Eudoxe de Cnide
~408-~355

La découverte des irrationnels par les Pythagoriciens avait sapé les fondements de leur théorie des proportions. Il fallait donner de nouveaux fondements à cette théorie. Ce fut en grande partie l'œuvre d'Eudoxe. C'est dans le livre V des Éléments d'Euclide que l'on retrouve les fondements posés par Eudoxe

Eudoxe de Cnide
Théorie des proportions

Dans sa théorie, Eudoxe donne les définitions suivantes :

Un rapport est la relation selon la taille entre deux grandeurs du même genre.

Des grandeurs sont dites avoir un rapport l'une relativement à l'autre quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.

Une longueur et une aire ne sont pas des grandeurs du même genre et on ne peut établir de relation entre elles. Une longueur que l'on multiplie ne peut excéder une aire et une aire ne peut excéder un volume[1].

Dans son ouvrage *Number, from Ahmes to Cantor*, Midhat Gazalé illustre cette définition en considérant une balance à fléau idéale dont les composantes sont de masse nulle et dont le point d'appui est infiniment aiguisé (pour éviter toute friction). Le levier comporte deux sections de longueur $a = 3$ et $b = 5$. Il dispose d'un très grand nombre de petites billes de même masse et souhaite équilibrer le levier en plaçant des billes dans les deux plateaux. Selon la loi des leviers, s'il faut placer m billes dans le plateau de gauche et n billes dans le plateau de droite pour obtenir l'équilibre, alors :

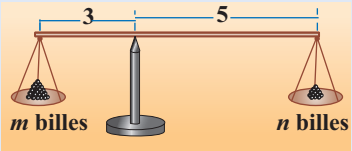
$$3m = 5n.$$

Si on peut équilibrer la balance, il y une infinité de paires m et n permettant d'atteindre l'équilibre, et pour chaque paire m et n équilibrant la balance, on a :

$$\frac{m}{n} = \frac{5}{3}$$

Puisque m et n sont des entiers, on peut obtenir l'équilibre pour des longueurs arbitraires a et b, seulement si ces grandeurs sont commensurables, c'est-à-dire si a/b est rationnel.

Des grandeurs sont dites dans le même rapport, une première à une deuxième et une troisième à une quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième sont respectivement plus petits, égaux ou plus grands que les équimultiples de la seconde et de la quatrième, les premiers équimultiples et les seconds équimultiples pris dans le même ordre.



Puisque m et n sont des entiers, on peut obtenir l'équilibre pour des longueurs arbitraires a et b, seulement si ces grandeurs sont commensurables, c'est-à-dire si a/b est rationnel.

1. Par ces définitions, Eudoxe élimine la possibilité de calculer le quotient de deux grandeurs qui ne sont pas de même type. Ainsi, il n'est pas possible, comme nous le faisons aujourd'hui, de diviser une distance par une durée pour obtenir une vitesse. Ce ne sont pas des grandeurs de même nature.

Supposons une balance idéale dont la longueur a du bras de gauche est égale au côté d'un carré et dont la longueur b du bras de droite est égale à la diagonale de ce carré. On tente d'équilibrer les plateaux en ajoutant des billes, une à la fois, dans le plateau qui est plus élevé que l'autre (figure en haut à droite).

Puisque les billes sont indivisibles, on peut poursuivre indéfiniment, on aura toujours un déséquilibre. Impossible d'équilibrer les plateaux, les grandeurs a et b sont donc incommensurables.

Imaginons maintenant deux balances. L'une dont les bras sont de longueurs a et b. L'autre dont les bras sont de longueurs c et d. S'il existe une paire m et n qui permet d'équilibrer les deux balances, on peut conclure que :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

et que ce rapport est un nombre rationnel. Cela est équivalent à dire que toute paire m et n qui permet d'équilibrer une des deux balances permet également d'équilibrer l'autre.

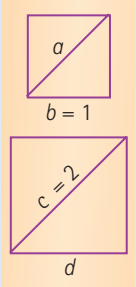
Si a/b et c/d sont irrationnels, il est impossible d'équilibrer les balances même en disposant d'une infinité de billes.

De plus, selon Eudoxe, si chaque paire qui fait basculer une balance d'un côté fait basculer l'autre du même côté, on peut conclure que :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

La définition donnée par Eudoxe peut être formulée de la façon suivante :

Le rapport de a à b est égal au rapport de c à d lorsque pour tout multiples ma et mc et tout multiples nb et nd:
1. si $ma < nb$, alors $mc < nd$;
2. si $ma = nb$, alors $mc = nd$;
3. si $ma > nb$, alors $mc > nd$.



Qu'est-ce qui différencie un rapport rationnel d'un rapport irrationnel ? Considérons deux carrés dont l'un a un côté unitaire et la diagonale de l'autre est de longueur 2.

Pour que les rapports a/b et c/d soient égaux, il faut que chaque fois que l'antécédent de l'une des trois conditionnelles est vraie, le conséquent le soit également. Le rapport est rationnel s'il existe des paires m et n pour lesquelles l'antécédent et le conséquent de la deuxième conditionnelle sont vrais.

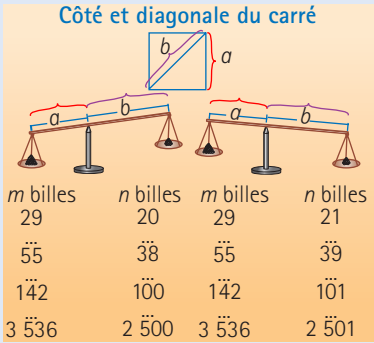
Dans notre exemple des deux carrés, pour toute paire de valeurs m et n, pour lesquelles $ma < nb$, on a également $mc < nd$. De plus, pour toute paire de valeurs, pour lesquelles $ma > nb$, on a également $mc > nd$. Cependant, la condition $ma = nb$ n'est jamais satisfaite. C'est-à-dire qu'on ne peut trouver des multiples de a et b qui soient égaux. On conclut que a/b et c/d sont des rapports égaux puisque les conditions 1 et 3 sont satisfaites. Cependant, le rapport est irrationnel puisque l'antécédent de la deuxième condition n'est jamais satisfait (si l'antécédent est faux, la conditionnelle est toujours vraie). Les segments a et b sont donc incommensurables, tout comme les segments c et d.

Grandeurs proportionnelles

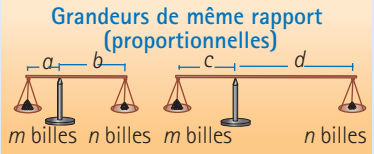
Des grandeurs qui ont le même rapport sont dites proportionnelles.

Les Pythagoriciens avaient fondé leur théorie des proportions sur la conviction que deux grandeurs de même nature sont toujours commensurables. La découverte des irrationnels et les paradoxes de Zénon avaient détruit ces fondements. Cependant, l'étude des rapports et proportions à partir de cette conviction avait permis d'établir plusieurs propriétés intéressantes des figures semblables.

En définissant le rapport, rationnel ou irrationnel, Eudoxe a posé de nouveaux fondements strictement mathématiques à la théorie des proportions. Il a permis de préserver la connaissance acquise dans l'étude des figures semblables et de poursuivre cette étude.



S'il est impossible d'équilibrer les plateux, les grandeurs sont incommensurables.



Des grandeurs ont proportionnelles si l'équilibre est obtenu pour les mêmes paires m et n.