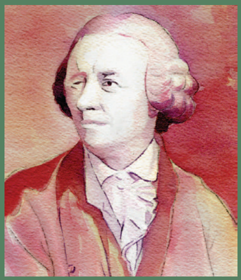


Leonhard Euler

1707-1783

Leonhard Euler a choisi la première lettre de son nom pour désigner la base des logarithmes naturels. On rencontre ce nombre dans le calcul d'un intérêt composé continûment.

Leonhard Euler
Le nombre e

Le calcul de l'intérêt est un problème qui remonte à très loin dans l'histoire et il est parfois avantageux d'en connaître les détails.

Supposons que vous placez un capital, notons-le C_0, à un taux d'intérêt annuel de 100 %. Cela signifie qu'à la fin de l'année votre capital aura doublé. En effet :

$$\begin{aligned} C_0 + 100\% \times C_0 &= C_0 + \frac{100}{100} C_0 \\ &= C_0 + C_0 = 2C_0 \end{aligned}$$

Soucieux de vous enrichir le plus rapidement possible, vous voulez savoir ce que vous rapporterait le même placement à un taux annuel de 100 % capitalisé semestriellement. À la première capitalisation, vous recevez la moitié de l'intérêt annuel, soit 50 %. En notant C_1 le capital après la première capitalisation, vous détenez :

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 + 50\% \times C_0 = C_0 + \frac{1}{2} C_0 \\ &= C_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

À la deuxième capitalisation en fin d'année, vous recevez 50 % du capital placé après la première capitalisation, soit :

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + 50\% \times C_1 = C_1 + \frac{1}{2} C_1 \\ &= C_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} C_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= C_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = C_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Puisque

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25,$$

vous avez multiplié votre capital par 2,25 grâce à la capitalisation semestrielle.

Encouragé par ce calcul, vous décidez de calculer le capital accumulé si la capitalisation était trimestrielle. En procédant comme dans le cas précédent, vous obtenez que votre capital sera multiplié par

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2{,}441\,406\,25...$$

Vous constatez qu'en augmentant le nombre de capitalisations annuelles, le capital accumulé augmente et vous décidez de poursuivre vos calculs. Pour une capitalisation mensuelle, votre capital est multiplié par :

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}613\ 035\ 29...$$

Pour une capitalisation hebdomadaire, le facteur est :

$$\left(1+\frac{1}{52}\right)^{52} = 2{,}692\ 596\ 954\ ...$$

Pour une capitalisation journalière, le facteur est :

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}714\ 567\ 482\ ...$$

Existe-t-il une limite ?

Le nombre e est la limite de ces expressions lorsque m tend vers l'infini,

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e.$$

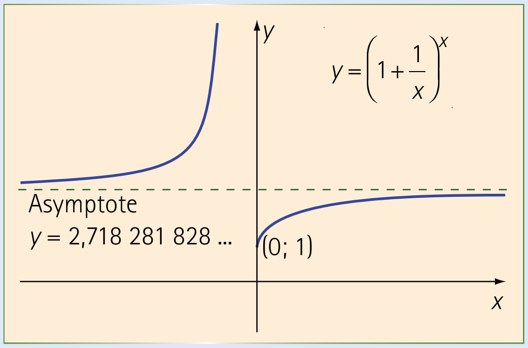
Sa valeur est :

$$e = 2{,}718\ 281\ 828\ ...$$

Cela signifie que le meilleur rendement est obtenu avec une capitalisation continue et le caplital placé est alors multiplié annuellement par $e = 2{,}718\ 281\ 828$ ...

Le graphique suivant est celui de la fonction

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$



Supposons un taux d'intérêt plus réaliste, par exemple, un taux de 12 % capitalisé m fois par année. Le capital accumulé en fin d'année est alors multiplié par le facteur

$$\left(1+\frac{0{,}12}{m}\right)^{m}$$

De façon générale, si le taux nominal est j, exprimé en décimales et capitalisé m fois, le capital en fin d'année est multiplié par :

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

Le taux affiché par les institutions financières est appelé *taux nominal* qui est différent du taux réellement versé sur une année que l'on appelle *taux réel.*

Dans le calcul des intérêts, la relation

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} = 1+r$$

donne le taux réel r correspondant à un taux nominal j capitalisé m fois par année. Plus la durée de la période de capitalisation est courte, plus m est grand. À la limite, lorsque m tend vers l'infini, on dit que l'intérêt est continu. On a alors :

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} = e^{j}.$$

Donc, si la capitalisation se fait de façon continue, on a :

$$1 + r = e^{j}, \text{ d'où } j = \ln(1 + r)$$

et le taux d'intérêt continu j équivalent au taux réel r est $j = \ln(1 + r)$.

Un intérêt journalier peut être considéré comme un intérêt capitalisé de façon continue.

Il est donc avantageux pour le prêteur que la capitalisation se fasse le plus souvent possible. De la même façon, puisque l'intérêt est calculé sur le montant qui reste à rembourser, il est avantageux pour l'emprunteur de faire des remboursements à la semaine plutôt qu'au mois.