = uv$, une fonction qui est le produit de deux fonctions dérivables u et v. Alors la dérivée de f est donnée par :

$(uv)' = u'v + uv'$ ou encore $\dfrac{d}{dx}(uv) = \dfrac{du}{dx}v + u\dfrac{dv}{dx}$.

Démonstration

DerivAlgebre02

Puisque les fonctions u et v sont dérivables par hypothèse, on a par définition de la dérivée :

$$u'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \text{ et } v'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

On veut déterminer la dérivée de $f = u\,v$, soit :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ par la définition de la dérivée,}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}, \text{ par la définition de } f,\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]v(x+h)+u(x)[v(x+h)-v(x)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]}{h}v(x+h)+\lim_{h\to 0}u(x)\frac{[v(x+h)-v(x)]}{h}\\
&= u'(x)v(x)+u(x)v'(x), \text{ par la définition de la dérivée.}
\end{aligned}$$

REMARQUE

Avec la notation de l'opérateur de dérivation, on a :

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

EXEMPLE 2.3.1

Trouver la dérivée de la fonction définie par :

$$f(x) = (x + 5)(x^2 - 2x).$$

Solution

La fonction est de la forme $f = uv$. On doit donc faire la dérivée du produit des fonctions $u(x) = x + 5$ et $v(x) = x^2 - 2x$. Puisque :

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{d}{dx}(u) + u\frac{d}{dx}(v).$$

on a, en substituant :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[(x+5)(x^2-2x)\right] &= (x^2-2x)\frac{d}{dx}(x+5)+(x+5)\frac{d}{dx}(x^2-2x)\\ &= (x^2-2x)\times 1+(x+5)(2x-2)\\ &= x^2-2x+2x^2+8x-10\\ &= 3x^2+6x-10.\end{aligned}$$

La fonction dérivée est donc :

$$f'(x) = 3x^2 + 6\,x - 10.$$

THÉORÈME

Dérivée d'un quotient de fonctions

Soit $f = u/v$, une fonction qui est le quotient de deux fonctions dérivables, u et v. Alors la dérivée de f est donnée par :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \text{ ou encore } \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

DerivAlgebre03

Démonstration

Puisque les fonctions u et v sont dérivables par hypothèse, on a par définition de la dérivée :

$$u'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \text{ et } v'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

On veut déterminer la dérivée de $f = u/v$, soit :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ par la définition de la dérivée;}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}, \text{ par la définition de } f;\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x)}{v(x+h)v(x)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\left[u(x+h)-u(x)\right]v(x)-u(x)\left[v(x+h)-v(x)\right]}{v(x+h)v(x)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right)v(x)-u(x)\left(\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right)}{v(x+h)v(x)}\\ &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}, \text{ par la définition de la dérivée.}\end{aligned}$$

REMARQUE

Avec la notation de l'opérateur de dérivation, on a :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

EXEMPLE 2.3.2

Trouver la dérivée de la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x}}.$$

Solution

La fonction est de la forme $f = u/v$. On doit donc faire la dérivée du quotient des fonctions $u(x) = x^2 + 3$ et $v(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$. En utilisant la notation des opérateurs, la dérivée est donnée par :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3}{\sqrt{x}}\right)=\frac{\frac{d}{dx}(x^2+3)\times\sqrt{x}-(x^2+3)\frac{d}{dx}(x^{1/2})}{(\sqrt{x})^2}$$

$$=\frac{2x\times\sqrt{x}-(x^2+3)\times\frac{1}{2}x^{-1/2}}{x}$$

$$=\frac{2x\sqrt{x}-\frac{(x^2+3)}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{4x^2-(x^2+3)}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$=\frac{4x^2-x^2-3}{2x\sqrt{x}}=\frac{3x^2-3}{2x\sqrt{x}}.$$

La fonction dérivée est donc $f'(x)=\dfrac{3x^2-3}{2x\sqrt{x}}$.

Le tableau ci-dessous donne un résumé des techniques de dérivation présentées jusqu'à maintenant.

PROPRIÉTÉS DE LA DÉRIVÉE	
Notation fonctionnelle	**Opérateur de dérivation**
$(u+v)'=u'+v'$	$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$
$(u-v)'=u'-v'$	$\frac{d}{dx}(u-v)=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}$
$(uv)'=u'v+uv'$	$\frac{d}{dx}(uv)=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}$
$(kv)'=kv'$	$\frac{d}{dx}(kv)=k\frac{dv}{dx}$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\frac{du}{dx}v-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

REMARQUE

Il y a des fonctions que nous ne sommes pas encore en mesure de dériver. Nous verrons plus loin comment dériver les fonctions exponentielles, les fonctions logarithmiques, les fonctions trigonométriques et les fonctions trigonométriques inverses ainsi que les fonctions composées.

TIC

On peut visualiser la fonction avec Maple en donnant les instructions suivantes :

```
> f:=x->x/(2*x+3);
> plot(f(x),x=-3..2,
    y=-10..10, discont=true);
```

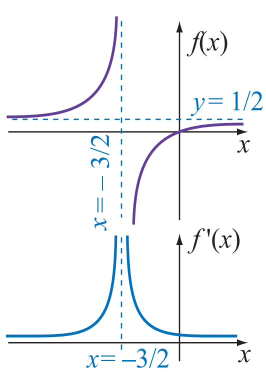
l'instruction « discont=true» indique au logiciel que la fonction a une discontinuité, sans quoi il va joindre les points calculés.

Pour visualiser les deux fonctions dans un même système d'axes,

```
> f:=x->x/(2*x+3);
> g:=D(f);
> plot({f(x),g(x)},x=-3..2,
   y=-10..10, discont=true);
```

REMARQUE

Les représentations graphiques de la fonction $f(x) = x/(2x + 3)$ et de sa dérivée données ci-dessous, aident à comprendre la signification de la non dérivabilité dans ce cas. En effet, on constate que lorsque x s'approche de –3/2, par la gauche ou par la droite, la pente de la tangente devient ∞, la tangente devient verticale. La dérivée n'existe donc pas. De plus, –3/2 ne fait pas partie du domaine de la fonction.



DerivAlgebre04

Dérivabilité

Présentons tout d'abord quelques exemples de fonctions qui ne sont pas dérivables pour une valeur particulière de leur variable indépendante.

EXEMPLE 2.3.3

Soit la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = \frac{x}{2x+3}.$$

a) Déterminer la fonction dérivée.

b) À l'aide de la fonction dérivée, trouver la pente de la tangente au graphique de f au point d'abscisse –3/2.

c) Déterminer la limite de la fonction dérivée, par la gauche et par la droite, lorsque x s'approche de –3/2.

Solution

a) La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables :

$$u = x \text{ et } v = 2x + 3$$

Ces deux fonctions sont des polynômes. En les dérivant, on obtient $u' = 1$ et $v' = 2$. En appliquant la règle du quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \times (2x+3) - x \times 2}{(2x+3)^2}$$
$$= \frac{2x+3-2x}{(2x+3)^2} = \frac{3}{(2x+3)^2}.$$

La fonction dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{2x+3}$ est donc :

$$f'(x) = \frac{3}{(2x+3)^2}.$$

b) La dérivée n'est pas définie à x = –3/2. En effet, en substituant cette valeur dans la fonction dérivée, on trouve :

$$f'(-3/2) = \frac{3}{(0)^2}.$$

et la division par zéro n'est pas définie. En fait, la fonction f n'est pas définie non plus. La fonction f a une asymptote verticale à x = –3/2. Il n'y a donc pas de point d'abscisse –3/2. La pente de la tangente au point d'abscisse –3/2 ne peut être définie puisque ce point n'existe pas.

c) $\lim\limits_{x \to (-3/2)^-} \dfrac{3}{(2x+3)^2} = \dfrac{3}{0^+} = \infty$ et $\lim\limits_{x \to (-3/2)^+} \dfrac{3}{(2x+3)^2} = \dfrac{3}{0^+} = \infty.$

Fonction dérivable

Soit f, une fonction à variables réelles. On dit que la fonction f est **dérivable** à $x = c$ si $f'(c)$ est définie.

Pour que $f'(c)$ soit définie, il faut que la limite $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ existe.

La fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x)=\frac{x}{2x+3}$$

n'est pas dérivable à $x = -3/2$ puisque l'image de –3/2 par la fonction dérivée n'existe pas. En effet, la division par 0 n'est pas définie. Il est à remarquer que ce n'est pas la seule opération qui n'est pas définie dans l'ensemble des nombres réels. L'extraction de la racine paire d'un nombre négatif ne l'est pas non plus. On peut donc s'attendre à ce qu'il existe d'autres cas pour lesquels une fonction n'est pas dérivable.

Pour que la dérivée soit définie, il faut que la fonction soit définie. Ainsi, pour que la fonction soit dérivable à $x = c$, il faut que c soit dans le domaine de la fonction. Cette condition n'est cependant pas suffisante. Dans le cas des fonctions comportant un radical, il existe des points pour lesquels la fonction est définie sans que la dérivée le soit.

EXEMPLE 2.3.4

Soit la fonction définie par $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

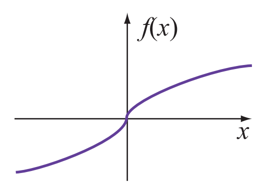
a) Trouver la fonction dérivée.

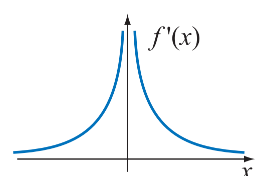
b) La fonction est-elle partout dérivable?

c) Déterminer la limite de la fonction dérivée, par la gauche et par la droite, lorsque x s'approche de 0.

REMARQUE

On constate, dans les représentations graphiques ci-dessous, que lorsque x s'approche de 0, la tangente devient verticale. Sa pente devient infinie, que l'on s'approche de 0 par la gauche ou par la droite. La dérivée n'existe donc pas. De plus, 0 fait partie du domaine de la fonction, mais pas de celui de la dérivée.





■ ***Solution***

a) En utilisant l'opérateur de dérivation, on a :

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right)=\frac{1}{3}\,x^{-2/3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

La fonction dérivée est donc :

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

b) La fonction dérivée n'est pas définie à $x = 0$, car on a alors division par 0. Partout ailleurs la fonction et la dérivée sont définies. La fonction n'est donc pas dérivable à $x = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{3\left(x^{1/3}\right)^2}=\dfrac{1}{0^+}=\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3\left(x^{1/3}\right)^2}=\dfrac{1}{0^+}=\infty.$

EXEMPLE 2.3.5

Soit la fonction définie par $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

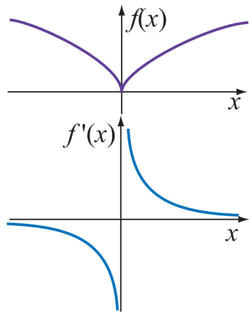
a) Trouver la fonction dérivée.

b) La fonction est-elle partout dérivable?

c) Déterminer la limite de la fonction dérivée, par la gauche et par la droite, lorsque x s'approche de 0.

REMARQUE

Lorsque x s'approche de 0 par la gauche, la pente de la tangente tend vers moins l'infini et par la droite elle tend vers l'infini. La dérivée n'existe donc pas.



■ *Solution*

a) En utilisant l'opérateur de dérivation, on a :

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right) = \frac{2}{3}\ x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

La fonction dérivée est donc :

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

b) La fonction dérivée n'est pas définie à $x = 0$, car on a alors division par 0. Partout ailleurs la fonction et la dérivée sont définies. La fonction n'est donc pas dérivable à $x = 0$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{3\left(x^{1/3}\right)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{0^+} = \infty.$

Retour sur l'apprentissage

Notre démarche nous a permis de donner un fondement solide à notre démarche pour évaluer un taux de variation ponctuel. Dans cette démarche, on rencontre inévitablement une limite de la forme 0/0, c'est-à-dire une discontinuité qui, la plupart du temps est non essentielle.

Dans le cas d'une fonction algébrique, on peut lever l'indétermination par des manipulations algébriques visant à trouver une fonction continue ayant le même comportement mais n'ayant pas de discontinuité. On peut alors évaluer la limite en calculant l'image par la fonction continue. La généralisation de cette procédure pour une valeur x quelconque donne la fonction dérivée qui décrit le taux de variation en un point en fonction de l'abscisse de ce point.

REMARQUE

Rappelons que les théorèmes que nous avons démontrés pour déterminer la dérivée d'une somme, d'un produit ou d'un quotient, sont applicables aux fonctions dérivables, même celles que nous n'avons pas encore vues.

Nous avons considéré les fonctions qui sont une combinaison par les opérations algébriques de fonctions puissances. Nous avons montré qu'il suffisait de connaître l'effet de l'opérateur de dérivation sur une fonction puissance ainsi que sur une somme, une différence, un produit et un quotient de fonctions dérivables pour pouvoir dériver plusieurs formes de fonctions algébriques.

La fonction dérivée véhicule de l'information sur la fonction. L'image d'une valeur c du domaine de la fonction est le taux de variation ponctuel de la fonction au point d'abscisse c. Si ce taux est nul, la tangente est horizontale et la fonction est stationnaire. Si le taux est négatif, la fonction est décroissante et si le taux est positif, la fonction est croissante.

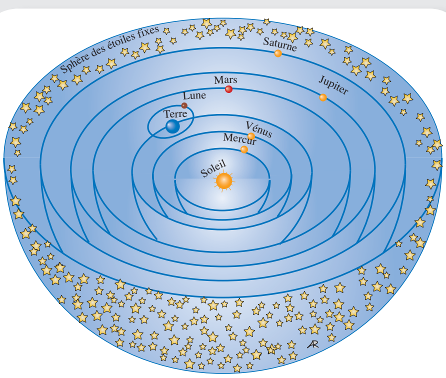
Un peu *d'histoire*

NOUVEAU PARADIGME SCIENTIFIQUE

Les grandes composantes de la cosmologie d'Aristote : le modèle géocentrique, la perfection du monde supralunaire, la théorie du mouvement et l'impossibilité du vide se sont transmises au cours des siècles grâce aux traductions arabes, puis latines et ont été adoptées par les théologiens et savants du Moyen Âge.

Les savants arabes avaient déjà commencé à critiquer certains aspects du modèle géocentrique et de la théorie du mouvement d'Aristote. En France, au treizième siècle, ces enseignements d'Aristote ont été l'objet de discussions par les maîtres de la scolastique Jean Buridan (NH Buridan) et Nicole Oresme (NH Oresme). Ces discussions n'avaient pas pour but de remettre en question les enseignements d'Aristote, mais de consolider leurs fondements et développer des argumentations visant à convaincre de la justesse de ces théories. Ces discussions ont cependant permis de comprendre que la perception de plusieurs phénomènes est la même selon que l'on considère la Terre immobile au centre de l'Univers ou que l'on considère que la Terre tournait autour du Soleil. Les seuls arguments incontournables devenaient alors les références à Aristote et à la Bible. La Foi dictait sa conduite à la Raison, mais un doute persistait. Le système géocentrique hérité de Ptolémée comportait plus de 80 cercles, épicycles et déférents pour expliquer le comportement erratique des planètes et une question restait sans réponse : pourquoi Dieu avait-il conçu un système aussi compliqué alors que dans sa Toute-puissance, il aurait pu concevoir un système simple et beau ?

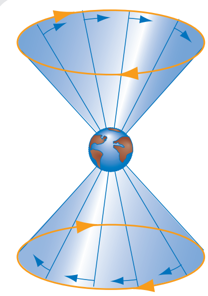
On reconnaissait donc que le système géocentrique présentait de grandes faiblesses, mais il sauvait les apparences. Il donnait une explication qui semblait plausible des phénomènes observés et aucun autre système n'avait été élaboré pour rendre compte de l'ensemble des phénomènes. Il fallait donc se contenter du système géocentrique. Cependant, une remise en question importante s'amorce avec la parution, en 1543, du ***Traité sur les révolutions du Monde*** de Nicolas Copernic, neuf ans après le premier voyage de Jacques Cartier. Copernic a développé un modèle dans lequel le Soleil est au centre de l'Univers et les corps célestes sont en orbite autour du Soleil. (NH Copernic01, Copernic_Modèle, Copernic_Objections).



Modèle de Copernic

Le modèle de Copernic présente divers avantages, l'explication de certains phénomènes célestes est plus simple dans ce modèle que dans celui hérité de Ptolémée. (NH Copernic02).

Plusieurs aspects du modèle de Copernic sont cependant difficiles à admettre pour ses contemporains. La Terre était immobile et elle devient animée de trois mouvements, un mouvement diurne, un mouvement annuel et un mouvement conique (NH Copernic01).


Mouvement conique

Dans le modèle géocentrique, la Terre est immobile au centre de l'univers et tous les corps célestes sont en orbite autour de la Terre. Dans le modèle héliocentrique, les corps célestes, incluant la Terre, sont en orbite autour du Soleil. Il y a cependant un comportement très bizarre, la Lune est en orbite autour de la Terre qui est elle-même en orbite autour du Soleil. Cette exception était incompatible avec l'idée de perfection que l'on se faisait du monde céleste. Pourquoi tous les corps célestes, sauf un, devraient-ils être en orbite autour du Soleil ? Il est bien plus simple de concevoir qu'ils sont tous en orbite autour de la Terre.

Dans le système de Ptolémée, la sphère des étoiles fixes est contiguë à la sphère de Saturne. La sphère des étoiles fixes est donc assez proche de la Terre et il n'y a pas de vide entre les sphères célestes. Cependant, si la Terre est en mouvement, on devrait percevoir des variations dans la position relative des étoiles. Mais, de telles variations n'ont jamais été observées. Pour expliquer cette absence de parallaxe, Copernic est obligé de situer la sphère des fixes à une très grande distance de la Terre, ce qui implique l'existence du vide dans le monde supralunaire. Reconnaître l'existence du vide est très difficile pour les contemporains de Copernic. Ne dit-on pas que « La nature a horreur du vide ». (NH Copernic03).

Un changement de paradigme ne se fait pas sans heurts, les phénomènes qui ont reçu une explication plausible dans le cadre du géocentrisme deviennent tout à coup inexpliqués. Parmi ceux-ci, on compte la chute des corps et, pour en donner une explication correcte dans le système héliocentrique, il a fallu progressivement développer un nouveau langage mathématique, le calcul différentiel et intégral. La géométrie grecque avait un caractère trop statique pour expliquer la dynamique des phénomènes dans un univers héliocentrique.

2.4 EXERCICES

1. À l'aide de la règle de dérivation d'un produit, déterminer la dérivée des fonctions suivantes en donnant la réponse sous forme simplifiée. Vérifier que le résultat est le même si on effectue d'abord le produit avant de dériver. Quelle conclusion doit-on en tirer?
   a) $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$
   b) $f(x) = (3x - 5)(x^2 + 2x + 1)$
   c) $f(x)=\sqrt{x}(x+2)$
2. À l'aide de la définition de fonction dérivée, trouver la dérivée des fonctions suivantes et vérifier que la fonction obtenue est la même qu'en utilisant la règle de dérivation d'un quotient. Quelle conclusion doit-on en tirer?
   a) $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ b) $f(x)=\dfrac{x+2}{x+3}$
3. À l'aide de la règle de dérivation d'un quotient, trouver la dérivée des fonctions suivantes et vérifier que la fonction dérivée obtenue est la même qu'en utilisant la règle de dérivation d'une fonction puissance. Quelle conclusion doit-on en tirer?
   a) $f(x)=\dfrac{3}{x}$ c) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$
   b) $f(x)=\dfrac{5}{x^2}$

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes en utilisant les règles du produit et du quotient. Puis, calculer l'ordonnée du point dont l'abscisse est donnée ainsi que le taux de variation de la fonction en ce point. Donner l'interprétation graphique de ces résultats.

4. $f(x) = (x^2 + 3)(x^3 - 1)$ à $c = 0$ et à $c = 1$
5. $f(x) = (x^3 - 3x)(x^2 + 4x)$ à $c = 0$ et à $c = 1$
6. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+4}$ à $c = 0$ et à $c = 1$
7. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$ à $c = 0$ et à $c = 1$

En utilisant les propriétés de l'opérateur de dérivation, donner les dérivées et taux de variation demandés.

8. $y=(x^3-2x)(x^2+1)$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_1$.
9. $y=(x^3+4)(x^2-2)$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_1$.
10. $y=\dfrac{2x-3}{x+5}$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{-1}$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_0$.
11. $y=\dfrac{4x}{x^2+9}$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_0$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_2$.
12. $y=\dfrac{3x^2-5}{x^2+2}$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{-1}$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_1$.
13. $y=\dfrac{x^3}{x^2+4}$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{-2}$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_2$.
14. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{-2}$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_2$.
15. $y=\dfrac{8x}{x^2+1}$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{-1}$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_1$.
16. $y=\dfrac{8x^2}{x^2+4}$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{-1}$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_1$.
17. $y=\dfrac{8x^2-4x}{3x^2+5}$, déterminer $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_0$ et $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_1$.
18. Déterminer si les parties de la fonction f sont jointes et si celle-ci est dérivable en $x = c$.
    a) $f(x)=|x^2-4|$ et $c = 2$.
    b) $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & \text{si } x\le 2 \\ 5-2x & \text{si } x>2 \end{cases}$ et $c = 2$.
    c) $f(x)=\begin{cases} x^2+7 & \text{si } x\le 2 \\ 4x+3 & \text{si } x>2 \end{cases}$ et $c = 2$.
19. Soit la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$$

La fonction est-elle dérivable à $x = 0$?

20. Soit $f = uvw$, le produit de trois fonctions, montrer que :

$$f' = u'vw + uv'w + uvw'$$

21. En utilisant le résultat du numéro 20, montrer que la dérivée de $f(x) = x^3$ est $f'(x) = 3x^2$.

22. Soit $f = u^3$, où u est une fonction dérivable de x. En utilisant le résultat du numéro 20, montrer que la dérivée de $f = u^3$ est $f' = 3u^2u'$.

23. Soit $f(x) = (x^2 + 2x)^3$. En utilisant le résultat du numéro 22, déterminer la dérivée de la fonction $f(x)$. Trouver les zéros de la fonction dérivée.

24. Soit $f = u_1u_2u_3 \ldots u_n$, le produit de n fonctions, montrer que :

$$f' = u_1'u_2u_3 \ldots u_n + u_1u_2'u_3 \ldots u_n + \ldots + u_1u_2u_3 \ldots u_n'$$

25. En utilisant le résultat du numéro 24, montrer que la dérivée de $f(x) = x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$.

26. Soit $f = u^n$, où u est une fonction dérivable de x. En utilisant le résultat du numéro 24, montrer que la dérivée de la fonction f est $f' = nu^{n-1}u'$.

27. Soit $f(x) = (x^2 - 3x)^5$. En utilisant le résultat du numéro 26, déterminer la dérivée de la fonction $f(x)$. Trouver les zéros de la fonction dérivée.

28. Soit f, une fonction de la forme $f = \dfrac{uv}{w}$, montrer que : $f' = \dfrac{u'vw + uv'w - uvw'}{w^2}$.

29. Soit $f(x) = \dfrac{(x^2-2)(x^2+3)}{x^2+4}$. En utilisant le résultat du numéro 28, déterminer la dérivée de la fonction $f(x)$.

30. Soit f, une fonction de la forme $f = \dfrac{u}{vw}$, montrer que : $f' = \dfrac{u'vw - uv'w - uvw'}{v^2w^2}$.

31. Soit $f(x) = \dfrac{(x^2-2)}{(x^2+4)(x^2+3)}$. En utilisant le résultat du numéro 30, déterminer la dérivée de la fonction $f(x)$.

Exercices de synthèse

1. Déterminer la dérivée de la fonction définie par la règle de correspondance :

$$y = f(x) = \frac{3x-2}{x+4}.$$

a) Calculer le taux de variation au point d'abscisse –2. Quelle est l'interprétation du signe de ce taux de variation?
b) Calculer le taux de variation au point d'abscisse 3. Quelle est l'interprétation du signe de ce taux de variation?
c) La fonction est-elle partout dérivable?
d) La fonction dérivée est-elle partout positive? Comment interpréter cela?
e) Trouver la pente de la tangente au point d'abscisse 2.
f) Déterminer $\left.\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[1;\,3]}$. Interpréter le résultat.
g) Déterminer $f'(4)$. Interpréter le résultat.
h) Déterminer $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{-5}$. Interpréter le résultat.
i) Que peut-on dire de $\left.\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[-5;\,-3]}$?

2. Déterminer la dérivée de la fonction définie par la règle de correspondance :

$$f(x) = \frac{x^2+12}{x-3}.$$

a) Calculer le taux de variation au point d'abscisse –4. Quelle est l'interprétation du signe de ce taux de variation ?
b) Calculer le taux de variation au point d'abscisse 1. Quelle est l'interprétation du signe de ce taux de variation ?
c) La fonction est-elle partout dérivable ?
d) Trouver la pente de la tangente au point d'abscisse –1.
e) Pourquoi le taux de variation moyen n'est-il pas défini dans l'intervalle [2; 4] ?
f) Calculer $\left.\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{[0;\,2]}$. Interpréter le résultat.
g) Déterminer $f'(3)$. Interpréter le résultat.
h) À quelles valeurs de la variable indépendante la dérivée s'annule-t-elle?

i) La fonction est-elle toujours décroissante? Justifier.

3. La loi de la gravitation universelle de Newton indique que si un objet de masse M et un objet de masse m sont à une distance r l'un de l'autre, il existe entre ces objets une force d'attraction orientée parallèlement à la droite qui les relie et dont la valeur est :

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

où G est une constante positive.

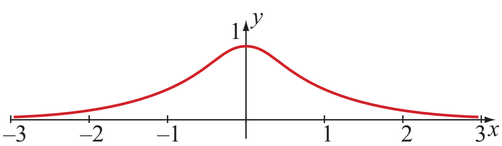
a) Déterminer l'expression décrivant le taux de variation de la force F par rapport à la distance r.

b) Donner la signification du signe de la dérivée obtenue.

4. La courbe décrite par l'équation

$$y = \frac{1}{1+x^2}$$

est appelée **sorcière d'Agnesi** (NH Agnesi). Son graphique est



a) Déterminer la fonction dérivée de la courbe d'Agnesi.

b) Calculer le taux de variation ponctuel au point d'abscisse –1. Donner la signification du signe du taux obtenu.

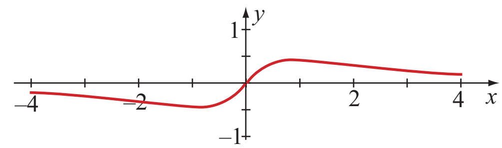
c) Calculer le taux de variation ponctuel au point d'abscisse 0. Donner la signification du signe du taux obtenu.

d) Calculer le taux de variation ponctuel au point d'abscisse 1. Donner la signification du signe du taux obtenu.

5. La courbe décrite par l'équation

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

est appelée **serpentine**. Son graphique est



a) Déterminer la fonction dérivée de la courbe serpentine.

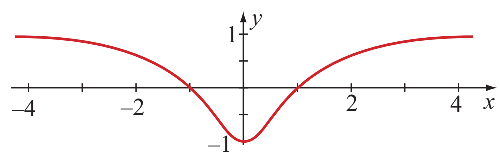
b) Calculer le taux de variation ponctuel au point d'abscisse –1. Donner la signification du signe du taux obtenu.

c) Calculer le taux de variation ponctuel au point d'abscisse 0. Donner la signification du signe du taux obtenu.

d) Calculer le taux de variation ponctuel au point d'abscisse1. Donner la signification du signe du taux obtenu.

e) Calculer le taux de variation ponctuel au point d'abscisse e. Donner la signification du signe du taux obtenu.

6. Soit $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, déterminer $f'(x)$.



Parmi les graphiques suivants, indiquer celui représentant la fonction $f'(x)$.