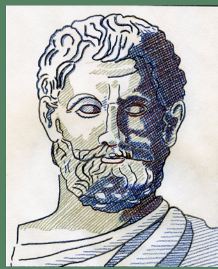
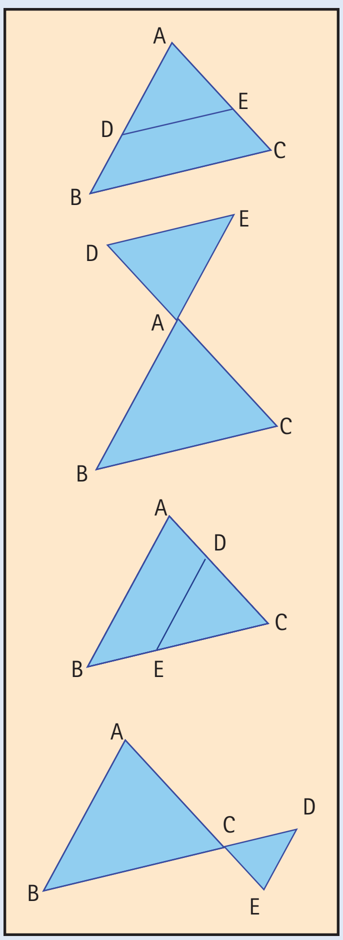


Illustration : Alain Ross

Thalès de Milet
–624- –548

Le nom de Thalès est associé à un théorème de la géométrie plane selon lequel toute droite tracée parallèlement à l'un des côtés d'un triangle détermine des segments proportionnels sur les deux autres côtés. Il est difficile de s'imaginer comment il pouvait démontrer ce résultat sans la notation symbolique moderne.

Thalès de Milet
Le théorème de Thalès

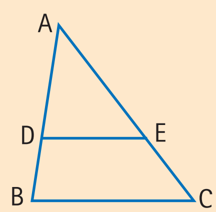


Si Thalès a démontré ce théorème, c'est probablement en se fondant sur le fait que des triangles ayant même base et de hauteurs égales ont des aires égales et en déterminant le rapport des aires de triangles.

Théorème de Thalès

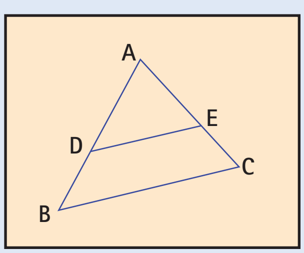
Toute droite tracée parallèlement à l'un des côtés d'un triangle détermine des segments proportionnels sur les deux autres côtés.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$$

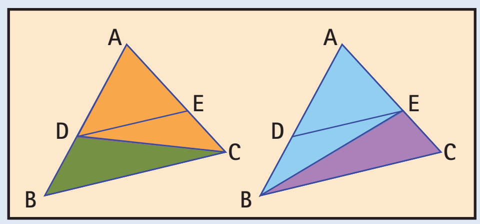


Démonstration

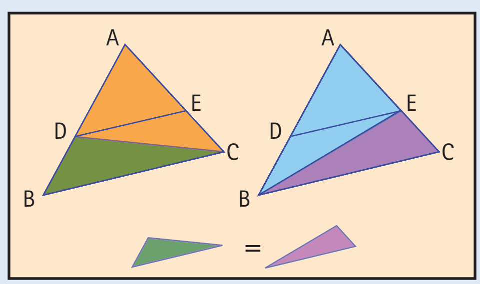
Considérons un triangle ABC et un segment DE parallèle au côté BC.



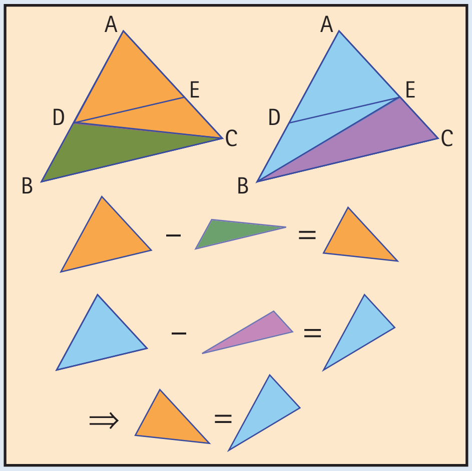
Pour faciliter la compréhension, reproduisons le triangle ABC et la droite DE. Dans le premier triangle, on trace DC pour former le triangle BDC et dans le deuxième triangle, on trace la droite EB pour former le triangle EBC.



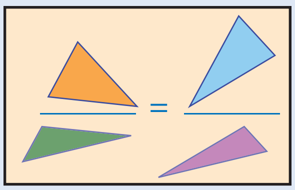
Alors, les triangles DBC et EBC ont même aire puisqu'ils ont même base BC et que leur hauteur est la distance entre les segments DE et BC.



De plus, les triangles ADC et ABE ont même aire puisque celles-ci sont obtenues en retranchant de l'aire de ABC celles de DBC et ECB, respectivement.



Les aires de ces parties du triangle ABC ont le même rapport, soit :

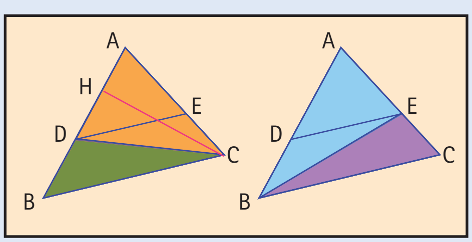


Dans ces rapports des aires, les triangles du rapport de droite ont la même hauteur et en simplifiant il reste le rapport des bases, soit le rapport des segments sur le côté AB. De même, les triangles du rapport de droite ont la même hauteur et en simplifiant il reste le rapport des bases, soit le rapport des segments sur le côté AC.
Le rapport des segments sur le côté AB est donc égal au rapport des segments sur le côté AC et les segments déterminés sur ces côtés sont proportionnels.

En écriture symbolique moderne, cela donne :

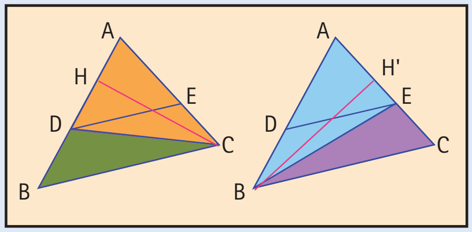
$$\frac{A_{ADC}}{A_{DBC}} = \frac{A_{AEB}}{A_{ECB}}.$$

En abaissant du sommet C la perpendiculaire au côté AB, on obtient CH la hauteur des triangles ADC et DBC. On a alors :



$$\frac{A_{ADC}}{A_{DBC}} = \frac{\dfrac{\overline{AD} \times \overline{CH}}{2}}{\dfrac{\overline{DB} \times \overline{CH}}{2}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}.$$

En abaissant du sommet B la perpendiculaire au côté AC, on obtient BH', la hauteur des triangles AEC et ECB. On a alors :



$$\frac{A_{AEB}}{A_{ECB}} = \frac{\dfrac{\overline{AE} \times \overline{BH'}}{2}}{\dfrac{\overline{EC} \times \overline{BH'}}{2}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

Par conséquent :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}.$$

On obtient donc que DE détermine des segments proportionnels sur AB et AC.

Corrollaire du théorème

À partir de ce théorème, par simple manipulation des proportions, on peut montrer que :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

En traçant EF parallèlement à AB, on détermine des segments proportionnels sur AC et BC et on peut montrer que les côtés des triangles ADE et ABC sont proportionnels.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

De plus, les angles sont congrus et on peut conclure comme corollaire du théorème de Thalès que la droite tracée parallèlement à un côté d'un triangle détermine un second triangle semblable au premier.