

Archimède  
~287 à ~212

La courbe appelée *Spirale d'Archimède* a été initialement étudiée par un de ses amis, Conon de Samos (environ ~280 à ~220). Cependant, Archimède a démontré diverses propriétés de cette courbe en cherchant à résoudre certains des grands problèmes géométriques de l'Antiquité. Dans ses travaux sur cette courbe, il a résolu des problèmes qui relèvent maintenant du calcul différentiel et intégral.

# Archimède De la spirale

0  
 $\pi/2$   
 $\pi$   
 $3\pi/2$   
 $2\pi$   
 $5\pi/2$   
 $3\pi$   
 $7\pi/2$

Le point qui se déplace à vitesse constante sur une demi droite en rotation à vitesse constante autour de l'une de ses extrémités, engendre une spirale d'Archimède.

Archimède a écrit plus de dix ouvrages sur différents sujets :

- Les centres de gravité de parallélogrammes, de triangles et de segments de parabole.
- *La sphère et le cylindre*, traité dans lequel on retrouve les deux résultats suivants :

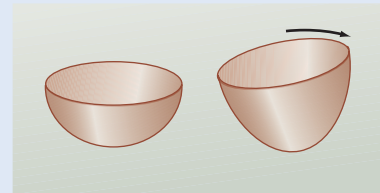
*La surface de la sphère est quatre fois celle d'un grand cercle (cercle dont le diamètre est le même que la sphère).*

*Lorsqu'un cylindre est circonscrit à une sphère avec un diamètre égal à celui de la sphère, le volume et la surface du cylindre sont une fois et demie le volume et la surface de la sphère.*

- *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*, essai qui traite des volumes engendrés par des ellipses et des paraboles tournant autour d'un axe de symétrie et des hyperboles tournant autour de l'axe transverse.
- *Sur les corps flottants* qui traite de l'équilibre d'un segment de parabolioïde de révolution flottant dans un liquide et du principe de l'hydrostatique d'Archimède.

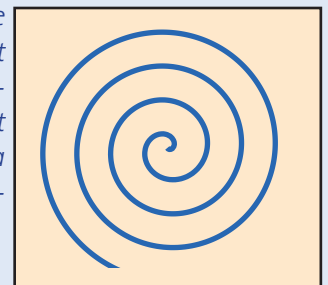
Cette étude débouche tout naturellement sur le problème de l'équilibre des coques de navire. Le problème est le suivant : si la parabolioïde est pen-

chée d'un certain nombre de degrés, réussira-t-elle à se relever?



- Un traité de la méthode où il dévoile quelques-unes des méthodes de recherche qui lui ont permis de trouver plusieurs de ses théorèmes. C'est dans ce traité, adressé à Ératosthène qu'il explique sa méthode de comparaison des aires et des volumes par les principes du levier.
- Le *Traité des spirales*, Archimède donne la définition suivante :

*Lorsqu'une demi-droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, si sur cette demi-droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira dans le plan une spirale.*

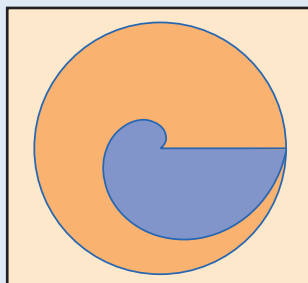


### Tangente à la courbe

Archimède a également résolu le premier problème de calcul différentiel en construisant la tangente en un point quelconque de sa spirale. Si on connaît l'angle que la tangente fait avec une droite donnée, la tangente est connue car il s'agit de tracer par un point donné une droite dont la direction est connue. Le problème consistant à trouver l'angle que fait la tangente à une courbe avec une droite donnée est le problème principal du calcul différentiel.

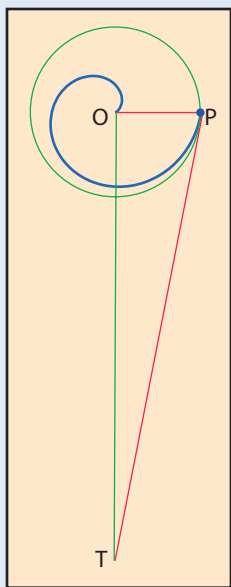
*Et si une droite est tangente à la spirale en son extrémité atteinte en dernier lieu, et qu'on élève, sur la demi-droite ayant tourné et repris sa position initiale, la perpendiculaire à l'extrémité restée fixe jusqu'à sa rencontre avec la tangente, je dis que le segment de droite ainsi mené est égal à la circonférence du cercle.*

*L'aire comprise entre la spirale et la demi-droite replacée dans la position d'où elle est partie vaut le tiers de l'aire du cercle décrit de l'extrémité fixe comme centre et dont le rayon est le segment que le point a parcouru pendant une révolution de la demi-droite.*



Pour démontrer ce résultat, Archimède applique à nouveau la méthode d'exhaustion qui consiste, par un double raisonnement par l'absurde, à montrer que l'aire de la spirale ne peut être ni plus petite ni plus grande que le tiers de celle du cercle.

Cet énoncé signifie que dans la figure ci-contre, la longueur du segment OT est égale à la circonférence du cercle de centre O et de rayon OP. C'est en effectuant des recherches sur la quadrature du cercle qu'Archimède obtient ce résultat. Il démontre également que l'aire du cercle est égale à l'aire du triangle OPT. C'est en appliquant la méthode d'exhaustion qu'il démontre ce résultat. En effet, la base du triangle est égale à  $2\pi r$  et sa hauteur est  $r$ , son aire est la moitié du produit de la base par la hauteur, soit  $\pi r^2$ .



Archimède n'a pas résolu le problème de la quadrature du cercle puisque cette quadrature devait être effectuée en n'utilisant que la règle et le compas. Dans son étude de la spirale, il compare l'aire du cercle et l'aire comprise entre la spirale et le segment de droite après une révolution. Il obtient alors :

### Trisection de l'angle

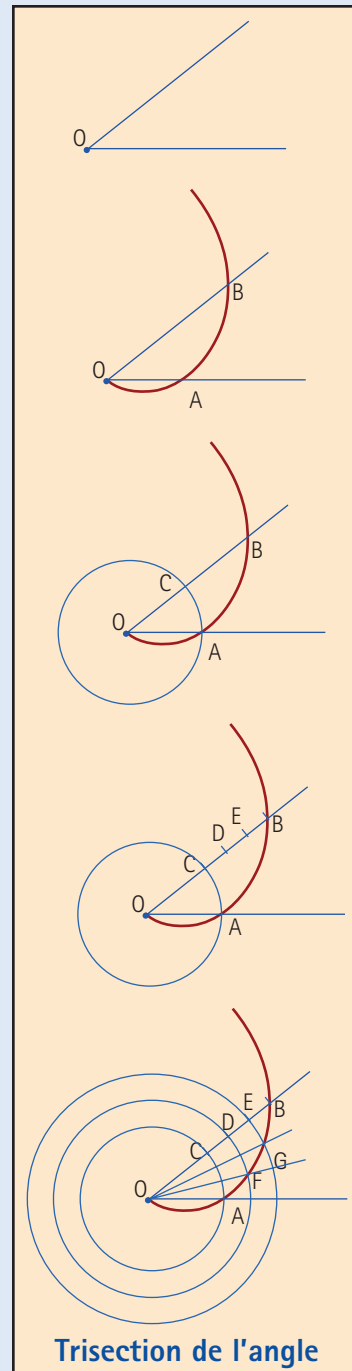
Archimède s'est aussi intéressé au problème de la trisection de l'angle. Sa méthode ne respectait pas les contraintes du problème puisque sa solution n'était pas obtenue en utilisant seulement la règle et le compas, il utilisait en plus la spirale. Voici comment il procède.

Pour partager un angle en trois parties égales, on fait coïncider son sommet avec l'origine d'une spirale.

L'intersection des côtés de l'angle et de la spirale détermine des points A et B. On trace le cercle de rayon OA dont l'intersection avec l'autre côté de l'angle est le point C.

On divise alors le segment BC en trois parties égales, déterminant ainsi les points D et E.

On trace les cercles de rayon OD et OE qui coupent la spirale aux points F et G. On trace les segments OF et OG qui divisent l'angle en trois parties égales.



Trisection de l'angle