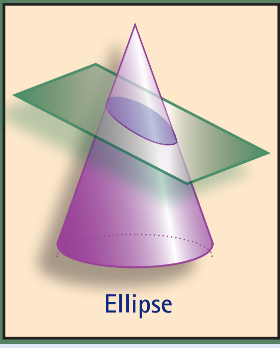
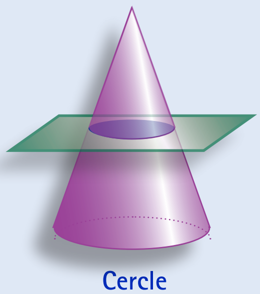


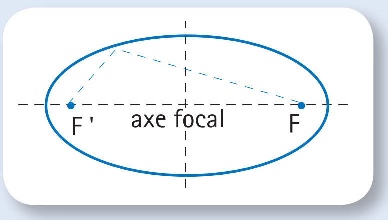
L'ellipse la figure géonétrique obtenue en sectionnant un cône à l'aide d'un plan qui n'est pas parallèle à la base mais dont l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale est plus petit que l'angle à la base du cône.

Retour

L'ellipse



Analytiquement, l'ellipse est la figure géométrique formée par les points dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Les points fixes sont appelés les foyers, la droite passant par les deux foyers est appelée l'axe focal et la droite perpendiculaire à l'axe focal et passant par le centre de l'ellipse est appelée l'axe conjugué.



Technique pour tracer une ellipse

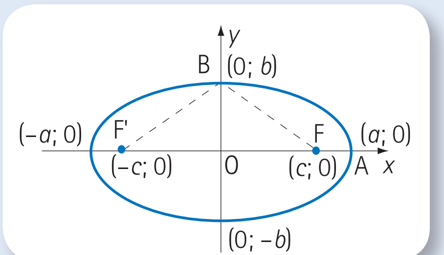
À l'aide de deux clous et d'une corde, on peut tracer une ellipse dont on connaît les foyers et la somme des distances aux foyers. On plante les clous aux foyers et on forme une boucle de corde dont la longueur est égale à la somme des distances aux foyers d'un point de l'ellipse et de la distance entre les foyers. On trace alors l'ellipse en déplaçant le crayon tout en maintenant la corde tendue.

Techniqque de tracage

La technique pour tracer l'ellipse à l'aide de deux bâtons et d'une corde était utilisée par les jardiniers longtemps avant que les mathématiciens n'aient recours à la description analytique que suppose cette technique pour déterminer l'équation de l'ellipse.

Paramètres de l'ellipse

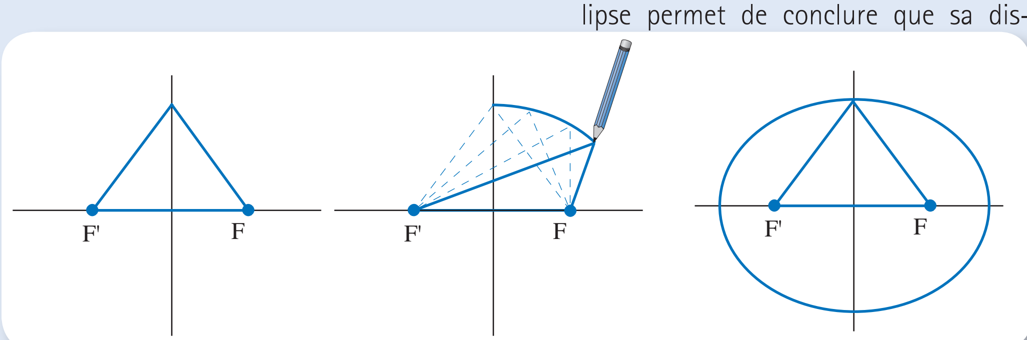
Pour trouver l'équation d'une ellipse, il faut déterminer certains de ses paramètres. Pour ce faire, considérons une ellipse dont l'axe focal est horizontal puis traçons un système d'axes dont l'origine est le point milieu entre les foyers.



Représentons par a la demi-longueur de l'axe focal, par b la demi-longueur de l'axe conjugué et par c la distance du centre de l'ellipse à un de ses foyers. Considérons le sommet A de coordonnées $(a; 0)$, sa distance au foyer F est $\overline{AF} = a - c$ et sa distance au foyer F' est $\overline{AF'} = a + c$. La somme des distances est alors :

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = (a - c) + (a + c) = 2a$$

Considérons maintenant le point B de coordonnées $(0;b)$. La symétrie de l'ellipse permet de conclure que sa dis-

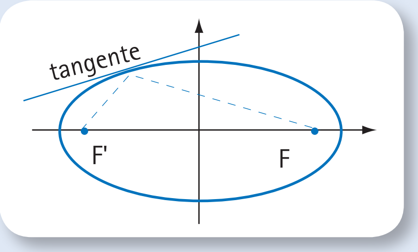


tance au foyer F est égale à sa distance au foyer F'. La somme des distances est donc $\overline{BF}+\overline{BF'}=2a$ d'où $2\overline{BF}=2a$, ce qui donne $\overline{BF}=a$. Par conséquent, l'hypoténuse du triangle rectangle OBF dont les sommets sont (0; b), (0; 0) et (c; 0) est de longueur a et, par le théorème de Pythagore, on a :

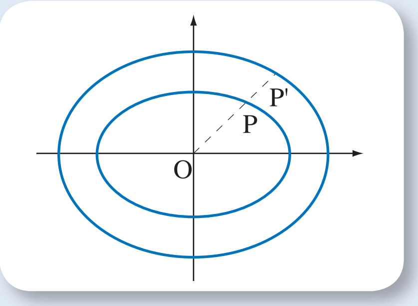
$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Aspects intéressants de l'ellipse

Les droites joignant un point quelconque d'une ellipse aux foyers forment des angles égaux avec la tangente en ce point. Par conséquent, si une source lumineuse est placée à un des foyers d'un réflecteur dont la surface est engendrée par la rotation d'une ellipse autour de son axe focal, tous les rayons sont réfléchis à l'autre foyer.



Toutes les ellipses pour lesquelles le rapport c/a est égal sont semblables. Si deux ellipses sont tracées concentriquement, comme à la figure ci-dessous, le rapport $\overline{OP}/\overline{OP'}$ est constant quelle que soit la position de la droite OPP'.



Les orbites de la Terre et des autres planètes ainsi que celles de leurs lunes sont elliptiques. La comète de Halley a une trajectoire elliptique dont le Soleil est un des foyers. En architecture, les arcs elliptiques sont utilisés pour leur beauté.

Aire de la surface de l'ellipse

Dans son *Traité des indivisibles* paru en 1635, le mathématicien italien Bonaventura Cavalieri, qui fut élève de Galilée, élabore une méthode pour calculer les aires et les volumes. Le fondement de sa méthode pour le calcul des aires s'énonce comme suit :

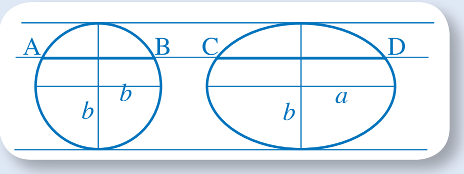
Si deux figures sont comprises entre deux parallèles (ont même hauteur) et si des sections qui sont obtenues par des lignes parallèles aux deux autres sont toujours dans un rapport donné, alors les aires des deux figures sont aussi dans le même rapport.

En appliquant ce principe à un cercle de rayon b et une ellipse dont les demi-longueurs des axes sont a et b, il obtient que les segments CD et AB sont toujours dans le rapport a/b, c'est-à-dire :

$$\overline{CD}=\frac{a}{b}\overline{AB}$$

Cette caractéristique étant vraie pour tous les segments, il en conclut que l'aire de l'ellipse et l'aire du cercle sont dans le même rapport. Puisque l'aire du cercle est πb^2, il obtient que l'aire de l'ellipse est πab puisque :

$$A=\frac{a}{b}\times\pi b^2=\pi ab$$



Anthémius de Thralle (475-534)

Anthémius de Thralle était mathématicien et architecte. C'est lui qui a développé la technique utilisant une corde fixée aux deux foyers pour tracer une ellipse. Son ouvrage comportait également la description des propriétés focales de l'ellipse. Il n'utilise cependant pas le mot « foyer ». Cette appellation est due à Kepler qui, dans ses études sur les lentilles, a constaté la propriété de convergence de la lumière entre ces deux points.