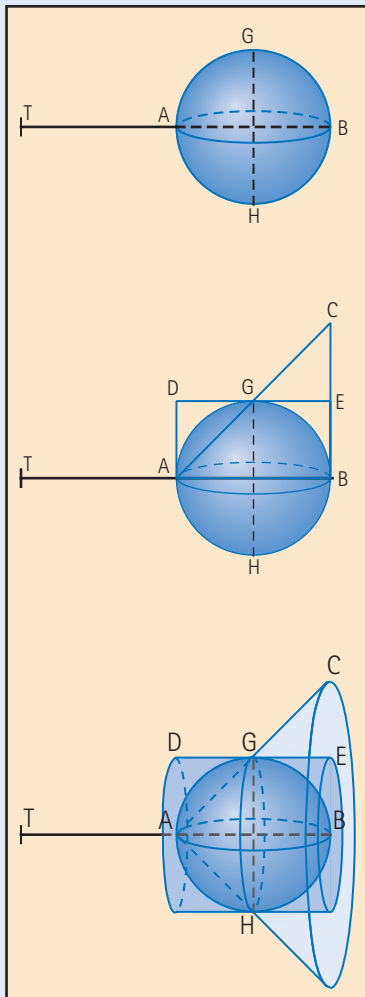


Archimède
~287 à ~212

Archimède a utilisé la méthode d'exhaustion pour démontrer plusieurs résultats que l'on obtient maintenant de façon beaucoup plus simple à l'aide du calcul intégral. C'est le cas pour le volume de la sphère.

Archimède Volume de la sphère

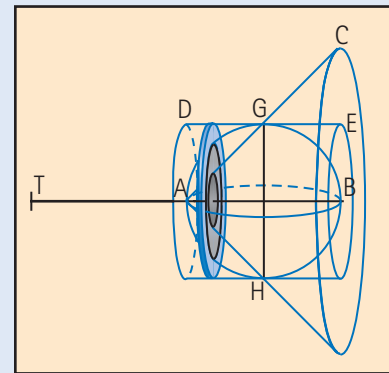


Archimède a utilisé sa méthode du levier pour obtenir une conjecture sur le volume de la sphère de rayon r . Voyons comment il a procédé, en utilisant l'écriture moderne qui nous est familière. Il place la sphère de telle sorte qu'un diamètre AB coïncide avec un axe horizontal et trace le diamètre perpendiculaire GH.

Dans le même plan que le diamètre GH, il construit le rectangle ABED de telle sorte que $\overline{AD} = r$. En prolongeant le segment AG jusqu'à sa rencontre avec le prolongement du côté BE, il construit le triangle ABC.

La révolution du rectangle ABED autour de l'axe horizontal TB donne un cylindre la révolution du triangle ABC autour du même axe engendre cône.

Il considère les coupes de ces trois solides en fines tranches d'épaisseur Δx , perpendiculaires à l'axe TB et à une distance x du pôle A qui est utilisé comme pivot du levier.



Il détermine ensuite le volume de chacune de ces tranches. La tranche du cylindre est un disque dont le rayon est r , son volume est :

$$\Delta V_{\text{cylindre}} = \pi r^2 \Delta x$$

La tranche du cône est un disque dont le rayon est x , son volume est :

$$\Delta V_{\text{cône}} = \pi x^2 \Delta x$$

Dans la figure suivante, on voit que la tranche de la sphère est un disque dont le rayon R est tel que :

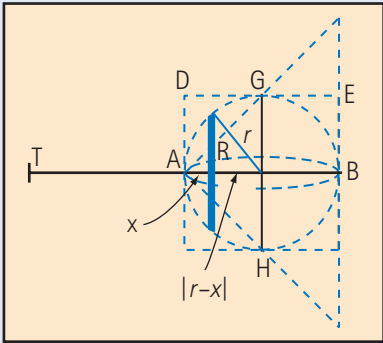
$$r^2 = R^2 + |r - x|^2$$

d'où :

$$r^2 = R^2 + r^2 - 2rx + x^2,$$

ce qui donne :

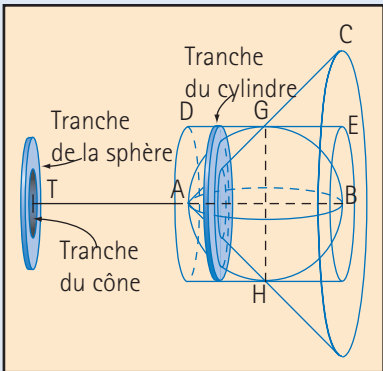
$$R^2 = 2rx - x^2.$$



Le volume de la tranche de la sphère est donc :

$$\Delta V_{\text{sphère}} = \pi x(2r - x) \Delta x.$$

Suspendons les tranches de la sphère et du cône à l'extrémité T de l'axe où $\overline{TA} = 2r$.



Le moment d'un solide par rapport à un point est le produit du volume de ce solide par sa distance du point au centre de gravité du solide, on peut trouver le moment combiné de la tranche de sphère et de la tranche de cône par rapport à A, ce qui donne :

$$\begin{aligned} & [\Delta V_{\text{sphère}} + \Delta V_{\text{cône}}] 2r \\ &= [\pi(2rx - x^2) \Delta x + \pi x^2 \Delta x] 2r \\ &= 4\pi r^2 x \Delta x \\ &= 4x \Delta V_{\text{cylindre}} \end{aligned}$$

Le moment combiné de la tranche de sphère et de la tranche de cône est donc égal au moment de la tranche cylindrique dans la position qu'elle occupe, à une distance x du point A. En additionnant les moments de toutes les tranches, on obtient que :

$$2r(V_{\text{sphère}} + V_{\text{cône}}) = 4r V_{\text{cylindre}}$$

Cependant, le volume du cylindre est le produit de l'aire de sa base, πr^2 , par sa

hauteur, $2r$, soit $V_{\text{cylindre}} = 2\pi r^3$. Selon le résultat démontré par Eudoxe, le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre de même rayon et de même hauteur, on a donc $V_{\text{cône}} = \frac{2\pi r^3}{3}$. En substituant, on a donc :

$$2r \left[V_{\text{sphère}} + \frac{2\pi r^3}{3} \right] = 4\pi r^3$$

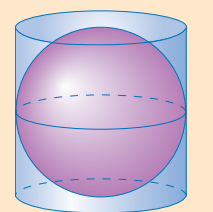
$$\text{d'où } V_{\text{sphère}} + \frac{2\pi r^3}{3} = 2\pi r^3$$

On obtient le volume de la sphère en fonction de son rayon. Archimède ne procède pas de cette façon. Les formules que nous avons utilisées sont des formules modernes. Archimède compare les volumes par sa méthode des leviers puis il démontre, par la méthode d'exhaustion, que le résultat obtenu est exact. Il établit le rapport du volume du cylindre sur le volume de la sphère et obtient :

$$\frac{V_{\text{cylindre}}}{V_{\text{sphère}}} = \frac{2\pi r^3}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3}{2}$$

Il établit le même rapport entre les surfaces du cylindre et de la sphère. Le résultat qu'il obtient s'énonce comme suit.

Lorsqu'un cylindre est circonscrit à une sphère avec un diamètre égal à celui de la sphère, le volume et la surface du cylindre sont une fois et demie le volume et la surface de la sphère.



Comparaison d'aires et de volumes

Les mathématiciens grecs n'utilisaient pas de formules comme nous le faisons. Ils comparaient l'aire des surfaces et le volume des solides pour en déterminer le rapport.

Archimède démontre ce théorème par la méthode d'exhaustion qui consiste en une double réduction à l'absurde. Ainsi, pour démontrer ce résultat, il faut montrer que l'aire du cercle ne peut être ni plus grande ni plus petite que celle du cylindre. De même, il faut démontrer que le volume du cercle ne peut être ni plus grand ni plus petit que celui du cylindre. Son idée de décomposer une surface en bandes parallèles et un volume en tranches parallèles fut reprise par Cavalieri dans sa méthode des indivisibles.