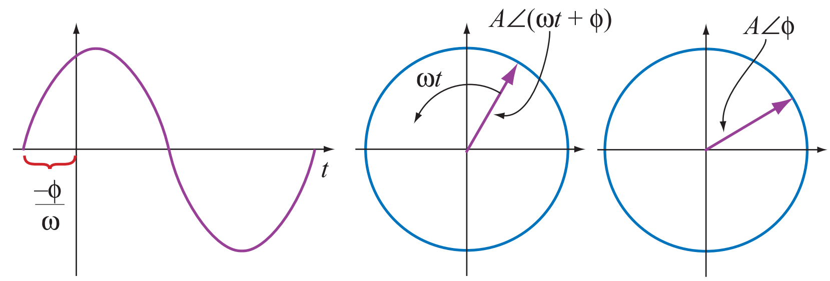
Vecteur de phase

En analyse de circuits à régime alternatif, la tension et le courant sont des sinusoïdes de même fréquence. L'information sur ces sinusoïdes est véhiculée par un vecteur complexe sous forme polaire appelé vecteur de phase.



Onde sinusoïdale $v(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ | Vecteur générateur $V(t) = A\angle(\omega t + \phi)$ | Vecteur de phase $V_0 = A\angle\, \phi$

VectPhase01

REMARQUE

En analyse de circuits à courant alternatif, la lettre i est utilisée pour désigner le courant. Pour éviter toute confusion, on utilise la lettre j pour désigner l'unité imaginaire et les nombres complexes sont notés $a + bj$.

C'est la notation utilisée dans ce texte et dans les vidéos qui accompagnent le texte.

> **Vecteur de phase**
>
> Soit z un vecteur complexe en rotation autour de l'origine à une vitesse constante ω. On appelle **vecteur de phase** la forme polaire du vecteur complexe à $t = 0$. Le module du vecteur de phase décrit l'amplitude de l'onde sinusoïdale engendrée et la direction ϕ du vecteur complexe est l'angle de phase.

Notations

Si la tension sinusoïdale aux bornes d'une source est $e(t) = A\sin(\omega t + \phi)$, le vecteur de phase véhiculant l'information sur l'amplitude et l'angle de phase au temps 0 est noté $E_0 = A\angle\varphi$.

Le vecteur de phase d'une tension sinusoïdale aux bornes d'une composante est noté $v(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ et son vecteur de phase est noté $V_0 = A\angle\varphi$.

Le vecteur de phase d'un courant sinusoïdal est noté $i(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ et son vecteur de phase est noté $I_0 = A\angle\varphi$.

Dans les cas où il y a plusieurs tensions ou plusieurs courants de même fréquence, disons

$$v_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \text{ et } v_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_2),$$

on distingue les vecteurs de phase en les notant

$$V_{10} = A_1\angle\varphi_1 \quad \text{et } V_{20} = A_2\angle\varphi_2.$$

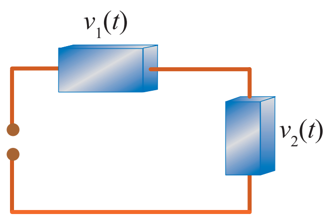
> **Déphasage d'un circuit ou d'une composante**
>
> Dans un circuit ou une composante d'un circuit, l'angle entre le vecteur tension et le vecteur courant est appelé **angle de déphasage du circuit ou de la composante**. L'intervalle de temps pour que les vecteurs parcourent l'angle de déphasage est appelé **déphasage du circuit ou de la composante**.

Opérations sur les vecteurs de phase

VectPhase02

Les vecteurs de phase sont des nombres complexes et les opérations s'effectuent de la même façon que sur les nombres complexes.

EXEMPLE 1



Dans le circuit illustré ci-contre, les tensions aux bornes des composantes sont décrites en fonction du temps par

$$v_1(t) = 3\sin(120\pi t) \text{ et } v_2(t) = 5\sin(120\pi t + \pi/3).$$

Déterminer $e(t)$, la tension appliquée au circuit. Esquisser le graphique de ces trois fonctions.

■ *Solution*

Par la loi des tensions de Kirchhoff, la tension à la source est égale à la somme des tensions aux bornes des composantes. Le vecteur de phase décrivant la tension à la source est la somme des vecteurs de phase décrivant la tension aux bornes des composantes. Les vecteurs de phase des tensions aux bornes des composantes sont respectivement

$$V_{10} = 3\angle 0 \text{ et } V_{20} = 5\angle \pi/3.$$

Pour additionner ces vecteurs, on les écrit sous forme rectangulaire,

$$E_0 = V_{10} + V_{20} = 3(\cos 0 + j\sin 0) + 5(\cos\pi/3 + j\sin\pi/3) = 5{,}5 + j4{,}33.$$

Pour déterminer l'amplitude et l'angle de phase, on doit exprimer le vecteur somme E_0 sous forme polaire. Le module est

$$\|E_0\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5{,}5^2+4{,}33^2} = 6{,}999\ 921\ ...$$

et l'argument $\phi = \arctan\left(\dfrac{4{,}33}{5{,}5}\right) = 0{,}667 \text{ rad, car } a > 0.$

Le vecteur de phase de la somme des tensions est donc

$$E_0 = V_{10} + V_{20} = 7\angle 0{,}667.$$

Le vecteur en rotation est

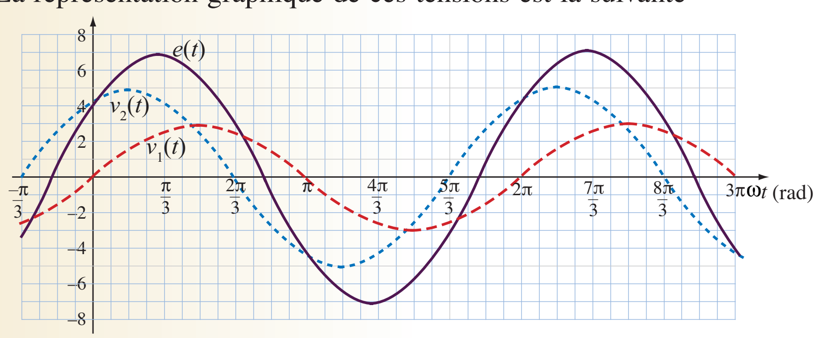
$$E(t) = 7\angle(120\pi t + 0{,}667)$$

dont la projection verticale est la fonction décrivant la tension sinusoïdale, soit

$$e(t) = 7\sin(120\pi t + 0{,}667)$$

La représentation graphique de ces tensions est la suivante

VectPhase03



Notion d'impédance

Impédance et admittance

L'**impédance** d'un circuit, notée Z**,** est définie par le quotient

$$Z = \frac{E_0}{I_0},$$

où E_0 est le vecteur de phase de la tension appliquée au circuit et I_0 est le vecteur de phase du courant total dans le circuit. De la même façon, l'impédance d'une composante est le rapport du vecteur de phase de la tension aux bornes de cette composante sur le vecteur de phase du courant circulant dans la composante. L'inverse multiplicatif de l'impédance est l'**admittance**; elle est notée Y, et définie par $Y = 1/Z$.

VectPhase04

EXEMPLE 2

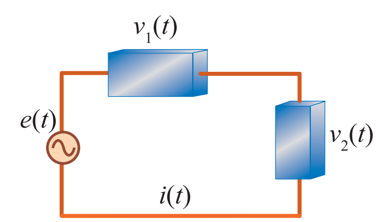
Calculer l'impédance du circuit illustré ci-contre, sachant que la tension appliquée est décrite par

$$e(t) = 60 \sin(120\pi t) \text{ V}$$

et que le courant est décrit par

$$i(t) = 15 \sin(120\pi t - \pi/6) \text{ A}.$$

Donner la signification des paramètres de l'impédance et calculer le déphasage du circuit.



Solution

La tension est décrite par la projection verticale du vecteur

$$E(t) = 60\angle 120\pi t.$$

Le vecteur de phase de la tension est $E_0 = 60\angle 0$.

Le courant est décrit par la projection verticale du vecteur

$$I(t) = 15\angle(120\pi t - \pi/6).$$

Le vecteur de phase du courant est $I_0 = 15\angle(-\pi/6)$

L'impédance est le rapport des vecteurs de phase, soit

$$Z = \frac{E_0}{I_0} = \frac{60\angle 0}{15\angle(-\pi/6)} = 4\angle \pi/6.$$

Ce vecteur complexe indique que le rapport de la tension maximum sur le courant maximum est de 4 Ω et que l'angle de déphasage est de π/6 rad ou 30°. Puisque la vitesse angulaire est de 120π rad/s, le temps nécessaire pour parcourir un angle de π/6 rad est la valeur de t telle que

$$t = \frac{\pi/6 \text{ rad}}{120\pi \text{ rad/s}} = \frac{1}{720} \text{s}.$$

Le déphasage du circuit est donc de 1/720 s.

VectPhase05

Impédance des composantes

Impédance01

REMARQUE
Dans les caractéristiques de la résistance, le rapport E/I est la valeur en ohms de la résistance. L'argument nul signifie que la tension et le courant sont en phase.

L'impédance d'une composante, comme tout nombre complexe, peut s'écrire sous forme polaire et sous forme rectangulaire. La forme polaire est utilisée pour les produits et quotients, et la forme rectangulaire pour les sommes.

Impédance d'une composante résistive (ésistance)

Dans une composante purement résistive, la tension et le courant sont en phase et sont décrits par les modèles sinusoïdaux

$e(t) = E \sin \omega t$ et $i(t) = I \sin \omega t$

où E et I sont les valeurs de crête.

Ce sont les projections verticales des vecteurs

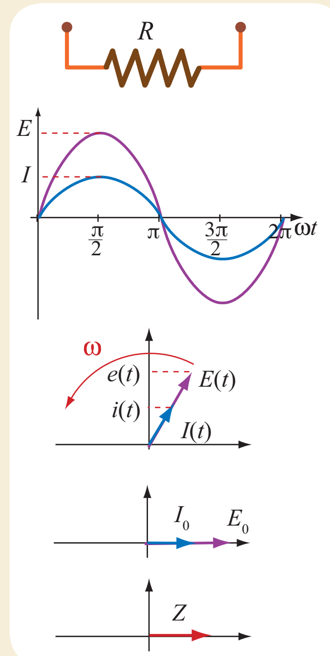
$E(t) = E\angle\omega t$ et $I(t) = I\angle\omega t$

dont les vecteurs de phase sont

$E_0 = E\angle 0$ et$I_0 = I\angle 0$.

L'impédance est

$$Z = \frac{E\angle 0}{I\angle 0} = \frac{E}{I}\angle 0$$
$$= R\angle 0 \text{ (forme polaire)}$$
$$= R + j0 \text{ (forme rectangulaire).}$$



REMARQUE
Dans le tableau qui précède, le rapport E/I est la valeur en ohms de la **réactance inductive** qui est représentée par X_L. C'est le module de la réactance. L'argument est l'angle de déphasage entre la tension et le courant dans la composante. Dans le cas d'une composante inductive, cet argument est $\pi/2$, ce qui signifie que le courant est en retard de $\pi/2$ rad sur la tension.

Impédance d'une composante purement inductive (bobine)

Dans une composante purement inductive, le courant accuse un retard de $\pi/2$ rad sur la tension. La tension et le courant sont décrits par

$e(t) = E_m \sin \omega t$ et $i(t) = I \sin(\omega t - \pi/2)$

où E et I sont les valeurs de crête.

Ce sont les projections verticales des vecteurs

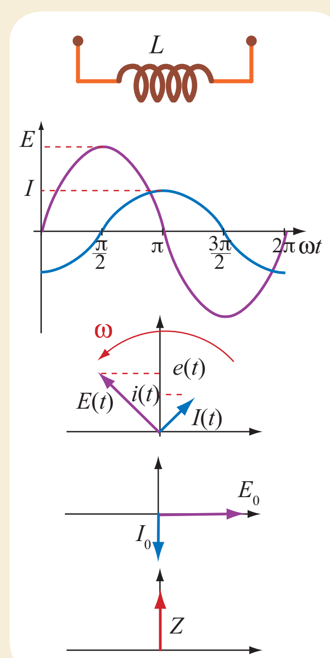
$E(t) = E\angle\omega t$ *et* $I(t) = I\angle(\omega t - \pi/2)$

Les vecteurs de phase sont alors

$E_0 = E\angle 0$ et $I_0 = I\angle(-\pi/2)$

L'impédance est

$$Z = \frac{E\angle 0}{I\angle(-\pi/2)} = \frac{E}{I}\angle\pi/2$$
$$= X_L\angle\pi/2 \text{ (forme polaire}$$
$$= 0 + jX_L \text{ (forme rectangulaire).}$$



Impédance d'une composante purement capacitive (condensateur)

Dans une composante purement capacitive, le courant est en avance de $\pi/2$ rad sur la tension. La tension et le courant sont décrits par

$e(t) = E \sin \omega t$ et $i(t) = I \sin(\omega t + \pi/2)$

où E et I sont les valeurs de crête.

Ce sont les projections verticales des vecteurs

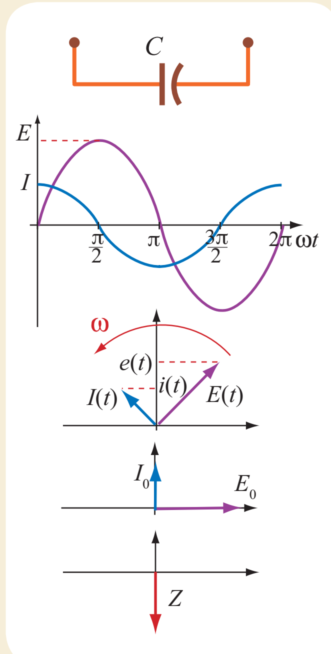
$E(t) = E\angle \omega t$ et $I(t) = I\angle(\omega t + \pi/2)$

Les vecteurs de phase sont alors

$E_0 = E\angle 0$ et $I_0 = I\angle \pi/2$.

L'impédance est

$$Z = \frac{E\angle 0}{I\angle \pi/2} = \frac{E}{I}\angle(-\pi/2)$$
$$= X_C\angle(-\pi/2) \text{ (forme polaire}$$
$$= 0 - jX_C \text{ (forme rectangulaire).}$$



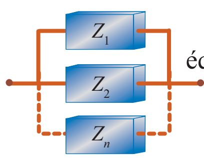
REMARQUE
Le rapport E/I est la valeur en ohms de la réactance capacitive qui est représentée par X_C. C'est le module de la réactance. L'argument est $-\pi/2$, ce qui signifie que le courant est en avance de $\pi/2$ rad sur la tension.

Impédance02

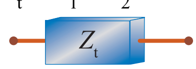
Impédance03

Impédance04

Pour déterminer l'impédance d'un circuit, on fait la somme des impédances des composantes. Si le circuit comporte des impédances Z_1, Z_2 ..., Z_n montées en parallèle, l'impédance totale Z_t est donnée par



équivaut à $\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_n}$



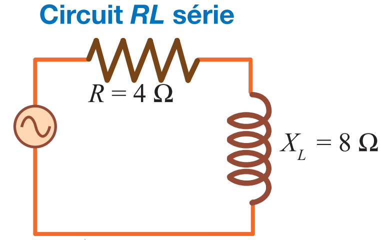
EXEMPLE 3

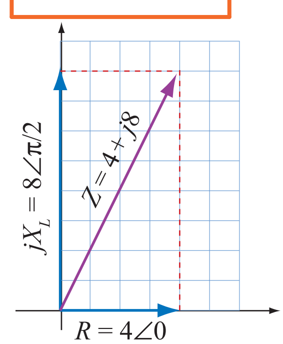
Considérant le circuit illustré ci-contre.

a) Tracer le diagramme d'impédance, exprimer l'impédance de ce circuit sous forme polaire, donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension maximum et le courant maximum.

b) Déterminer l'équation du courant dans le circuit, sachant que la tension est décrite en fonction du temps par $e(t) = 60 \sin(120\pi t)$ V.

Circuit *RL* série





Solution

a) Puisque $R = 4\ \Omega$, $Z_1 = 4\angle 0 = 4 + j0$ et puisque $X_L = 8\ \Omega$, la réactance inductive est représentée par

$$Z_2 = 8\angle \pi/2 = 0 + j8.$$

En représentant graphiquement ces vecteurs ainsi que le vecteur somme, on obtient le diagramme d'impédance du circuit, le vecteur somme est l'impédance totale du circuit. Ce qui donne

$$Z_t = (4 + j0) + (() + j8) = 4 + j8.$$

Le module de Z_t est $\|Z_t\| = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{80} \approx 8,94$

L'argument est $\phi = \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right) = \arctan\left(\frac{8}{4}\right) = 1,11$ rad.

Sous forme polaire, l'impédance totale s'écrit donc

$$Z_t = 8,94\angle 1,11$$

L'angle de déphasage du circuit est de 1,11 rad et le rapport de la tension maximum sur le courant maximum est 8,94 Ω.

b) Le vecteur de phase du courant est le quotient du vecteur de phase de la tension et de l'impédance, ce qui donne

$$I_0 = \frac{E_0}{Z} = \frac{60\angle 0}{8,94\angle 1,11} = 6,71\angle(-1,11).$$

Le vecteur de phase du courant est $I_0 = 6,71\angle(-1,11)$ et le courant est décrit par la projection verticale du vecteur

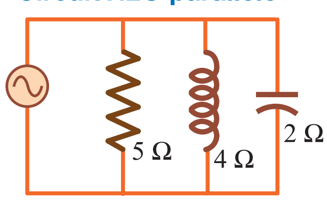
$$I(t) = 6,71\angle(120\pi t - 1,11)$$

soit $i(t) = 6,71 \sin(120\pi t - 1,11)$ A.

EXEMPLE 4

Impédance05

Circuit *RLC* parallèle



Déterminer l'impédance du circuit illustré ci-contre.

Solution

Puisque $R = 5$ Ω, $X_L = 4$ Ω et $X_C = 2$ Ω, on a :

$Z_1 = 5\angle 0 = 5 + i0$, $Z_2 = 4\angle\pi/2 = 0 + i4$ et $Z_3 = 2\angle(-\pi/2) = 0 - i2$.

En substituant les forme polaires dans $\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$, on obtient

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{5\angle 0} + \frac{1}{4\angle\pi/2} + \frac{1}{2\angle(-\pi/2)}.$$

En exprimant les numérateurs sous forme polaire, soit $1\angle 0$, et en effectuant la division, on obtient

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1\angle 0}{5\angle 0} + \frac{1\angle 0}{4\angle\pi/2} + \frac{1\angle 0}{2\angle(-\pi/2)} = 0,2\angle 0 + 0,251\angle(-\pi/2) + 0,5\angle\pi/2$$
$$= 0,2 - j0,25 + j0,5 = 0,2 + j0,25.$$

Par conséquent $\frac{1}{Z_t} = 0,2 + j0,25.$

En exprimant le numérateur et dénominateur sous forme polaire,

$$Z_t = \frac{1}{0,2 + j0,25} = \frac{1\angle 0}{0,32\angle(0,90)} = 3,13\angle(-0,90).$$

L'angle de déphasage du circuit est de –0,90 rad, le rapport de la tension maximum sur le courant maximum est 3,12 Ω.

Équivalence de circuits

Circuits équivalents

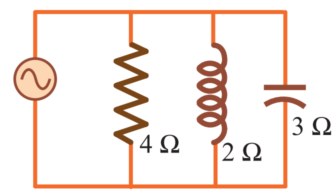
Deux circuits sont dits **équivalents** s'ils ont la même impédance.

EXEMPLE 5

Déterminer les composantes du circuit série équivalent au circuit ci-contre.

Impédance06

Circuit *RLC* parallèle



■ *Solution*

Puisque $R = 4\ \Omega$, la résistance est représentée vectoriellement par

$$Z_1 = 4 + 0j.$$

Puisque $X_L = 2\ \Omega$, la réactance inductive est représentée vectoriellement par

$$Z_2 = 0 + 2j.$$

Puisque $X_C = 3\ \Omega$, la réactance capacitive est représentée vectoriellement par

$$Z_3 = 0 - 3j.$$

En substituant dans $\dfrac{1}{Z_t} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3}$, on obtient :

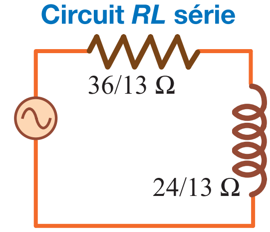
$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2j} + \frac{1}{-3j} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2j} \times \frac{j}{j} + \frac{1}{-3i} \times \frac{j}{j}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{j}{2} + \frac{j}{3} = \frac{3 - 6j + 4j}{12} = \frac{3 - 2j}{12}.$$

L'impédance est donc :

$$Z_t = \frac{12}{3-2j} = \frac{12}{3-2j} \times \frac{3+2j}{3+2j} = \frac{12(3+2j)}{3^2+2^2} = \frac{36}{13} + \frac{24}{13}j.$$

Circuit *RL* série



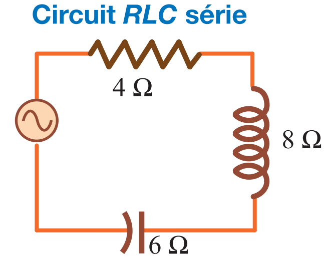
Le circuit série équivalent a une résistance de 36/13 Ω et une réactance inductive de 24/13 Ω. Le circuit équivalent est illustré ci-contre.

EXEMPLE 6

Déterminer les composantes du circuit parallèle équivalent au circuit série illustré ci-contre.

Impédance07

Circuit *RLC* série



■ *Solution*

L'impédance du circuit série est $Z_t = 4 + j8 - j6 = 4 + j2$.

L'admittance du circuit parallèle équivalent est alors

$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{4 + j2}.$$

En effectuant les divisions sous la forme rectangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_t} &= \frac{1}{4+j2} = \frac{1}{4+j2} \times \frac{4-j2}{4-j2} \\ &= \frac{4-j2}{20} = \frac{4}{20} - \frac{j2}{20} = \frac{1}{5} - \frac{j}{10}.\end{aligned}$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de la partie imaginaire par j, on a

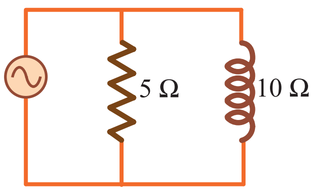
$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{5} - \frac{j}{10} \times \frac{j}{j} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j10}.$$

On obtient donc :

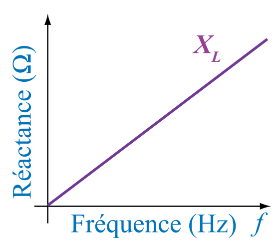
$$\frac{1}{Z_t} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j10}.$$

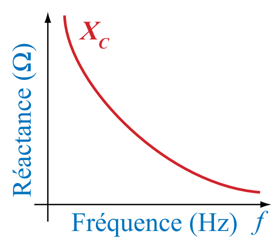
La résistance du circuit parallèle sera donc de 5 Ω et la réactance de 10 Ω. Le circuit équivalent est illustré ci-contre.

Circuit *RL* parallèle



Impédance08





Fréquence et impédance

En pratique, la réactance d'une composante est fonction de la fréquence du courant dans le circuit. La réactance d'une bobine, notée X_L, est directement proportionnelle à la fréquence. Elle est donnée par

$$X_L = 2\pi f L = \omega L,$$

où f est la fréquence en hertz (Hz) et L est l'inductance en henry (H).

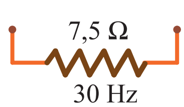
La réactance d'un condensateur, notée X_C, est inversement proportionnelle à la fréquence. Elle est donnée par

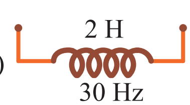
$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{\omega C},$$

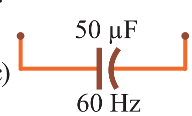
où f est la fréquence en hertz (Hz) et C est la capacitance en farad (F).

EXEMPLE 9.6.7

Calculer l'impédance des composantes suivantes.

a) 

b) 

c) 

Solution

a) La composante est une résistance, son impédance est indépendante de la fréquence. On a donc

$$Z = 7{,}5\angle 0.$$

b) La composante est une bobine de 2 H, sa réactance est donnée par $X_L = 2\pi fL$, on a donc

$$X_L = 2\pi \times 30 \text{ Hz} \times 2 \text{ H} = 376{,}99\ \Omega.$$

L'impédance est donc $Z_L = 377\angle\pi/2$.

c) La composante est un condensateur de 50 μF, sa réactance est donnée par $X_C = 1/(2\pi fC)$, on a donc

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi\times 60 \text{ Hz}\times 50\times 10^{-6}} = 53{,}05\ \Omega.$$

L'impédance est donc $Z_C = 53\angle(-\pi/2)$.

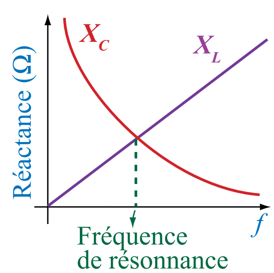
Puisque la réactance varie en fonction de la fréquence, les circuits ne sont équivalents qu'à la fréquence donnée.

Circuit résonnant

Un **circuit résonnant** est un circuit qui est équivalent à un circuit purement résistif.

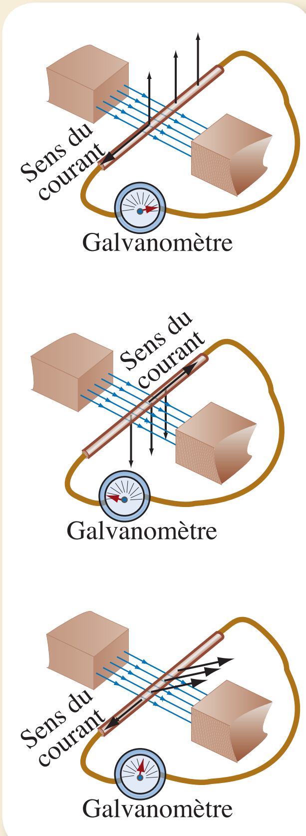
Un circuit série est résonnant lorsque les parties imaginaires des impédances des éléments de circuit s'annulent. Un circuit parallèle est résonnant lorsque les parties imaginaires des admittances s'annulent. Chaque circuit a sa propre fréquence de résonnance. Pour qu'un circuit soit résonnant, on doit avoir

$$X_L = X_C.$$



Note historique — PRODUCTION DU COURANT ALTERNATIF

En 1831, après de multiples expériences, Faraday constate que le déplacement d'un fil, ou d'une tige, dans un champ magnétique induit une tension dans ce fil. Si le fil forme un circuit, cette tension génère un courant. Le sens du courant observé dépend du sens de déplacement du fil.



En inversant le sens du déplacement, on inverse le sens du courant.

De plus, l'intensité du courant généré dépend de l'angle entre la direction du mouvement et la direction du champ magnétique. La tension et le courant atteignent leur valeur maximale lorsque le déplacement est perpendiculaire au champ magnétique.

Lorsque l'angle entre la direction du mouvement et la direction du champ magnétique est θ, l'intensité de la tension est donnée par :

$$E(\theta) = E_m \sin\,\theta,$$

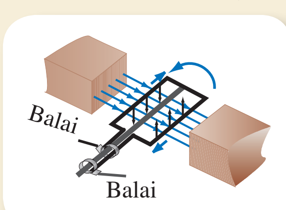
où E_m est la tension maximale. L'intensité du courant est donnée par :

$$I(\theta) = I_m \sin\,\theta,$$

où I_m est le courant maximal. Ce sont les descriptions mathématiques des découvertes de Faraday et Henry.

Le belge Zénobe Gramme perfectionna les machines à courant alternatif en 1867 et construisit la première dynamo industrielle, appelée *machine de Gramme*, qu'il présenta à l'Académie des sciences en 1871. Ce fut un événement considérable pour le développement de la civilisation moderne car cela allait permettre le recours à des sources d'énergie inexploitées jusqu'alors dans l'industrie.

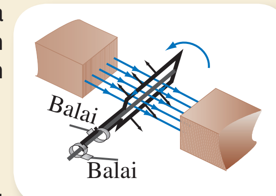
Dans la machine de Gramme, le fil en déplacement est remplacé par une boucle de fil en rotation dans un champ magnétique. Le fonctionnement est illustré dans les figures ci-dessous. Une boucle de fil dans un champ magnétique est en rotation dans le sens antihoraire. On peut considérer indépendamment chaque branche de la boucle et on constate que le déplacement de chacune des branches se fait selon la tangente à la trajectoire de la boucle.



L'angle de déplacement est variable, il dépend du temps *t*. On peut l'exprimer en fonction de la vitesse angulaire ω de la boucle de fil. On a alors :

$$\theta = \omega t$$

Il est donc possible d'exprimer la tension et le courant en fonction du temps. L'intensité de la tension au temps *t* est donnée par :



$$E(t) = E_m \sin\omega t \text{ volts},$$

où E_m est la tension maximale. L'intensité du courant au temps *t* est donnée par :

$$I(t) = I_m \sin\omega t \text{ ampères},$$

où I_m est le courant maximal et $\omega = 2\pi f$, où *f* est la fréquence du mouvement rotatif. C'est en partie grâce à cette description mathématique de la tension et du courant qu'il est possible de les analyser et de les contrôler.

En pratique, pour améliorer le rendement, on n'utilise pas une simple boucle de fil, mais un bobinage de fil. De plus, au lieu d'un champ magnétique, on a plusieurs champs magnétiques pour augmenter la fréquence de la tension et du courant sans augmenter la vitesse de rotation du bobinage de fil.

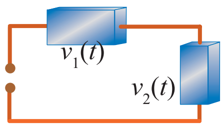
Pour produire une grande quantité d'électricité en appliquant ce principe, il faut avoir une force motrice qui fait tourner la boucle de fil dans le champ magnétique. C'est le rôle de la chute d'eau dans une centrale hydroélectrique ou du vent dans le cas d'une éolienne.

L'effet décrit ci-haut est appelé l'effet générateur. On peut inverser cet effet. Au lieu de faire tourner mécaniquement la boucle de fil dans le champ magnétique, on peut faire circuler un courant dans le fil de la boucle. Ce courant génère un champ magnétique autour du fil dont l'interaction avec le champ de l'aimant force la boucle à tourner pour permettre l'alignement des champs. Lorsque le courant que l'on fait circuler dans la boucle de fil est un courant alternatif, la boucle de fil tourne constamment dans le champ magnétique. C'est l'effet moteur.

C'est grâce aux travaux de Faraday et de Gramme et des scientifiques qui ont analysé leurs résultats et amélioré les techniques pour contrôler les effets générateur et moteur que notre civilisation peut aussi facilement produire de l'électricité et disposer d'une vaste gamme de moteurs électriques, du plus petit au plus grand.

Exercices

1, Déterminer la tension d'entrée $e(t)$ dans la partie de circuit illustrée ci-dessous.

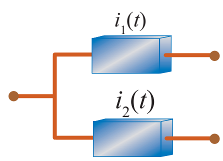


Les tensions aux bornes des composantes sont

$$v_1(t) = 9\sin(\omega t + \pi/4)\ \text{V}$$

$$\text{et } v_2(t) = 12\sin(\omega t + 5\pi/6)\ \text{V}.$$

2. Déterminer le courant d'entrée $i(t)$ dans la partie de circuit illustrée ci-dessous.



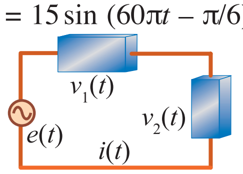
Les courants dans les composantes sont

$$i_1(t) = 8 \times 10^{-2}\sin(157t - \pi/4)\ \text{A}$$

$$\text{et } i_2(t) = 4 \times 10^{-2}\sin(157t + \pi/3)\ \text{A}.$$

3. Dans le circuit illustré ci-dessous, la tension aux bornes de la source est décrite par

$$e(t) = 15\sin(60\pi t - \pi/6)\ \text{V}.$$



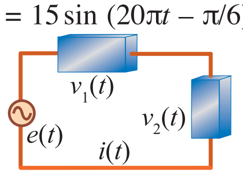
L'équation du courant est

$$i(t) = 12\sin(60\pi t - \pi/4)\ \text{A}$$

a) Calculer l'impédance du circuit.
b) Déterminer l'angle de déphasage et le déphasage du circuit.

4. Dans le circuit illustré ci-dessous, la tension aux bornes de la source est décrite par

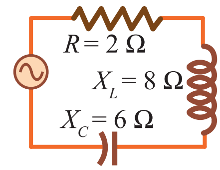
$$e(t) = 15\sin(20\pi t - \pi/6)\ \text{V}.$$



L'impédance est $Z = 6\angle\pi/6$.

a) Déterminer l'équation du courant.
b) Déterminer l'angle de déphasage et le déphasage du circuit.

5. À partir du circuit illustré:

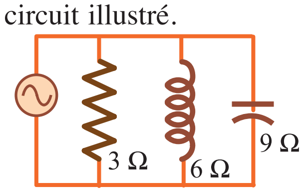


a) Tracer le diagramme d'impédance et trouver l'impédance du circuit.
b) Exprimer l'impédance sous forme polaire et donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension et le courant.
c) Trouver la tension dans le circuit, sachant que le courant est décrit en fonction du temps par

$$i(t) = 3{,}2\sin(40\pi t)\ \text{A}.$$

d) Dire si le courant est en avance ou en retard sur la tension.

6. À partir du circuit illustré.



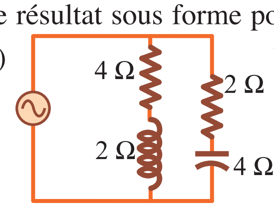
a) Calculer l'impédance du circuit.
b) Exprimer l'impédance sous forme polaire et donner l'angle de déphasage du circuit et le rapport entre la tension et le courant.
c) Calculer la tension dans le circuit, sachant que le courant est décrit en fonction du temps par

$$i(t) = 6{,}5\sin(80\pi t + \pi/4)\ \text{A}.$$

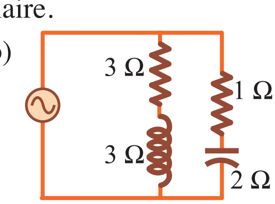
d) Dire si le courant est en avance ou en retard sur la tension.

7. Calculer l'impédance du circuit illustré et donner le résultat sous forme polaire.

a)

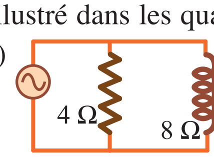


b)

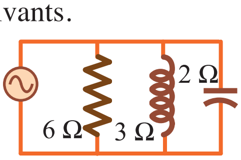


8. Déterminer le circuit série équivalent au circuit illustré dans les quatre cas suivants.

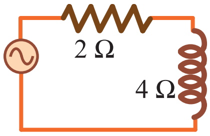
a)

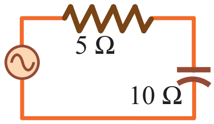


b)



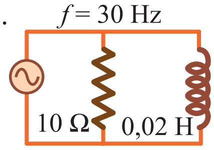
9. Déterminer le circuit parallèle équivalent au circuit illustré dans les quatre cas suivants.

a) 

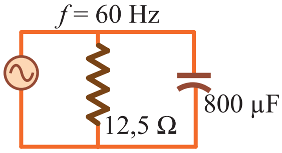
b) 

10. Déterminer le circuit série équivalent au circuit donné à la fréquence indiquée.

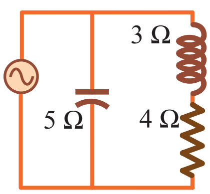
a). $f = 30$ Hz

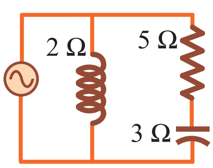


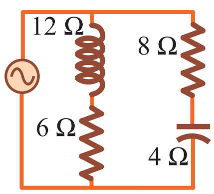
b) $f = 60$ Hz

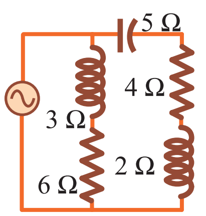


11. Déterminer l'impédance des circuits suivants.

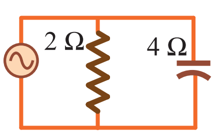
a) 

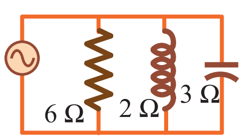
b) 

c) 

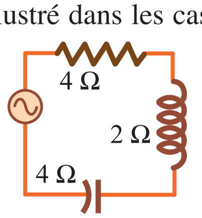
d) 

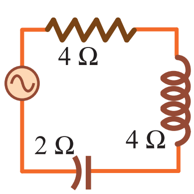
12. Déterminer le circuit série équivalent au circuit illustré dans les cas suivants.

a) 

b) 

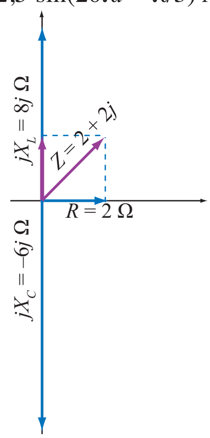
13. Déterminer le circuit parallèle équivalent au circuit illustré dans les cas suivants.

a) 

b) 

Réponses

1. $e(t) = 13 \sin(\omega t - 1{,}26)$ V
2. $i(t) = 7{,}96 \times 10^{-2} \sin(157t - 0.28)$ A
3. a) $1{,}25\angle\pi/12$
   b) L'angle de déphasage du circuit est la différence de phase entre le vecteur tension et le vecteur courant. C'est l'angle de l'impédance, soit $\pi/12$ rad et puisque $\omega = 60\pi$, le déphasage de 1/720 s.
4. a) $i(t) = 2{,}5 \sin(20\pi t - \pi/3)$ A
5. a) $2 + j2$



   b) $2{,}83\angle\pi/4$
   Angle de déphasage de $\pi/4$ rad et rapport entre la tension maximum et le courant maximum de 2,83 Ω.
   c) $e(t) = 9{,}06 \sin(40\pi t + \pi/4)$ V
   d) Le courant est en retard sur la tension.
6. a) $2{,}92 + i0{,}49$
   b) $2{,}96\angle 0{,}17$, l'angle de déphasage est de 0,17 rad et le rapport tension courant est de 2,96 Ω.
   c) $e(t) = 19{,}24 \sin(80\pi t + 0{,}96)$ V
   d) Le courant est en retard sur la tension.
7. a) $3{,}16\angle(-0{,}32)$ b) $2{,}30\angle(-0{,}57)$
8. a) $3{,}30 + 1{,}60i$, d'où $R = 3{,}20$ Ω et $X_L = 1{,}60$ Ω
   b) $3 - 3i$, d'où $R = 3$ Ω et $X_C = 3$ Ω
9, a) $R = 10$ Ω et $X_L = 5$Ω
   b) $R = 25$ Ω et $X_C = 12{,}5$ Ω
10. a) $3{,}53\angle 1{,}21 = 1{,}24 + 3{,}30j$, d'où $R = 1{,}24$ Ω et $X_L = 60\pi L = 3{,}30$ Ω, d'où $L = 0{,}017$ H.
   b) $0{,}82 - 3{,}10j = 3{,}21\angle{-1{,}31}$, d'où $R = 0{,}82$ Ω et De plus, $X_C = 1/(120\pi C) = 3{,}10$ Ω, d'où C = 881 μF
11. a) $5 - 2{,}5j$ c) $7{,}38 + 0{,}92j$
   b) $0{,}77 + 2{,}15j$ d) $3{,}3 - 0{,}6j$
12. a) $1{,}60 + 0{,}80j$, d'où $R = 1{,}60$ Ω et $X_L = 0{,}80$ Ω
   b) $3 + 3j$, d'où $R = 3$ Ω et $X_L = 3$ Ω
13. a) $R = 5$ Ω et $X_C = 10$ Ω
   b) $R = 5$ Ω et $X_L = 10$ Ω

