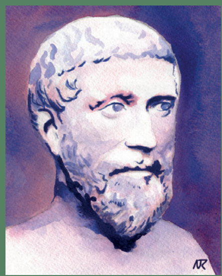


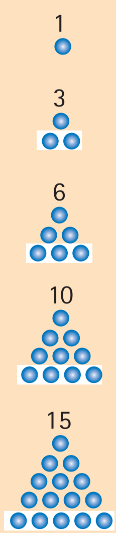
Pythagore
vers –580 à –495

Dans leur étude des nombres, les Pythagoriciens ont développé des classifications selon le type de représentation géométrique qu'ils pouvaient en faire. Cela a donné la géométrie des nombres.

Pythagore
Géométrie des nombres

La représentation des nombres par des points a permis aux Pythagoriciens de développer une classification des nombres basée sur leur configuration géométrique.

Nombres triangulaires



Nombres triangulaires

Un *nombre triangulaire* est un nombre dont les points peuvent se disposer de façon à former un triangle équilatéral. Les premiers nombres triangulaires sont représentés dans l'illustration ci-contre.

Il est facile de constater que le nombre triangulaire de rang n est la somme des entiers de 1 à n, soit

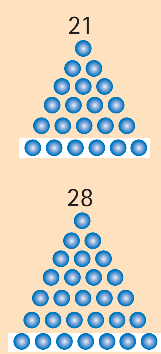
$$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n.$$

De plus, pour obtenir le nombre triangulaire suivant, il suffit d'additionner, au nombre triangulaire de rang n, le nombre de points de la ligne ajoutée dans le triangle, soit $n + 1$. Les anciens Grecs ont donné le nom de **gnomon** à ce qui est ainsi ajouté.

Le mot gnomon était utilisé dans divers contextes par les mathématiciens grecs. En astronomie, le gnomon désignait l'assemblage formé d'une tige fixée perpendiculairement à un plan et servant de cadran solaire. En géométrie, le gnomon désignait une équerre. On doit à Héron d'Alexandrie (vers ~150 à ~75) la définition suivante du gnomon :

Un gnomon est la chose qui ajoutée à quelque chose d'autre, figure ou nombre, forme un tout semblable à la chose à laquelle elle a été ajoutée.

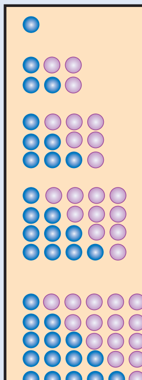
Nombres triangulaires de rang 6 et de rang 7



Ainsi, en ajoutant une ligne formée de six points au nombre triangulaire de rang 5, on obtient le nombre triangulaire de rang 6 et ainsi de suite.

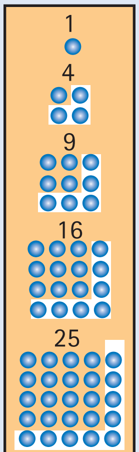
De plus, les Pythagoriciens avaient remarqué qu'en disposant les nombres triangulaires pour former un triangle rectangle, il est possible de déterminer le terme de rang n sans avoir besoin d'écrire tous ses prédécesseurs. En reproduisant ce nombre comme dans la figure ci-contre, on forme un rectangle dont on peut facilement déterminer le nombre de points en faisant le produit du nombre de lignes et du nombre de colonnes. En divisant ce nombre de points par 2, on obtient le nombre triangulaire de rang n. En termes modernes, on dit que le nombre triangulaire de rang n est :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Nombres triangulaires

Nombres carrés



Nombres carrés

Diverses formes polygonales ont été utilisées par les Pythagoriciens pour obtenir les *nombres carrés*, *pentagonaux*, *hexagonaux*, ...

Un nombre carré est un nombre dont les points peuvent être disposés de façon à former un carré. L'illustration ci-contre regroupe les premiers nombres carrés. Dans cette illustration, on remarque que le gnomon forme une équerre dont le nombre de points est la suite des nombres impairs.

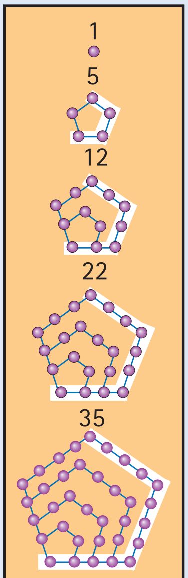
En termes modernes, on écrit symboliquement :

$$C_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Pour décrire cette relation verbalement on dit que le nombre carré de rang n est la somme des n premiers nombres impairs.

Il est à noter que 1 avait un statut particulier, il est ce à partir de quoi tout est engendré.

Nombres pentagonaux



Nombres pentagonaux

Un nombre pentagonal est un nombre dont les points peuvent se disposer de façon à former un pentagone. Les cinq premiers nombres pentagonaux sont représentés dans l'illustration ci-contre.

Il est assez facile de déterminer le nombre carré de rang n sans avoir à énumérer tous les nombres carrés plus petits. Ça semble moins évident pour le nombre pentagonale de rang n. Cependant, on peut appliquer la même procédure que pour les nombres triangulaires, la représentation en triangles rectangles.

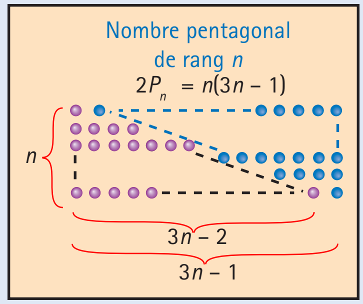
Le gnomon du nombre pentagonal de rang n est constitué de trois côtés de n points et ces côtés se recoupent en deux sommets. La forme générale du gnomon des nombres pentagonaux est donc $3n - 2$.

En disposant les nombres pentagonaux pour former un triangle rectangle et en reproduisant ce triangle avec une rotation de 180°, on forme un rectangle dont le nombre de lignes est n et le nombre de colonnes est $3n - 1$. Le nombre de points dans le rectangle est alors :

$$n(3n + 1).$$

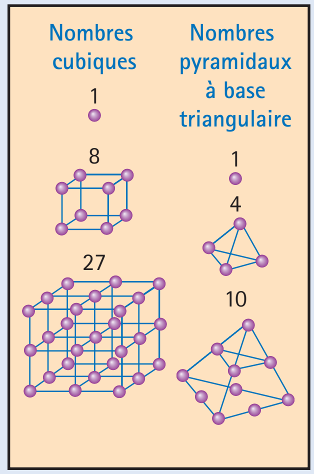
C'est le double du nombre de points du nombre pentagonal de rang n. On a donc :

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}.$$



Nombres tridimensionnels

On peut facilement poursuivre cette représentation des nombres avec les nombres hexagonaux, heptagonaux, octogonaux, ainsi de suite. On peut également considérer les structures tridimensionnelles comme les nombres cubiques ou les nombres pyramidaux à base triangulaire. Cette classification comporte également les nombres pyramidaux à base carrée, à base pentagonale, ainsi de suite.



Nombres polygonaux et progression arithmétique

La méthode géométrique pour déterminer le nombre pentagonal de rang n est l'ancêtre de la méthode moderne pour déterminer la somme d'une progression arithmétique. La somme partielle de la progression arithmétique de raison 3, est :

$$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + ... + (3n - 5) + (3n - 2).$$

Si on écrit cette somme dans l'ordre inverse, on obtient :

$$P_n = (3n - 2) + (3n - 5) + ... + 10 + 7 + 4 + 1.$$

En additionnant terme à terme, on obtient :

$$2P_n = (3n - 1) + (3n - 1) + ... + (3n - 1) + (3n - 1).$$

L'addition terme à terme donne n termes égaux à $3n - 1$, ce qui correspond aux n lignes de $3n - 1$ points. Par conséquent, on a :

$$2P_n = n(3n - 1)$$

et en divisant les deux membres par 2, on obtient la forme du terme général de rang n, soit :

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

On généralise facilement cette démonstration pour déterminer la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est a et la raison est d.