Illustration : Noémie Ross

Alexis Claude Clairaut
1713-1765

L'étude du plan dans l'espace a débuté avec la présentation d'un mémoire d'Alexis Clairaut à l'Académie des sciences de Paris en 1729. Dans ce mémoire, Clairaut, alors âgé de 16 ans, donne une équation du plan ainsi que la formule de la distance entre deux points du plan et dans l'espace. La sphéroïde de Clairaut est un modèle de la forme de la Terre conforme aux prévisions données par Isaac Newton en 1687. Par ce modèle, Clairaut contribue à imposer les idées de Newton en France, alors qu'elles y étaient encore contestées car on préférait le vision de René Descartes.

Alexis Clairaut

Alexis Clairaut est le second d'une fratrie de vingt-et-un enfants. Son père, Jean-Baptiste Clairaut (1680-1766), enseignait les mathématiques. Il est instruit par lui en cette matière, apprenant à lire dans les *Éléments* d'Euclide. Très précoce, il écrit un mémoire sur quatre courbes géométriques à l'âge de douze ans. À treize ans, il lit un compte rendu des propriétés de ces quatre courbes devant l'Académie des sciences. À seize ans seulement, il rédige un traité intitulé « *Recherches sur les courbes à double courbure* » qui, lors de sa publication en 1731, entraîne son admission à l'Académie des sciences alors qu'il n'avait pas l'âge légal.

Théorème de Clairaut (gravimétrie)

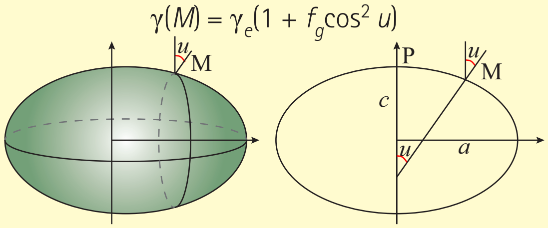
Soit un corps de révolution symétrique par rapport à l'équateur, de rayon équatorial a et de rayon polaire c, et supposons que l'aplatissement géométrique défini par le rapport $f = (a - c)/a$ est petit (la valeur pour la Terre en est d'environ 1/300). En notant u l'angle que fait la verticale en un point quelconque M de la surface avec l'axe des pôles. L'équation de cette surface, appelée sphéroïde de Clairaut, est $r = a(1 - f\cos^2 u)$.

Soient γ_e *et* γ_p les pesanteurs à l'équateur et aux pôles, et

$$f_g = \frac{\gamma_e - \gamma_p}{\gamma_e}$$

l'aplatissement gravimétrique. Clairaut a montré que, dans ces circonstances, la pesanteur sur le sphéroïde sera de la forme

$$\gamma(M) = \gamma_e(1 + f_g\cos^2 u)$$



Comme l'angle u est la colatitude du point M, Clairaut retrouve théoriquement le résultat que Maupertuis avait déduit d'une douzaine d'expériences pendulaires à différentes latitudes. Cette dernière équation, munie d'un terme supplémentaire très petit pour tenir compte des effets du second ordre, constitue à l'heure actuelle la formule internationale de la pesanteur. Tous les gravimétristes l'utilisent pour corriger leurs observations.

Sphéroïde de Clairaut

En 1736, Clairaut participe à l'expédition en Laponie avec Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), expédition dont l'objet est d'estimer la longueur d'un degré d'arc de méridien[1]. Cette mesure revêtait une très grande importance dans les cercles scientifiques de l'époque. En la comparant avec la mesure d'un degré d'arc de méridien à l'équateur, il devenait possible de déterminer la forme de la Terre. Selon la théorie de René Descartes[2] (1596-1650) sur

1. Charles Marie de La Condamine (1701-1774) a mené, de 1735 à 1743, une expédition en Équateur pour mesurer trois degrés du méridien afin de comparer aux mesures de Maupertuis.
2. Pour Descartes qui ne pouvait concevoir l'existence du vide, les mouvements célestes sont dus aux tourbillons de matière dans lesquels baignent les corps célestes. Selon cette théorie, la Terre est comprimée par cette matière qui la met en mouvement. Il en résulte un allongement aux pôles.

© 2020, Prodafor

le mouvement des corps célestes, la Terre devait être étirée aux pôles alors que selon celle de Newton, la Terre était plutôt aplatie aux pôles.

À son retour de cette expédition, il publie un traité « *Théorie de la figure de la terre* » (1743), où il démontre que l'aplatissement géométrique à la surface d'un ellipsoïde en rotation est lié à une quantité cinétique et à une quantité dynamique, représentant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur. Plus précisément, il démontre un résultat de gravimétrie (voir encadré sur ce sujet) qui porte son nom et qui relie la pesanteur à la surface d'un ellipsoïde en rotation, à la compression et à la force centrifuge à l'équateur. Ce qui constitue une synthèse des rapports existant entre la pesanteur et la forme de la Terre[3].

Dans ce traité, Clairaut pose les fondations de l'hydrostatique moderne, dont la formulation actuelle fut donnée par Leonhard Euler (1707–1783) quelques années plus tard.

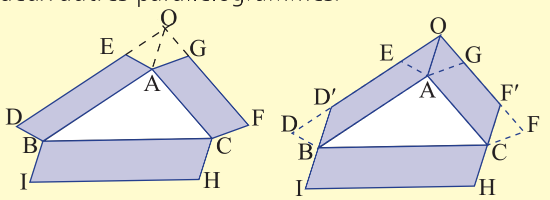
En 1731, Clairaut donne une démonstration d'une conjecture énoncée par Newton selon laquelle toutes les courbes du troisième ordre sont des projections de cinq « paraboles divergentes » particulières (voir encadré ci-contre. Clairaut devient membre de la Royal Society le 27 octobre 1737.

Impressionné par la puissance de la géométrie dans les écrits de Newton et de Maclaurin, Clairaut présente une *Théorie de la lune* en 1752 dont la rédaction est strictement de nature newtonienne. Il contient l'explication du mouvement de l'apside qui avait précédemment embarrassé les astronomes. C'est par une approximation au troisième ordre, que Clairaut constate que le résultat était conforme aux observations. Il dresse aussi quelques tables lunaires et, en 1759, il calcule le périhélie de la comète de Halley. En 1760, Clairaut publie *Théorie des comètes.*

Pour commémorer sa mémoire, on a donné son nom à un astéroïde et à un cratère lunaire.

Théorème de géométrie de Clairaut

Soit ABC un triangle, ABDE et ACFG deux parallélogramme extérieurs au triangle et O le point de rencontre des côtés DE et FG des parallélogrammes. Si BCHI est un parallélogramme extérieur au triangle tel que OA et CH sont parallèles et de même longueur, alors l'aire du parallélogramme BCHI est égale à la somme des aires des deux autres parallélogrammes.



On le démontre en déformant les parallélogrammes sans modifier leur aire comme l'illustre la figure de droite.

Dans le cas particulier où le triangle ABC est rectangle et que les parallélogrammes sont des carrés, ce théorème est une généralisation du théorème de Pythagore.

Ce théorème porte le nom de Clairaut, mais il s'agit du frère cadet de Alexis Claude qui était aussi un mathématicien précoce qui est l'auteur de deux ouvrages de géométrie élémentaire. En 1778, le mathématicien Jean-Étienne Montucla (1725-1799, auteur d'une *Histoire des mathématiques* a attribué ce théorème à Pappus, mais le nom de Clairaut lui est resté accolé.

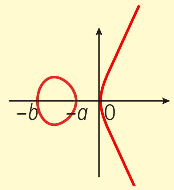
Paraboles divergentes

Les paraboles divergentes sont les courbes définies par l'équation cartésienne

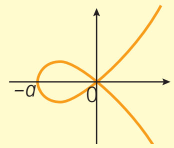
$$y^2 = P(x),$$

où $P(x)$ est un polynôme du troisième degré. Les équations suivantes sont les formes cartésiennes réduites.

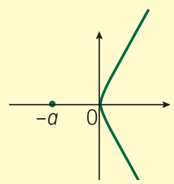
Cubique elliptique à ovale,
$cy^2 = x(x - a)(x - b)$
trois racines réelles distinctes.



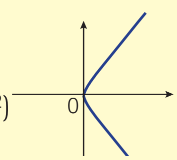
Cubique crunodale,
$by^2 = x^2(a - x)$
a un point double.



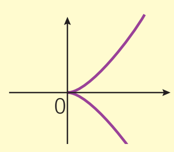
Cubique acnodale
$by^2 = x^2(x - a)$
a un point isolé.

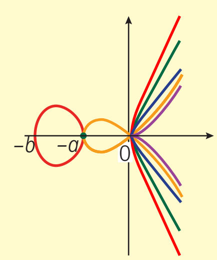


Cubique elliptique à une branche,
$cy^2 = x((x - a)^2 + b^2)$



Cubique cupsidale,
$ay^2 = x^3$,
a un point de rebroussement, racine réelle triple.





3. Le problème de la forme de la Terre a constitué l'un des problèmes majeurs de la science du XIXe siècle. Son étude a amené de très importants progrès en mathématiques, en mécanique, en astronomie et en géodésie.
4. Les apsides sont les deux points extrêmes de l'orbite d'un corps céleste.

© 2020, Prodafor