MATRICES

CHAPITRE 9

Résoudre des problèmes en utilisant les matrices et les déterminants

Les composantes particulières de l'élément de compétence visées par le présent chapitre sont:

- l'utilisation des matrices pour structurer de l'information;
- l'exécution d'opérations sur des matrices;
- l'utilisation des propriétés des opérations matricielles.

OBJECTIFS

9.1 Effectuer les opérations d'addition de matrices et de multiplication d'une matrice par un scalaire.

9.2 Effectuer la multiplication de matrices.

9.3 Interpréter selon le contexte le résultat d'opérations sur des matrices.

9.1 MATRICE

Lorsqu'on doit traiter de l'information portant sur plusieurs variables, il est parfois très efficace de représenter les valeurs des différentes variables sous forme de tableaux de nombres appelés **matrices**. Dans un tableau de ce type, une position précise est assignée à chaque valeur. Nous allons présenter les opérations sur des matrices et employer celles-ci pour traiter de l'information.

Mise en situation

Matrices01

Une petite entreprise emploie deux marchands ambulants qui vendent des jus dans les parcs de la municipalité la fin de semaine. Les tableaux suivants indiquent le nombre de bouteilles vendues en une fin de semaine.

PARC BEAUSÉJOUR

	Jus		
Jour	Orange	Raisin	Pomme
Vendredi	27	43	33
Samedi	36	68	58
Dimanche	39	55	49

PARC DE LA MAIRIE

	Jus		
Jour	Orange	Raisin	Pomme
Vendredi	38	63	43
Samedi	46	72	65
Dimanche	42	63	58

Le tableau qui suit donne le prix de vente et le coût unitaire de chaque sorte de jus.

Jus	Prix	Coût
Orange	1,00	0,40
Raisin	1,40	0,60
Pomme	1,20	0,50

REMARQUE
Toute information concernant les composantes d'une matrice sont données dans l'ordre ligne-colonne.

On structure de diverses façons l'information contenue dans les tableaux, selon le traitement désiré. Comme les en-têtes ne sont pas indispensables au traitement des données, on note simplement :

$$B = \begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 38 & 63 & 43 \\ 46 & 72 & 65 \\ 42 & 63 & 58 \end{pmatrix}$$

De tels tableaux de nombres sont appelés des **matrices**. On emploie souvent une lettre majuscule pour désigner une matrice particulière. Ainsi, la matrice qui donne les ventes au parc Beauséjour est représentée par la lettre B, et la matrice M indique les ventes au parc de la Mairie.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrice m par n

Matrice

On appelle **matrice** tout tableau rectangulaire ayant la forme illustrée ci-contre, où les a_{ij} sont les **éléments**; l'indice i indiquant la ligne de l'élément et l'indice j sa colonne. Ces indices donnent l'**adresse** de chacun des éléments. Une matrice formée de m lignes et de n colonnes est dite de **dimension** $m \times n$ (qui se lit « m par n »).

Ainsi, la matrice donnée ci-contre est une matrice de dimension 3×4 (qui se lit « 3 par 4 »), puisqu'elle est formée de trois lignes et de quatre colonnes. Dans cette matrice, l'élément a_{23} est –2 : c'est l'élément de la deuxième ligne et de la troisième colonne. On dit que l'élément a_{23} est l'élément d'*adresse* 23, qui se lit « deux trois » et non « vingt-trois ».

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de dimension 3 par 4.

Notation

On représente généralement une matrice par une lettre majuscule A, B, C, etc. Lorsqu'il est nécessaire de préciser la dimension d'une matrice, on écrit $A_{m\times n}$, qui désigne une matrice A de dimension $m\times n$. L'ensemble des matrices de dimension $m\times n$ est noté $\mathbf{M}_{m\times n}$. Ainsi, on note $\mathbf{M}_{2\times 3}$ l'ensemble de toutes les matrices de dimension 2×3. Pour des matrices dont les éléments sont inconnus, on emploie la majuscule X, Y ou Z. On peut également représenter par (a_{ij}) ou $(a_{ij})_{m\times n}$ la matrice de dimension m par n formée des éléments a_{ij}. Dans une matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

les éléments de la ligne i forment la matrice de dimension $1\times n$,

$$(a_{i1};\ a_{i2};\ \ldots;\ a_{ij};\ \ldots;\ a_{in}),$$

appelée i^{e} **vecteur ligne** de la matrice. De façon analogue, les éléments de la colonne j forment la matrice de dimension $1\times m$,

$$(a_{1j};\ a_{2j};\ \ldots;\ a_{ij};\ \ldots;\ a_{mj}),$$

appelée j^{e} **vecteur colonne** de la matrice.

REMARQUE
On ne doit pas confondre a_{ij}, qui représente un élément, avec (a_{ij}), qui représente une matrice dont les éléments sont les a_{ij}. Dans la plupart des situations présentées dans le présent ouvrage, les éléments des matrices seront des nombres réels ou des lettres représentant des nombres réels.

Égalité de matrices

Deux matrices $A_{m\times n}$ et $B_{p\times q}$ sont **égales** si et seulement si :

- les deux matrices ont la même dimension ($m = p$ et $n = q$);
- les éléments de même adresse sont égaux ($a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et pour tout j).

On emploie le signe d'égalité usuel comme symbole de l'égalité de deux matrices.

REMARQUE
Dans la définition de l'égalité de deux matrices, a_{ij} et b_{ij} désignent les éléments de même adresse des matrices A et B respectivement. La condition $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et pour tout j signifie que tous les éléments ayant la même adresse doivent être égaux pour que les matrices soient égales.

EXEMPLE 9.1.1

Déterminer les éléments a_{ij} tels que les matrices A et B suivantes sont égales

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

■ ***Solution***

Les matrices A et B sont égales *si et seulement si*

$$a_{11} = 5,\ a_{12} = -2,\ a_{21} = 3 \text{ et } a_{22} = 4.$$

REMARQUE

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Opérations sur des matrices

Matrices02

On peut effectuer directement des opérations sur des matrices pour en tirer différents éléments d'information. Dans la mise en situation, si on veut connaître, pour chaque journée et chaque sorte de jus, le total des ventes dans les deux parcs, on fait la somme des éléments de même adresse des matrices B et M.

$$B+M=\begin{pmatrix}27 & 43 & 33\\36 & 68 & 58\\39 & 55 & 49\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}38 & 63 & 43\\46 & 72 & 65\\42 & 63 & 58\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}65 & 106 & 76\\82 & 140 & 123\\81 & 118 & 107\end{pmatrix}$$

REMARQUE

La **somme** de deux matrices est définie si et seulement si elles ont la même dimension. On l'obtient en additionnant les éléments de même adresse. Deux matrices de même dimension sont dites **compatibles** pour l'addition matricielle.

Addition de matrices

Somme de matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, deux matrices de dimension $m\times n$. La **somme** de ces matrices, notée $A + B$, est une matrice de dimension $m\times n$ définie par

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

EXEMPLE 9.1.2

Effectuer la somme des matrices A et B suivantes.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\2 & -7 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\5 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Solution

Matrices03

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\2 & -7 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2 & 3\\5 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\7 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

Multiplication d'une matrice par un scalaire

On peut tirer plusieurs matrices du tableau des prix et des coûts de la mise en situation. Par exemple, on peut écrire une matrice des prix de dimension 3×1, une matrice des coûts de dimension 3×1 ou simplement une matrice des prix et des coûts de dimension 3×2.

$$P=\begin{pmatrix}1{,}00\\1{,}40\\1{,}20\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}0{,}40\\0{,}60\\0{,}50\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1{,}00 & 0{,}40\\1{,}40 & 0{,}60\\1{,}20 & 0{,}50\end{pmatrix}$$

Supposons que le propriétaire de l'entreprise envisage de majorer ses prix de 20%. Quelle serait alors la nouvelle matrice des prix? On l'obtient en multipliant simplement chaque élément de la matrice des prix par 1,2,

$$(1+0{,}20)P=1{,}2P=\begin{pmatrix}1{,}2\times 1{,}00\\1{,}2\times 1{,}40\\1{,}2\times 1{,}20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1{,}20\\1{,}68\\1{,}44\end{pmatrix}$$

L'opération qui a servi à calculer le nouvelle matrice des prix tenant compte de l'augmentation et qui consiste à multiplier chaque élément d'une matrice par un scalaire (ou nombre) s'appelle **multiplication par un scalaire**. Elle est définie comme suit.

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})$, une matrice $m \times n$ et k, un scalaire (ou nombre). La **multiplication** de la matrice A par le scalaire k donne une matrice, notée kA, définie par l'égalité

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij}).$$

Cette équation signifie que chaque élément de la matrice A est multiplié par le scalaire k.

REMARQUE
Dans la plupart des cas étudiés dans le présent ouvrage, les scalaires sont des nombres réels.

EXEMPLE 9.1.3

Calculer $3A$ et kA, sachant que

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

■ ***Solution***

$$3A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 \\ 12 & -6 & 15 \end{pmatrix} \text{ et } kA = \begin{pmatrix} -2k & 3k & k \\ 4k & -2k & 5k \end{pmatrix}.$$

En multipliant la matrice A par le scalaire -1, on obtient une matrice notée $-A$. Il suffit en fait d'inverser le signe de chacun des éléments de la matrice A. Ainsi, en multipliant par le scalaire -1 la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \text{ on obtient la matrice } -A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

L'addition de ces deux matrices donne

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 5 & -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat est une matrice dont tous les éléments sont nuls. On l'appelle **matrice nulle**.

REMARQUE
La matrice nulle de dimension $m \times n$ est l'élément neutre pour l'addition de matrices de dimension $m \times n$. Cela signifie qu'en additionnant une matrice $A_{m \times n}$ et la matrice $0_{m \times n}$ on obtient la matrice $A_{m \times n}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrice nulle

La **matrice nulle** de dimension $m \times n$ est la matrice, notée $0_{m \times n}$, dont tous les éléments sont nuls.

Propriétés des opérations

Les propriétés des opérations d'addition de matrices et de multiplication d'une matrice par un scalaire sont présentées ci-dessous. Il est à noter que les propriétés de l'addition de matrices sont analogues à celles de l'addition de nombres réels.

PROPRIÉTÉS

Opérations d'addition et de multiplication par un scalaire

Pour tout A, B et $C \in \mathbf{M}_{m\times n}$ et pour tout p et $q \in \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Fermeture de l'addition :
$$A + B \in \mathbf{M}_{m\times n}.$$
2. Commutativité de l'addition :
$$A + B = B + A.$$
3. Associativité de l'addition des matrices
$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$
4. Existence d'un élément neutre pour l'addition :
Il existe, dans $\mathbf{M}_{m\times n}$, une matrice nulle, notée 0, telle que :
$$A + 0 = 0 + A = A.$$
5. Existence d'un élément opposé pour l'addition:
Pour toute matrice $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$, il existe, dans $\mathbf{M}_{m\times n}$, une matrice opposée, notée $-A$, telle que :
$$A + (-A) = (-A) + A = 0.$$
6. Fermeture de la multiplication par un scalaire sur l'ensemble des matrices :
$$pA \in \mathbf{M}_{m\times n}.$$
7. Distributivité de la multiplication d'une matrice par un scalaire par rapport à l'addition de scalaires :
$$(p + q)A = pA + qA.$$
8. Distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition de matrices :
$$p(A + B) = pA + pB.$$
9. Associativité de la multiplication d'une matrice avec le produit de scalaires :
$$(pq)A = p(qA).$$
10. Existence d'un élément neutre pour la multiplication d'une matrice par un scalaire :
$$1A = A.$$

REMARQUE
Une **structure algébrique** est un ensemble muni d'opérations qui satisfont à certaines conditions. La qualité d'une structure dépend des propriétés des opérations définies sur les éléments de l'ensemble. Ainsi, un ensemble muni d'une opération d'addition pour laquelle les cinq premières propriétés de la liste ci-contre sont satisfaites a une **structure de groupe abélien**.

ProduitMatrice03

Transposition d'une matrice

Matrice transposée

Soit A, une matrice de dimension $m\times n$. On appelle **matrice transposée** de A, notée A^t, la matrice de dimension $n\times m$ dont la i^e ligne est la i^e colonne de A pour $i = 1, 2, ..., m$. Ainsi, la matrice transposée de la matrice $A = (a_{ij})_{m\times n}$ est la matrice définie par
$$A^t = (b_{ij})_{n\times m} \text{ où } b_{ij} = a_{ji}.$$

REMARQUE
Il est à noter que si $A = (a_{ij})_{m\times n}$, la transposée de A est $A^t = (a_{ji})_{n\times m}$ où j désigne une colonne de A et i une ligne de A. On peut décrire l'effet de la transposition sur les éléments de A de la façon suivante :
$$[(a_{ij})_{m\times n}]^t = (a_{ji})_{n\times m}$$
Il est facile de se convaincre que
$$[A^t]^t = A.$$

Autrement dit, l'élément de la ligne i et de la colonne j de la matrice A est l'élément de la ligne j et de la colonne i de la matrice transposée. De plus, si la matrice A est de dimension $m \times n$, la dimension de la matrice transposée est $n \times m$. Les matrices suivantes sont la transposée l'une de l'autre :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices particulières

Il existe plusieurs matrices particulières auxquelles on donne un nom descriptif.

Matrice carrée et diagonales principale et secondaire

Une **matrice carrée d'ordre n** est une matrice formée de n lignes et n colonnes. Dans une matrice carrée, les éléments $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ constituent la **diagonale principale**. L'autre diagonale est appelée **diagonale secondaire**.

Diagonale principale

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \\ -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonale secondaire

Matrice triangulaire

Une matrice carrée est dite **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$, pour tout $i > j$, c'est-à-dire que tous les éléments situés sous la diagonale principale sont nuls.

Une matrice carrée est dite **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$, pour tout $i < j$, c'est-à-dire que tous les éléments situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure

Les matrices A et B ci-dessous sont respectivement triangulaire supérieure, et triangulaire inférieure.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matrice symétrique et matrice antisymétrique

Une matrice carrée est dite **symétrique** si :

$$A^t = A.$$

Une matrice carrée est dite **antisymétrique** si :

$$A^t = -A.$$

REMARQUE

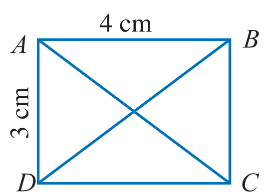
Sur une carte routière, dans la matrice des distances entre deux villes, on omet généralement soit la partie supérieure, ou la partie inférieure, car ce type de matrice est symétrique.

La diagonale principale d'une matrice antisymétrique ne comporte que des zéros.

Les matrices C et D ci-dessous sont respectivement symétrique et antisymétrique.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -5 \\ 6 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices ont de nombreuses applications, voici un exemple.



REMARQUE

La matrice donnée ci-contre correspond au tableau suivant, les en-têtes de lignes et de colonnes représentant les sommets du rectangle.

	A	*B*	*C*	*D*
A	0	4	5	3
B	4	0	3	5
C	5	3	0	4
D	3	5	4	0

EXEMPLE 9.1.4

Soit un rectangle dont les côtés mesurent respectivement 3 cm et 4 cm. Construire une matrice M dont l'élément a_{ij} représente la distance géométrique entre les sommets i et j du rectangle.

Solution

Puisque la figure a quatre sommets, la matrice est de dimension 4×4. La distance du sommet A au sommet C est donnée par le théorème de Pythagore; elle est de 5 cm.

La matrice recherchée est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice symétrique, comme on s'y attend dans le cas d'une matrice donnant les distances entre différents points.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrice scalaire

Matrice diagonale et matrice scalaire

Une matrice carrée est une **matrice diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$, c'est-à-dire si tous les éléments situés hors de la diagonale principale sont nuls.

Si tous les éléments non nuls d'une matrice diagonale sont égaux, elle est dite **scalaire**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice identité

Matrice identité

Une **matrice identité d'ordre** n, notée I_n, est une matrice scalaire où tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

9.2 EXERCICES

1. Effectuer, si possible, les opérations suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

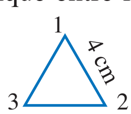
b) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

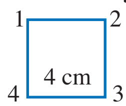
c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

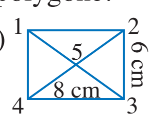
d) $-5\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & -3 \\ 7 & 12 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

e) $3\begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 \\ 3 & -8 & 10 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

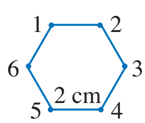
2. Pour chacune des figures suivantes, construire une matrice M où l'élément a_{ij} est la distance géométrique entre les sommets i et j du polygone.

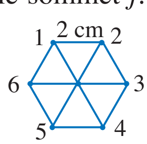
a) 

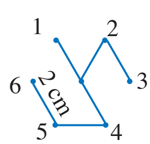
b) 

c) 

3. Les figures suivantes comportent 6 sommets, numérotés de 1 à 6. Construire une matrice M où l'élément a_{ij} est la longueur du plus court chemin entre le sommet i le sommet j.

a) 

b) 

c) 

4. Le tableau suivant présente les échelles de salaire des employés d'une entreprise selon le diplôme et le nombre d'années de service.

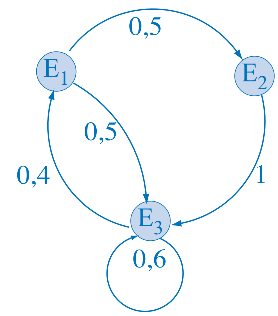
Diplôme	Nombre d'années de service			
	0 à 5	5 à 10	10 à 15	Plus de 15
Sans DES	15 500	16 800	18 200	19 300
DES	18 300	19 700	22 600	24 500
DEC	24 000	26 500	29 400	31 200
Universitaire	35 000	39 500	43 200	46 800

a) Représenter les échelles salariales par une matrice.

b) Des négociations sont en cours pour le renouvellement de la convention collective et le syndicat demande des augmentations de salaire de 4,5 % la première année, de 4 % la deuxième année et de 3,5 % la troisième année. Déterminer la matrice des échelles salariales de la troisième année de la convention dans le cas où les demandes du syndicat seraient acceptées.

c) La partie patronale propose plutôt des augmentations forfaitaires intégrées aux échelles salariales; elle offre 850 $ la première année, 700 $ la deuxième année et 600 $ la troisième année. Déterminer la matrice des échelles salariales pour la troisième année de la convention dans le cas où cette offre serait acceptée.

5. Un système peut être dans trois états différents, soit E_1, E_2 et E_3. Il peut changer d'état lorsqu'il est soumis à une excitation suffisante. Le graphe suivant donne les probabilités de transition d'un état vers un autre. Déterminer la matrice M où l'élément a_{ij} est la probabilité de passer de l'état i à l'état j.



6. Vous êtes responsable de la gestion des stocks dans une entreprise de production de vaisselle en plastique de différents formats. Le nombre de caisses en entrepôt est donné dans le tableau suivant.

Article	Format		
	petit	moyen	grand
Verre	8	5	12
Assiette	10	4	8
Tasse	2	3	1
Bol	1	4	5

Le département de production vous achemine la vaisselle fabriquée au cours de la journée; les quantités sont données dans la matrice R (réception). De plus, au cours de la journée, vous avez expédié plusieurs caisses et ces envois sont consignés dans la matrice E (expédition).

$$R = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Calculer les quantités en entrepôt à la fin de la journée.

b) La matrice C suivante représente les commandes que vous devriez expédier le lendemain. Indiquer quels articles il est urgent de produire pour répondre à la demande.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

   Déterminer lesquelles des opérations suivantes sont définies et les effectuer

   a) $2A^t$ c) $3C^t$
   b) $3B^t$ d) $(A + B)^t$

8. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer $A + A^t$.
   b) Qu'est-ce qui caractérise $A + A^t$ dans le cas où A est une matrice carrée ?

9. Quatre fioles contiennent chacune 20 mL d'un mélange de trois substances. La composition (en millilitres) du contenu de chaque fiole est donnée dans le tableau suivant.

	S_1	S_2	S_3
F_1	4	10	6
F_2	2	8	10
F_3	6	12	2
F_4	10	2	8

   a) On ajoute dans chaque fiole les quantités de S_1 et S_3 indiquées dans le tableau suivant. Déterminer la matrice T des nouvelles quantités des substances dans chacune des fioles.

	F_1	F_2	F_3	F_4
S_1	2	1	3	2
S_3	4	2	6	2

   b) Après l'ajout, les fioles contiennent-elles toutes le même volume de mélange?
   c) Après avoir effectué l'opération décrite en a), on retire 20% du volume de chacune des fioles après les avoir agitées afin que le mélange soit homogène. Déterminer la matrice R des nouvelles quantités des substances dans chacune des fioles.

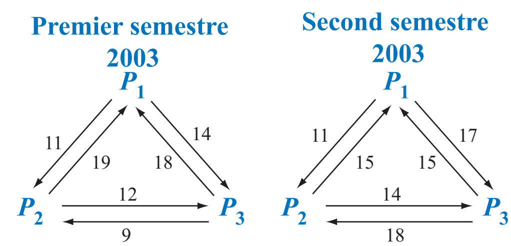
10. Un propriétaire de station service a deux garages et en plus de l'essence et des réparations, il vend des essuie-glace, du lave glace et des tapis d'auto. Les tableaux suivants donnent les ventes effectuées pour les mois de janvier et de février.

Ventes de janvier		
	Lévis	**Lauzon**
Essuie-glace	25	18
Lave-glace	32	25
Tapis d'auto	12	8

Ventes de février		
	Lévis	**Lauzon**
Essuie-glace	28	25
Lave-glace	27	29
Tapis d'auto	7	4

   a) Utiliser les opérations sur les matrices pour déterminer les ventes totales pour ces deux mois.
   b) Utiliser les opérations sur les matrices pour déterminer la variation des ventes entre ces deux mois.

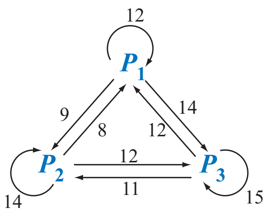
11. Les diagrammes suivants décrivent les échanges, en milliards de \$, entre trois pays P_1, P_2 et P_3 qui sont les principaux partenaires commerciaux les uns des autres.



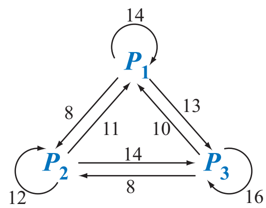
   a) Pour chacun des semestres, construire la matrice des exportations de ces pays.
   b) Par une opération matricielle, déterminer la matrice des échanges annuels pour 2003.
   c) Par une opération matricielle, déterminer la variation des échanges entre les deux semestres.
   d) Construire la matrice donnant la variation des échanges en pourcentage. Quelle est la signification des éléments a_{31}, a_{12}, et a_{32}?
   e) Construire la matrice B dont l'élément b_{ij} représente la balance commerciale annuelle du i^e pays à l'endroit du j^e pays.
   f) Quelle interprétation doit-on faire du signe des éléments dans la matrice B ?
   g) Pour l'année 2004, on prévoit un accroissement des échanges commerciaux de 10%. Si cette prévision se réalise, quelle sera la matrice des échanges pour 2004?

12. Les diagrammes suivants décrivent le nombre de milliers de personnes ayant fait un voyage d'affaires d'au moins une journée, à l'intérieur du pays ou dans un pays voisin, au cours du premier semestre et du second semestre de 2004.

Premier semestre 2004



Second semestre 2004

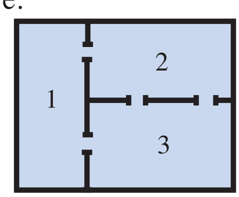


a) Pour chacun des semestres, construire la matrice des voyages d'affaires entre les pays selon la provenance i et la destination j.

b) Par une opération matricielle, déterminer la matrice du nombre de voyages d'affaires pour 2004 selon la provenance i et la destination j.

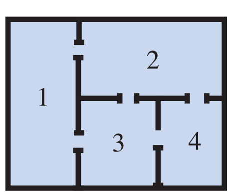
c) Par une opération matricielle, déterminer la variation du nombre de voyages d'affaires pour 2004 selon la provenance i et la destination j.

13. On place une souris dans le labyrinthe illustré ci-dessous. Chaque fois qu'elle entend une sonnerie, effarouchée, elle change de compartiment en choisissant au hasard une des portes du compartiment où elle se trouve.



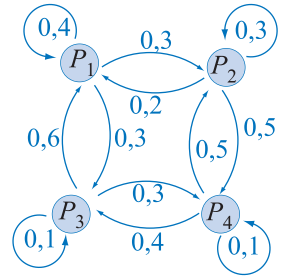
a) Construire la matrice dont les éléments représentent la probabilité que la souris passe du compartiment i au compartiment j en entendant le son de la cloche.

b) On modifie le labyrinthe en ajoutant un compartiment.



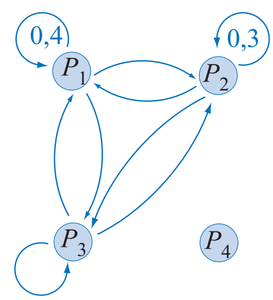
Construire la matrice dont les éléments représentent la probabilité que la souris passe du compartiment i au compartiment j dans ce labyrinthe modifié.

14. On a effectué une étude de marché portant sur quatre produits concurrents, notés P_1, P_2, P_3 et P_4. L'étude a permis de déterminer, pour chacun des produits, la probabilité, notée a_{ij}, qu'un consommateur utilisant le produit P_i opte pour le produit P_j au prochain achat.



a) Construire une matrice véhiculant la même information que le diagramme.

b) Étant donné le peu de satisfaction des consommateurs, la compagnie qui produit P_4 a décidé d'en cesser la production. On estime que les consommateurs actuels de P_4 et les consommateurs de P_2 qui envisageaient de changer pour P_4 se répartiront également entre les deux autres produits P_1 et P_3 et que les consommateurs de P_3 qui envisageaient de changer se répartiront également entre les trois produits restants. Compléter le diagramme en supposant que cette hypothèse se réalise.



c) Construire une matrice véhiculant la même information que le diagramme.

d) Comment s'assurer que la matrice obtenue en c) représente bien les probabilités de changement envisagés par les consommateurs?

9.3 PRODUIT DE MATRICES

Mise en situation

Revenons à la petite entreprise qui emploie deux marchands ambulants pour vendre du jus dans les parcs de la municipalité la fin de semaine. Les tableaux suivants indiquent le nombre de bouteilles vendues en fin de semaine.

ProduitMatrice01

PARC BEAUSÉJOUR

Jour	Jus Orange	Raisin	Pomme
Vendredi	27	43	33
Samedi	36	68	58
Dimanche	39	55	49

PARC DE LA MAIRIE

Jour	Jus Orange	Raisin	Pomme
Vendredi	38	63	43
Samedi	46	72	65
Dimanche	42	63	58

Le prix de vente et le coût unitaire des jus (en dollars) sont les suivants.

Jus	Prix	Coût
Orange	1,00	0,40
Raisin	1,40	0,60
Pomme	1,20	0,50

REMARQUE
Il est à noter que la matrice B comprend une ligne pour chaque jour de fin de semaine et qu'il en est de même de la matrice produite $B \bullet P$.

Le propriétaire de l'entreprise veut calculer les revenus quotidiens au parc Beauséjour durant une fin de semaine. Pour ce faire, il doit additionner les produits du nombre de jus de chaque sorte par le prix de vente correspondant. En notant P la matrice 3×1 des prix de vente, il obtient

$$B \bullet P = \begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}40 \\ 1{,}20 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 126{,}80 \\ 200{,}80 \\ 174{,}80 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Vendredi} \\ \text{Samedi} \\ \text{Dimanche} \end{array}$$

REMARQUE
Si, pour résoudre un problème concret, on se demande quelle opération il faut effectuer, on doit examiner la dimension des matrices. Dans la mise en situation, on multiplie une matrice 3×3 et une matrice 3×2; il est à noter que le 3 indiquant le nombre de colonnes correspond aux trois sortes de jus, tout comme le 3 dans les dimensions de la matrice 3×2.

Il est à noter qu'il s'agit du produit d'une matrice 3×3 et d'une matrice 3×1, et que le résultat est une matrice 3×1. Si on effectue la même opération en remplaçant la matrice des prix par celle des prix et des coûts unitaires, on obtient simultanément les revenus et les coûts quotidiens.

$$B \bullet A = \underbrace{\begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}40 \\ 1{,}40 & 0{,}60 \\ 1{,}20 & 0{,}50 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \begin{array}{cc} \text{Revenus} & \text{Coûts} \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 126{,}80 & 53{,}10 \\ 200{,}80 & 84{,}20 \\ 174{,}80 & 73{,}10 \end{pmatrix}}_{3\times 2} \begin{array}{l} \text{Vendredi} \\ \text{Samedi} \\ \text{Dimanche} \end{array}$$

Compatibilité

Dimension du produit

Multiplication de deux matrices

Soit $A = (a_{ik})_{m\times p}$ et $B = (b_{kj})_{p\times n}$, deux matrices. Le **produit** de ces matrices, noté $A \bullet B$ (ou simplement AB), est une matrice $C = (c_{ij})_{m\times n}$ dont les éléments c_{ij} sont définis par

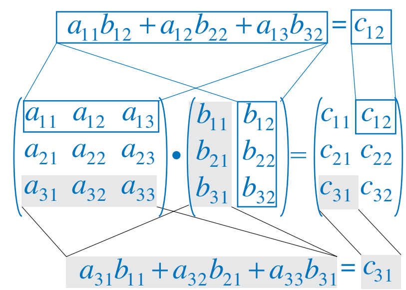
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} \text{ pour tout } i \text{ et pour tout } j.$$

La dernière égalité signifie que l'élément c_{ij} résulte de la somme du produit des éléments de la i^e ligne de la matrice A et de ceux de la j^e colonne de la matrice B. Ainsi, l'élément de la première ligne et de la deuxième colonne, soit c_{12}, s'obtient en effectuant la somme des produits des éléments de la première ligne de la matrice à gauche du symbole d'opération par ceux de la deuxième colonne de la matrice à droite du symbole d'opération. De même, l'élément c_{31} résulte des produits des éléments de la troisième ligne de la matrice à gauche du symbole d'opération par les éléments de la première colonne de la matrice à droite du symbole d'opération.

REMARQUE

La multiplication de deux matrices est définie seulement si le nombre de colonnes de la matrice à gauche du symbole d'opération est égal au nombre de lignes de la matrice à droite du symbole d'opération.

$$A_{m\times p} \bullet B_{p\times n} = C_{m\times n}$$



Multiplication de matrices

EXEMPLE 9.3.1

Effectuer l'opération matricielle indiquée sur les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

ProduitMatrice02

a) $A \bullet B$ b) $B \bullet$ A c) $A^t \bullet B^t$ d) $B^t \bullet$ A^t

Solution

a) Les matrices sont compatibles et le produit est

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3} \bullet \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

b) Les matrices sont compatibles et le produit est

$$B \bullet A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 13 & -10 & 51 \\ -1 & -2 & 57 \\ -1 & 0 & 13 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

c) Les matrices sont compatibles et le produit est

$$A^t \bullet B^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} \bullet \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 13 & -1 & -1 \\ -10 & -2 & 0 \\ 51 & 57 & 13 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

c) Les matrices sont compatibles et le produit est

$$B^t \bullet A^t = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Propriétés des opérations matricielles

En examinant les résultats des opérations du dernier exemple, on constate que

$$A \bullet B \neq B \bullet A$$

La multiplication des matrices n'est donc pas une opération commutative. On constate également que

$$(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t$$

et : $$(B \bullet A)^t = A^t \bullet B^t.$$

Cet exemple illustre les propriétés de la multiplication des matrices que nous énonçons sans les démontrer.

REMARQUE

La matrice identité d'ordre n est l'élément neutre de la multiplication des matrices du même ordre. Cela signifie que lorsqu'on multiplie une matrice $A_{n\times n}$ par la matrice identité $I_{n\times n}$, le résultat est la matrice $A_{n\times n}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Elle est également neutre pour la multiplication à droite et la multiplication à gauche avec des matrices compatibles.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

PROPRIÉTÉS

Propriétés de la multiplication de matrices

Pour toutes matrices A, B et C de dimensions appropriées et pour tout scalaire p et q, la multiplication de matrices possède les propriétés suivantes.

1. Distributivité à gauche sur l'addition matricielle :
$$A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C).$$
2. Distributivité à droite sur l'addition matricielle :
$$(A + B) \bullet C = (A \bullet C) + (B \bullet C).$$
3. Associativité de la multiplication de matrices :
$$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C.$$
4. Existence d'un élément neutre pour la multiplication de matrices :
$$A_{m\times n} \bullet I_n = A_{m\times n}$$
$$I_n \bullet B_{n\times m} = B_{n\times m}.$$
5. Associativité pour la multiplication par un scalaire :
$$pA \bullet qB = pq(A \bullet B).$$

PROPRIÉTÉS

Propriétés de la transposition des matrices

Pour toutes matrices A et B de dimensions appropriées et pour tout scalaire k, la transposition possède les propriétés suivantes.

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t$
4. $(kA)^t = kA^t$

Application de la transposée

Revenons à la mise en situation (marchands ambulants). En multipliant les matrices transposées A^t et B^t dans cet ordre, on obtient

$$A^{t} \bullet B^{t} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix}1{,}00 & 1{,}40 & 1{,}20\\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}50\end{pmatrix}} \bullet \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix}27 & 36 & 39\\ 43 & 68 & 55\\ 33 & 58 & 49\end{pmatrix}} = \begin{array}{cl} \begin{matrix}\text{Vendredi} & \text{Samedi} & \text{Dimanche}\end{matrix} & \\ \underbrace{\begin{pmatrix}126{,}80 & 200{,}80 & 174{,}80\\ 53{,}10 & 84{,}20 & 73{,}10\end{pmatrix}}_{2\times 3} & \begin{matrix}\text{Revenus}\\ \text{Coûts}\end{matrix}\end{array}$$

Compatibilité

Dimension du produit

Le produit est une matrice 2×3 qui donne les revenus et les coûts pour chacun des jours de fin de semaine. Elle est effectivement égale à la transposée de la matrice donnant la même information sur deux colonnes, calculée plus haut. :

ProduitMatrice04

REMARQUE
La poursuite de la mise en situation montre bien qu'il est possible d'utiliser plus d'une opération matricielle pour répondre à une question.

$$B \bullet A = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix}27 & 43 & 33\\ 36 & 68 & 58\\ 39 & 55 & 49\end{pmatrix}} \bullet \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix}1{,}00 & 0{,}40\\ 1{,}40 & 0{,}60\\ 1{,}20 & 0{,}50\end{pmatrix}} = \begin{array}{cl} \begin{matrix}\text{Revenus} & \text{Coûts}\end{matrix} & \\ \underbrace{\begin{pmatrix}126{,}80 & 53{,}10\\ 200{,}80 & 84{,}20\\ 174{,}80 & 73{,}10\end{pmatrix}}_{3\times 2} & \begin{matrix}\text{Vendredi}\\ \text{Samedi}\\ \text{Dimanche}\end{matrix}\end{array}$$

Compatibilité

Dimension du produit

Si le propriétaire de l'entreprise souhaite déterminer la quantité de chaque sorte de jus vendus au parc Beauséjour durant la fin de semaine, il doit effectuer une multiplication de matrices ayant pour effet d'additionner les éléments de chaque colonne de la matrice B. C'est-à-dire qu'il doit effectuer la multiplication suivante :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \bullet B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}27 & 43 & 33\\ 36 & 68 & 58\\ 39 & 55 & 49\end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix}\text{Orange} & \text{Raisin} & \text{Pomme}\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}102 & 166 & 140\end{pmatrix}\end{array}$$

Si le propriétaire veut déterminer la quantité totale de jus vendue au parc Beauséjour chaque jour de fin de semaine, il doit additionner les éléments de chaque ligne de la matrice B. C'est-à-dire qu'il doit effectuer la multiplication suivante :

$$B \bullet \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27 & 43 & 33\\ 36 & 68 & 58\\ 39 & 55 & 49\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{array}{cl}\begin{pmatrix}103\\ 162\\ 143\end{pmatrix} & \begin{matrix}\text{Vendredi}\\ \text{Samedi}\\ \text{Dimanche}\end{matrix}\end{array}$$

REMARQUE
Ne pas oublier que pour établir l'opération à effectuer, il faut tenir compte des dimensions des matrices et des unités associées à ces dimensions.

Le propriétaire peut aussi calculer le profit réalisé chaque jour à l'aide d'une opération matricielle. Puisque le profit est égal aux revenus moins les coûts, il doit effectuer la multiplication suivante.

$$\begin{pmatrix}126{,}80 & 53{,}10\\ 200{,}80 & 84{,}20\\ 174{,}80 & 73{,}10\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{array}{cl}\begin{pmatrix}73{,}70\\ 116{,}60\\ 101{,}70\end{pmatrix} & \begin{matrix}\text{Vendredi}\\ \text{Samedi}\\ \text{Dimanche}\end{matrix}\end{array}$$

EXEMPLE 9.3.2

Vous avez besoin de matériaux pour isoler votre sous-sol, soit 18 montants, 8 panneaux de placoplâtre et 2 sacs de laine isolante. Vous téléphonez à quatre quincailliers locaux pour savoir lequel offre les meilleurs prix. À votre grande surprise, ceux-ci varient beaucoup d'une quincaillerie à l'autre. Vous regroupez les informations que vous avez obtenues dans un tableau semblable au suivant.

Matériau	Quincaillerie			
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
Montant	1,10 $	0,99 $	0,94 $	0,82 $
Panneau de placoplâtre	5,95 $	5,70 $	5,99 $	6,25 $
Sac d'isolant	27,95 $	28,09 $	27,95 $	27,99$

Déterminer le coût total des matériaux requis pour chacune des quincailleries et indiquer laquelle offre le meilleur prix s'il faut acheter tous les matériaux au même endroit.

Solution

1. Structurer les données

Les informations sur les prix des matériaux selon les quincailleries sont déjà structurées. L'information sur les quantités de matériaux est donnée sous forme structurée dans le tableau suivant.

Matériau	Quantités requises
Montant	18
Panneau de placoplâtre	8
Sac d'isolant	2

2. Associer une matrice à chacun des tableaux

$$A = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1{,}10 & 0{,}99 & 0{,}94 & 0{,}82 \\ 5{,}95 & 5{,}70 & 5{,}99 & 6{,}25 \\ 27{,}95 & 28{,}09 & 27{,}95 & 27{,}99 \end{pmatrix}$$

3. Établir les opérations à effectuer

On peut déterminer le coût total des matériaux pour chaque quincaillerie en calculant le produit matriciel $A^t \bullet B$, c'est-à-dire le produit de la transposée de la matrice des quantités par la matrice des coûts.

4. Effectuer l'opération

$$A^t \bullet B = (18 \quad 8 \quad 2) \bullet \begin{pmatrix} 1{,}10 & 0{,}99 & 0{,}94 & 0{,}82 \\ 5{,}95 & 5{,}70 & 5{,}99 & 6{,}25 \\ 27{,}95 & 28{,}09 & 27{,}95 & 27{,}99 \end{pmatrix}$$

$$= (123{,}30 \quad 119{,}60 \quad 120{,}74 \quad 120{,}74)$$

5. Répondre à la question

Puisqu'il faut acheter tous les matériaux au même endroit, c'est à la deuxième quincaillerie qu'on peut se les procurer au coût le plus bas.

Compatibilité selon le contexte

Dans les applications, les matrices peuvent être compatibles pour le produit, mais celui-ci peut ne pas être compatible avec le contexte de l'application. Dans notre mise en situation, nous avons considéré les produits de matrices $B \bullet A$ et $A^t \bullet B^t$. Dans ces deux cas, les dimensions étaient compatibles. On ne peut effectuer le produit $B \bullet A^t$ puisque les dimensions des matrices ne sont pas compatibles.

$$B \bullet A^t = \begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix}_{3\times 3} \bullet \begin{pmatrix} 1{,}00 & 1{,}40 & 1{,}20 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}50 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Incompatibilité

Dans le produit $A^t \bullet B$, les dimensions des matrices sont compatibles.

$$A^t \bullet B = \begin{pmatrix} 1{,}00 & 1{,}40 & 1{,}20 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}50 \end{pmatrix}_{2\times 3} \bullet \begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 124{,}2 & 204{,}2 & 173 \\ 51{,}9 & 85{,}5 & 72{,}5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Compatibilité

Quel sens peut-on donner au résultat de ce produit selon le contexte ? Pour y voir clair, regardons les unités représentées par les éléments de ces matrices, c'est-à-dire les unités intérieures des matrices. Que multiplie-t-on en calculant, par exemple, l'élément c_{11} du produit ?

Prix de vente des jus

$$c_{11} = \overset{\text{Orange}}{1{,}00} \times \underset{\text{Vendredi}}{27} + \overset{\text{Raisin}}{1{,}40} \times \underset{\text{Samedi}}{36} + \overset{\text{Pomme}}{1{,}20} \times \underset{\text{Dimanche}}{39}$$

Nombre de jus d'oranges vendus

Il est impossible de donner un sens au fait de multiplier le prix de vente des jus de raisin par le nombre de jus d'orange vendus le samedi. Il n'y a pas compatibilité entre les unités des éléments des matrices. Si on fait la même analyse pour l'élément d_{11} du produit $B \bullet A$, voici ce que l'on obtient :

Jus vendus le vendredi

$$d_{11} = \underbrace{\overset{\text{Orange}}{27} \times \underset{\text{Orange}}{1{,}00} + \overset{\text{Raisin}}{43} \times \underset{\text{Raisin}}{1{,}40} \quad \overset{\text{Pomme}}{33} \times \underset{\text{Pomme}}{1{,}20}}\Big\} \text{Revenu du vendredi}$$

Prix des jus

On constate que, dans chacun des produits, les unités des facteurs sont compatibles. Chacun des termes est obtenu en effectuant un produit de la forme

$$\text{Nombre de jus} \times \frac{\text{prix}}{\text{jus}}.$$

Si on fait la même analyse pour l'élément de la première ligne et de la première colonne du produit $A^t \bullet B^t$, on constate à nouveau la compatibilité des unités, les facteurs des produits sont simplement permutés par rapport au symbole de multiplication.

Prix des jus

$$e_{11} = \overset{\text{Orange}}{1{,}00} \times \underset{\text{Orange}}{27} + \overset{\text{Raisin}}{1{,}40} \times \underset{\text{Raisin}}{43} + \overset{\text{Pomme}}{1{,}20} \times \underset{\text{Pomme}}{33} \Big\} \text{ Revenu du vendredi}$$

Jus vendus le vendredi

On peut également faire une analyse des dimensions extérieures des matrices. Considérons, par exemple, le produit $A^t \bullet B^t$, on constate que le nombre de colonnes de la matrice à gauche du symbole d'opération représente les sortes de jus tout comme le nombre de lignes de la matrice à droite du symbole d'opération. On a donc compatibilité pour les unités.

$$A^t \bullet B^t = \begin{pmatrix} 1{,}00 & 1{,}40 & 1{,}20 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}50 \end{pmatrix}_{2\times 3} \bullet \begin{pmatrix} 27 & 36 & 39 \\ 43 & 68 & 55 \\ 33 & 58 & 49 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 126{,}80 & 200{,}80 & 174{,}80 \\ 53{,}10 & 84{,}20 & 73{,}10 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Prix / Coûts — sortes de jus; sortes de jus — jours; Revenu / Dépenses — jours

Compatibilité

Cependant, si on considère les unités des dimensions dans le produit $A^t \bullet B$, on constate que les unités ne sont pas compatibles selon le contexte, c'est-à-dire si on tient compte des unités de ces dimensions.

$$A^t \bullet B = \begin{pmatrix} 1{,}00 & 1{,}40 & 1{,}20 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}50 \end{pmatrix}_{2\times 3} \bullet \begin{pmatrix} 27 & 43 & 33 \\ 36 & 68 & 58 \\ 39 & 55 & 49 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 124{,}2 & 204{,}2 & 173{,}0 \\ 51{,}9 & 85{,}5 & 72{,}5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Prix / Coûts — sortes de jus; jours — sortes de jus

Par conséquent, dans les applications, même si deux matrices sont compatibles pour le produit, le résultat de ce produit peut n'avoir aucun sens par rapport au contexte du problème. Il faut s'assurer de la pertinence d'un produit avant de l'effectuer en pensant résoudre le problème posé.

Matrices carrées

Deux matrices carrées de même ordre sont toujours compatibles pour la multiplication matricielle et le produit est toujours une matrice du même ordre que les matrices multipliées.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \bullet \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -35 & 39 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Les matrices carrées sont intéressantes à plusieurs égards. En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même. On emploie un exposant pour désigner un tel produit. Par exemple, si A est une matrice carrée, on écrit

$$A^2 = A \bullet A \quad \text{et} \quad A^3 = A \bullet A \bullet A.$$

En général, $A^n = \underbrace{A \bullet A \bullet \ldots \bullet A}_{n \text{ facteurs}}$.

EXEMPLE 9.3.3

Calculer A^2, B^2 et C^3 où $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = C^2 \bullet C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

REMARQUE

La matrice B de l'exemple 9.3.3 est idempotente, et la matrice C est nilpotente. L'indice de nilpotence de C est 3. Il est à noter que, pour tout $n \geq 3$, on a $C^n = 0$. Le nombre 3 est le plus petit entier pour lequel $C^n = 0$.

Matrice idempotente

Une matrice carrée A est dite **idempotente** si et seulement si

$$A^2 = A.$$

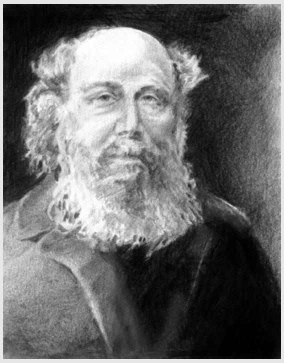
Matrice nilpotente

Une matrice carrée A est dite **nilpotente** s'il existe un entier positif n tel que $A^n = 0$. Le plus petit entier positif n tel que $A^n = 0$ est appelé **indice de nilpotence** de la matrice.

Un peu d'histoire

JAMES JOSEPH SYLVESTER

1814-1897



James Joseph Sylvester naquit en 1814. Il fut admis au St. John's College, à Cambridge, en 1833. Malgré de brillantes études, il n'obtint pas de diplôme car, à l'époque, il fallait prêter allégeance à l'Église d'Angleterre pour recevoir un diplôme et Sylvester, qui était juif, refusa.

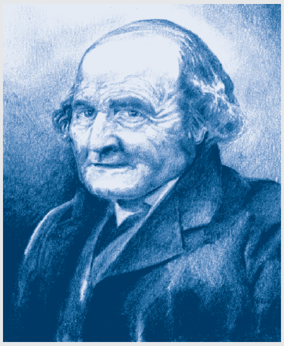
À partir de 1838, il enseigna la physique trois ans au University College de Londres, un des seuls établissements qui n'exerçait pas de discrimination religieuse. En 1841, il accepta un poste à l'Université de Virginie, mais l'abandonna au bout de trois mois à cause de conflits avec des élèves. De retour en Angleterre, il ne parvint pas à trouver un emploi à la mesure de son talent et il pratiqua le droit et l'actuariat tout en donnant des cours privés de mathématiques. Durant cette période, il fit la connaissance d'Arthur Cayley qui exerçait lui aussi le droit. Quoique de tempéraments différents, ils devinrent amis et échangèrent sur des problèmes mathématiques.

Toujours attiré par la carrière de professeur de mathématiques, Sylvester réussit à obtenir un poste au Royal Military Academy de Woolwich en 1854. Il y demeura jusqu'en 1869, l'âge de la retraite étant de 55 ans dans cet établissement. En 1877, il accepta la chaire de mathématiques du John Hopkins University et, en 1878, il fonda l'*American Journal of Mathematics*, soit le premier périodique mathématique aux États-Unis. En 1884, alors âgé de 70 ans, il retourna en Angleterre et occupa la chaire de géométrie d'Oxford. Il se retira en 1892; il souffrait de pertes de mémoire et était presque aveugle. Sylvester réalisa d'importants travaux sur la théorie des matrices après avoir été sensibilisé à ce sujet lors de ses échanges avec Cayley. En particulier, il utilisa la théorie des matrices pour étudier les géométries de dimension supérieure.

Un peu d'histoire

ARTHUR CAYLEY

1821-1895



Arthur Cayley, un mathématicien anglais, débuta ses études au Trinity College de Cambridge en 1838 où il obtint un diplôme en 1842. Il enseigna d'abord à Cambridge mais, pour subvenir à ses besoins, il s'initia au droit et fut admis au barreau en 1849. Durant ses études de droit, il assista à des conférences de Hamilton sur les quaternions. Il fit ainsi la connaissance de Salmon et de Sylvester, qui pratiquaient également le droit. Cayley exerça le métier d'avocat durant 14 ans, sans jamais négliger ses recherches en mathématiques. Il publia environ 250 mémoires. Il effectua un retour à Cambridge en 1863, où il occupa un poste d'enseignant en mathématiques pures jusqu'en 1895. Ce changement entraîna une importante diminution de rémunération, mais Cayley fut heureux d'avoir la chance de se consacrer entièrement aux mathématiques. Durant cette période, il publia plus de 900 articles sur la plupart des sujets mathématiques. Ses principales contributions portent sur l'algèbre des matrices, la géométrie non euclidienne et les géométries à n dimensions. En 1854, il rédigea deux articles donnant un aperçu intéressant sur la théorie des groupes. Le sujet était nouveau et les seuls groupes connus étaient des groupes de permutations. Cayley définit les groupes abstraits et en dressa une table de multiplication. Il constata que les quaternions et les matrices forment des groupes. C'est dans un mémoire publié en français en 1855, intitulé *Remarques sur la notation des fonctions algébriques,* qu'il introduisit les notions de base de l'algèbre des matrices. Cependant, c'est dans un article paru en 1858, *Memoir on the Theory of Matrices,* qu'il définit la somme de deux matrices, la multiplication d'une matrice par un scalaire et la multiplication de deux matrices. Il énonça également les propriétés de ces opérations.

9.4 EXERCICES

1. Effectuer les opérations suivantes, si elles sont définies.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -14 & -6 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -31 & -17 & 22 \\ 6 & 3 & -4 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Est-ce que $A \bullet B = B \bullet A$?

3 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Dire lesquelles des opérations suivantes sont définies et effectuer celles qui le sont.

a) $A \bullet B$

b) $A^t \bullet B$

c) $B \bullet C$

d) $A \bullet C$

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Construire une matrice non nulle $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, est-ce que $A \bullet B = B \bullet A = 0$?

5. Illustrer à l'aide des matrices A et B la non-commutativité du produit matriciel.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) Existe-t-il des matrices A et B telles que $A \bullet B = B \bullet A$? Justifier la réponse.

6. Vérifier si les matrices A et B possèdent les propriétés suivantes de la transposition $(A + B)^t = A^t + B^t$ et $(A \bullet B)^t = B^t \bullet A^t$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

7. Une usine de meubles non peints fabrique des bureaux, des chaises et des tables. Le temps, en heures, que met chaque atelier pour fabriquer ces meubles est donné dans le tableau suivant.

Atelier	Bureau	Chaise	Table
Sciage	3	2	3
Assemblage	2	1	2
Sablage	2	1	1

a) La compagnie a reçu des commandes pour 25 bureaux, 32 chaises et 16 tables. Déterminer le temps requis par chaque atelier pour produire les meubles commandés.

b) Sachant que le salaire des travailleurs de l'atelier de sciage est de 18,75 \$/h, alors que les assembleurs gagnent 14,53 \$/h et les sableurs 16,25 \$/h, déterminer les coûts de main-d'œuvre des meubles commandés.

c) Déterminer les coûts de main-d'œuvre unitaires pour chaque type de meubles.

8. Une usine de meubles fabrique trois modèles de bureaux, soit M_1, M_2 et M_3. La fabrication des divers modèles nécessite des quantités différentes de bois, de contreplaqué et de panneaux d'aggloméré, comme l'indique le tableau suivant. La quantité de bois est en unités de longueur, alors que celles de contreplaqué et d'aggloméré sont en unités de superficie.

Matériau	Modèle		
	M_1	M_2	M_3
Bois	9	12	11
Contreplaqué	1,2	2	1,6
Aggloméré	1,2	0,8	1,4

a) L'usine a des commandes pour 50 bureaux du modèle M_1, 65 bureaux du modèle M_2 et 52 bureaux du modèle M_3. Quelles quantités de matériaux doit-elle acheter pour réaliser ces commandes?

b) Le temps de production des bureaux (en minutes) est donné dans le tableau suivant, pour chaque atelier. Déterminer le temps requis par chaque atelier pour réaliser les commandes.

Atelier	Modèle		
	M_1	M_2	M_3
Sciage	60	70	65
Assemblage	35	40	45
Sablage	40	55	70

9. Montrer que les matrices suivantes sont idempotentes.

a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

10. Montrer que les matrices suivantes sont nilpotentes et donner leur indice de nilpotence.

a) $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a & 5a & -2a \\ a & 2a & -a \\ 3a & 6a & -3a \end{pmatrix}$

c) Si A est une matrice nilpotente d'indice 3, est-ce que la matrice aA est nilpotente? Si oui, les matrices A et aA ont-elles le même indice de nilpotence pour tout scalaire a ?

d) Montrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice 3, alors la matrice aA est également une matrice nilpotente d'indice 3 quel que soit le scalaire a.

e) Montrer que, si A est une matrice nilpotente d'indice n, alors la matrice aA est également une matrice nilpotente d'indice n quel que soit le scalaire a.

11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A \bullet A^t$ et $A^t \bullet A$.

b) Qu'est-ce qui caractérise $A \bullet A^t$ et $A^t \bullet A$ quelle que soit la matrice A ?

c) Démontrer la propriété des matrices énoncée en b).

12. Pourquoi la formule $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, vérifiée pour les nombres réels, n'est-elle pas valable pour les matrices carrées d'ordre n ?

13. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, A^3 et A^4. Que suggèrent ces calculs ?

14. Soit A, une matrice idempotente. Montrer que A^t est également une matrice idempotente.

15. Soit A, une matrice nilpotente d'indice 2. Montrer que A^t est également une matrice nilpotente d'indice 2.

16. Soit A, une matrice nilpotente d'indice 3. Montrer que A^t est également une matrice nilpotente d'indice 3.

Pour les exercices qui suivent, nous suggérons fortement le recours au logiciel Excel

17. Une petite entreprise emploie deux marchands ambulants qui vendent des jus dans les parcs de la municipalité pendant les fins de semaine. Les activités s'étendent de la mi-juin au début septembre. Le tableau suivant indique le nombre de bouteilles vendues durant la première fin de semaine d'exploitation.

PARC BEAUSÉJOUR

Jour	Jus		
	Orange	Raisin	Pomme
Vendredi	32	46	42
Samedi	43	72	56
Dimanche	46	64	60

PARC DE LA RIVIÈRE

Jour	Jus		
	Orange	Raisin	Pomme
Vendredi	34	64	54
Samedi	48	78	66
Dimanche	40	72	63

Le tableau suivant donne les prix de vente et les coûts unitaires de ces jus.

Jus	Prix	Coût
Orange	1,00	0,40
Raisin	1,40	0,60
Pomme	1,20	0,50

a) Construire la matrice des ventes au parc Beauséjour et la matrice des ventes au parc de la Rivière.

b) En effectuant une opération matricielle, déterminer, pour chaque journée et chaque sorte de jus, les ventes dans les deux parcs.

c) Effectuer la multiplication suivante et dire quelle information elle permet d'obtenir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 66 & 110 & 96 \\ 91 & 150 & 122 \\ 86 & 136 & 123 \end{pmatrix}$$

d) Effectuer la multiplication suivante et dire quelle information elle permet d'obtenir.

$$\begin{pmatrix} 66 & 110 & 96 \\ 91 & 150 & 122 \\ 86 & 136 & 123 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) Effectuer la multiplication suivante et dire quelle information elle permet d'obtenir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 272 \\ 363 \\ 345 \end{pmatrix}$$

f) Construire la matrice des prix unitaires et la matrice des coûts unitaires.

g) Construire la matrice donnant à la fois les prix unitaires, les coûts unitaires et les profits unitaires.

h) Effectuer la multiplication suivante et dire quelle information elle permet d'obtenir.

$$\begin{pmatrix} 66 & 110 & 96 \\ 91 & 150 & 122 \\ 86 & 136 & 123 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}40 & 0{,}60 \\ 1{,}40 & 0{,}60 & 0{,}80 \\ 1{,}20 & 0{,}50 & 0{,}70 \end{pmatrix}$$

i) En effectuant une opération matricielle, déterminer les revenus, les coûts et les profits totaux de la fin de semaine.

j) Pour la deuxième fin de semaine d'exploitation, l'entreprise prévoit une augmentation de 50 % de l'achalandage dans les parcs municipaux. En effectuant une opération matricielle, déterminer le nombre de bouteilles de jus de chaque sorte qui devraient être vendues chaque jour de la fin de semaine. Arrondir à l'entier supérieur.

Dans les exercices suivants, arrondir à la cent près.

k) Le grossiste qui fournit les jus à l'entreprise décide de majorer ses prix et les marchands en profitent pour réclamer une hausse de salaire. L'effet combiné de ces hausses entraîne une majoration de 15 % des coûts unitaires. En effectuant une opération matricielle, déterminer la nouvelle matrice des coûts unitaires.

l) Le propriétaire de l'entreprise en profite pour majorer ses prix de vente unitaires de 20 %. En effectuant une opération matricielle, déterminer la nouvelle matrice des prix unitaires.

m) Utiliser les résultats de k et l pour construire la matrice donnant les prix de vente unitaires, les coûts unitaires et les profits unitaires.

n) En supposant que les prévisions de ventes obtenues en j se réalisent, déterminer, par une opération matricielle, les revenus, les coûts et les profits pour chacune des journées de la fin de semaine.

o) En effectuant une opération matricielle, déterminer les revenus, les coûts et les profits totaux de la fin de semaine, si les prévisions de vente se réalisent.

18. Vous venez d'ouvrir un comptoir de restauration naturelle dans un centre d'achats. Votre menu est constitué de trois sortes de salades: salade du jardin, salade au tofu et salade du chef. Lorsque vous préparez la facture d'un client, le système de facturation électronique enregistre automatiquement la sorte de salade vendue. Le système donne le rapport hebdomadaire des ventes sous forme d'une matrice dont les lignes représentent les six jours d'ouverture de la semaine. La première colonne de ces matrices représente les ventes de salade du jardin, la deuxième les ventes de salade au tofu et la troisième les ventes de salade du chef. Pour les deux dernières semaines d'opération, les matrices sont les suivantes.

$$\begin{pmatrix} 254 & 128 & 302 \\ 435 & 134 & 287 \\ 367 & 127 & 345 \\ 289 & 98 & 439 \\ 378 & 67 & 397 \\ 456 & 46 & 542 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 276 & 112 & 343 \\ 397 & 86 & 376 \\ 417 & 69 & 326 \\ 347 & 76 & 418 \\ 356 & 58 & 403 \\ 412 & 32 & 564 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une matrice donnant les ventes totales de chaque sorte de salade pour chaque jour de la semaine depuis l'ouverture.

b) La salade du jardin est à 5,65 $, celle au tofu à 4,95 $ et celle du chef à 6,25 $. Calculer le revenu par jour pour chacune des deux semaines.

c) Calculer le revenu moyen pour chaque jour de la semaine depuis l'ouverture. Quelle journée de la semaine génère le meilleur revenu ?

d) Les coûts de préparation sont de 2,25 $ pour la salade du jardin, 1,75 $ pour la salade au tofu et 3,15 $ pour la salade du chef. À l'aide du produit matriciel, déterminer, pour chacune des semaines écoulées, la matrice des coûts de préparation.

e) Les frais d'opérations sont de 350 $ par jour les lundis, mardis, mercredis et samedis. Ces frais incluent la location de l'emplacement, les frais d'électricité et de chauffage, le salaire du serveur et le salaire du chef. Les jeudis et vendredis, le comptoir est ouvert quatre heures de plus et les frais sont de 450 $ par jour. Déterminer, pour chacune des semaines écoulées, une matrice donnant le coût total (coût d'opération et préparation des salades) pour chaque jour de la semaine.

f) Donner, sous forme de matrice, le coût d'opération moyen pour chaque jour de la semaine de ces deux premières semaines d'opération.

g) Donner, sous forme de matrice, le profit moyen pour chaque jour de la semaine depuis l'ouverture.

19. Un marchand de fruits se procure chaque semaine des pommes, des poires, des oranges et des clémentines pour ses trois points de vente P_1, P_2 et P_3. Les quantités de caisses achetées hebdomadairement sont notées dans le tableau suivant.

Nombre de caisses par point de vente

	Pomme	Poire	Orange	Clémentine
P_1	4	5	2	6
P_2	2	4	3	7
P_3	3	3	4	5

Le prix des fruits varie d'une semaine à l'autre pour diverses raisons. Pour les quatre semaines du mois qui vient de se terminer, les prix sont les suivants.

Prix par caisse et par semaine

	S_1	S_2	S_3	S_4
Pomme	12	15	15	14
Poire	13	14	16	18
Orange	15	18	19	16
Clémentine	17	16	15	14

a) Par une opération matricielle, déterminer le coût d'acquisition des caisses de fruits pour chacun des points de vente et chacune des quatre semaines.

b) Pour couvrir ses frais d'opération et ses pertes et dégager un profit, le marchand détermine le prix des fruits à l'unité de telle sorte que son revenu soit le prix d'acquisition majoré de 260%. Par une opération matricielle, déterminer la matrice des revenus par caisse pour chacune des quatre semaines.

c) Par une opération matricielle, déterminer le revenu du marchand pour chacune des quatre semaines d'opération.

d) Par une opération matricielle, déterminer le coût d'acquisition des fruits en chacun des points de vente durant les quatre semaines.

e) Par une opération matricielle, déterminer le revenu en chacun des points de vente durant les quatre semaines.

f) Les frais hebdomadaires, incluant les pertes et les salaires, sont de 400 $ en P_1, de 350 $ en P_2 et de 325$ en P_3. Par une opération matricielle, déterminer le profit réalisé en chacun des points de vente durant les quatre semaines.

g) Par une opération matricielle, déterminer le revenu total durant les quatre semaines.

h) Par une opération matricielle, déterminer le profit total durant les quatre semaines.