Jean Bernoulli

1667-1748

Jean Bernoulli a été initié au calcul différentiel par son frère Jacques. Lors d'un voyage en France, il fait la connaissance du marquis de l'Hospital à qui il enseigne le calcul différentiel.

Jean Bernoulli

Jean Bernoulli, né à Bâle en 1667, est le dixième enfant de Nicolas. Son père souhaite qu'il reprenne le commerce familial d'épices. Il travaille dans l'entreprise durant un an, mais ce travail ne l'intéresse pas et il est bientôt évident qu'il ne pourra gérer correctement l'entreprise. Son père accepte alors de la laisser entreprendre des études de médecine à l'université de Bâle. Son frère aîné Jacques vient d'y obtenir une chaire, et, ensemble, ils étudient les travaux de Leibniz qui vient d'inventer le calcul infinitésimal. Cette collaboration entre les deux frères est très profitable au début, mais ils deviennent vite des rivaux. Jamais ils ne publieront ensemble, ils se lanceront des défis par revues interposées, et revendiqueront la paternité des mêmes résultats.

Leur rivalité est sans doute exacerbée par le fait que Jacques occupe la chaire de mathématiques à Bâle, poste que Jean ne peut donc obtenir. Jean part à Paris en 1690, où il rencontre Nicolas Malebranche (1638-1715) et il enseigne le calcul infinitésimal au marquis Guillaume François de l'Hospital (1661-1704) qui le rétribue généreusement pour ses leçons. De retour à Bâle, Jean continue à lui dispenser des cours par correspondances. Le marquis publie sous son nom le premier livre de calcul différentiel qui suit pour l'essentiel les idées de Jean Bernoulli en apportant des précisions et des corrections.

Dans son introduction, de l'Hospital écrit: « Je reconnais devoir beaucoup aux lumières de MM. Bernoulli, surtout à celles du jeune qui enseigne à Groningue. » Dans ce traité, on trouve la règle dite « de L'Hospital » pour trouver la limite d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur tendent simultanément vers zéro.

C'est en 1695 que Jean Bernoulli s'installe à Groningue[2], une ville du nord des Pays-Bas, où il enseigne pendant dix ans. Ce sont dix années un peu difficiles sur le plan personnel, sa femme souffre de vivre loin de sa famille et il tombe malade au point qu'il est même un temps donné pour mort. De plus, son protestantisme l'implique dans de nombreuses querelles religieuses. En 1705, à la mort de son frère Jacques, il retourne à Bâle pour lui succéder, Leonhard Euler sera un des ses élèves.

Jean Bernoulli fut l'un des meilleurs propagandistes du calcul infinitésimal. Impliqué dans la querelle Newton/Leibniz, il prend partie pour ce dernier. Il utilise ses connaissances pour jeter les premières bases du calcul des variations, et résout par exemple le problème de la caténaire et de la brachistochrone.

1. Une copie des cours par correspondance de Jean Bernoulli réalisée par son neveu NicolasI a été découverte à Bâle en 1922. Ces écrits ont alors été publiés pour la première fois.
2. Groningen en néerlandais.

Fonction $y = x^x$

Un article de Jean Bernoulli publié en 1687 débute par l'énoncé :

La différentielle d'un logarithme, quelle que soit son expression est égal à la différentielle de l'expression divisée par l'expression.

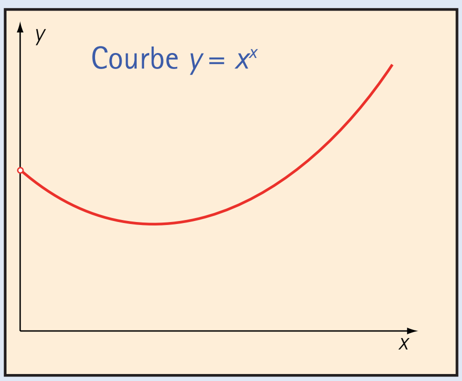
Ainsi, dans la notation qu'il utilise,

$$d[\ln(x)] = \frac{dx}{x}$$

Pour une expression logarithmique plus complexe, la même procédure s'applique. Ainsi :

$$\begin{aligned} d[\ln\sqrt{4x+y^2}\,] &= \frac{1}{2}d[\ln(4x+y^2)] \\ &= \frac{1}{2}\frac{4dx+2ydy}{4x+y^2} \\ &= \frac{2dx+ydy}{4x+y^2} \end{aligned}$$

Il annonce alors qu'avec cette découverte, il va enrichir le calcul infinitésimal de résultats inconnus jusqu'alors. Le plus intéressant de ces résultats concerne l'étude de la courbe $y = x^x$.



Jean Bernoulli cherche à déterminer la sous-tangente à partir d'un point F quelconque sur la courbe.

Il prend d'abord le logarithme des deux membres de l'équation :

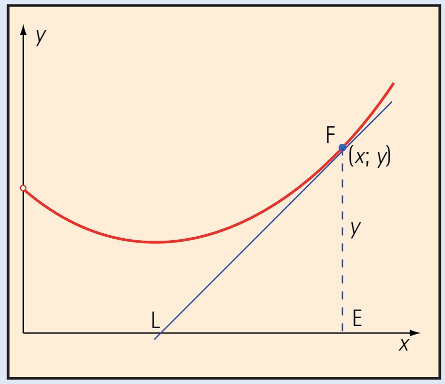
$$\ln y = \ln(x^x) = x \ln x.$$

Il applique alors sa règle de dérivation pour obtenir la différentielle, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= x\frac{dx}{x} + \ln x\ dx \\ &= dx + \ln x\ dx \\ &= dx(1+\ln x) \end{aligned}$$

Algébriquement, la pente de la tangente est alors :

$$\frac{dy}{dx} = y(1+\ln x)$$



Géométriquement, cette pente est

$$\frac{y}{\overline{\text{LE}}}$$

Il obtient donc

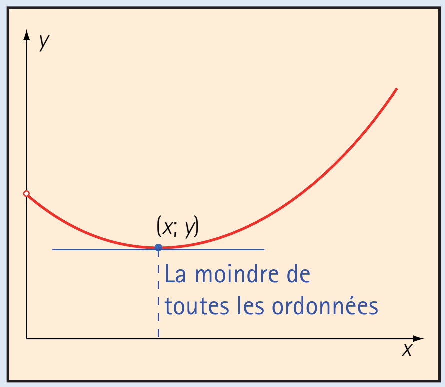
$$\frac{y}{\overline{\text{LE}}} = y(1+\ln x)$$

En isolant $\overline{\text{LE}}$, il obtient la description de la sous-tangente en fonction de l'ordonnée du point F.

$$\overline{\text{LE}} = \frac{y}{y(1+\ln x)} = \frac{1}{1+\ln x}$$

Jean Bernoulli cherche alors à déterminer « la moindre de toutes les ordonnées » ou, en termes modernes, la valeur minimale de la fonction. Cette valeur est atteinte lorsque la tangente est horizontale ou de façon équivalente lorsque la sous-tangente est infinie, ce qui se produit lorsque le dénominateur de la sous-tangente s'annule. Il lui faut résoudre l'équation logarithmique

$$1 + \ln x = 0$$



et calculer l'ordonnée correspondante. Il doit alors se plonger dans une démarche géométrique assez complexe car la fonction exponentielle $y = e^x$ n'a pas encore été définie, elle le sera quelques décennies plus tard.

Pour nous, c'est assez simple,

$$\ln x = -1, \text{ d'où } x = e^{-1}$$

L'ordonnée est alors

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} = 0{,}692\ 200\ 627\ \ldots$$