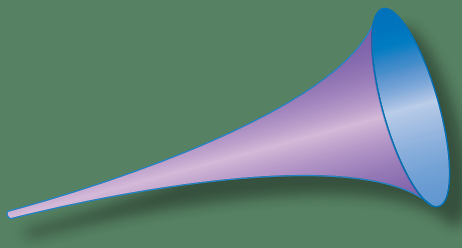
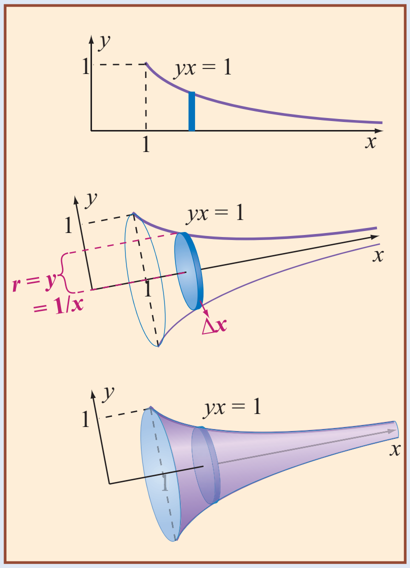


La trompette de Gabriel est obtenue par la rotation d'une branche d'hyperbole autour de son asymptote. Evagelista Torricelli en a calculé le volume par la méthode des indivisibles.

Nous présentons dans ce texte les méthodes modernes à l'aide du calcul intégral pour calculer son volume et son volume et l'aire de sa surface.

La trompette de Gabriel



Volume de la trompette

On peut calculer le volume de la trompette de Gabriel en appliquant la méthode des disques ou la méthode des tubes.

Méthode des disques

Considérons une bande rectangulaire perpendiculaire à l'axe des x, la rotation de cette bande rectangulaire donne un disque plein dont l'épaisseur est Δx_i. Le rayon du disque n'est pas constant. Il dépend de sa position (abscisse) dans le solide. Or, pour une abscisse x_i, le rayon du disque est égal à la valeur de y_i, d'où $r = y_i = 1/x_i$. L'aire du disque est alors décrite en fonction de sa position dans le solide par :

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{x_i}\right)^2 = \frac{\pi}{x_i^2}.$$

Le volume du représentant des disques est donc :

$$\Delta V_i = \frac{\pi}{x_i^2} x_i.$$

La somme des volumes des disques est une somme de Riemann et la limite de cette somme est l'intégrale définie sur l'intervalle $[1; \infty[$. On a donc :

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{x_i^2} \Delta x_i = \int_1^{\infty} \frac{\pi}{x^2}\, dx.$$

Il nous faut effectuer une intégrale impropre de type 1 puisque l'intervalle d'intégration est $[1; \infty[$. On obtient :

$$V = \int_1^{\infty} \frac{\pi}{x^2}\, dx = \pi \int_1^{\infty} x^{-2} dx$$

$$= \lim_{d\to\infty} \pi \int_1^{d} x^{-2} dx = \lim_{d\to\infty} \pi \left[\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)\right]_1^d$$

$$= \lim_{d\to\infty} \pi \left[\left(\frac{-1}{x}\right)\right]_1^d$$

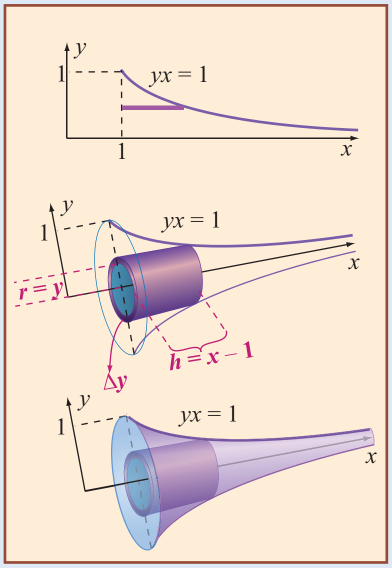
$$= \lim_{d\to\infty} \pi \left[\left(\frac{-1}{d}\right) - \left(\frac{-1}{1}\right)\right]$$

$$= \lim_{d\to\infty} \pi \left[1 - \frac{1}{d}\right] = \pi.$$

Le volume de la trompette de Gabriel est donc $V = \pi$ unités cubes.

Méthode des tubes

Pour calculer le volume de la trompette par la méthode des tubes, on considère une bande rectangulaire parallèle à l'axe des x, la rotation de cette bande rectangulaire donne un tube dont le rayon est y_i, et l'épaisseur est Δx_i.



La hauteur du tube est :

$$h_i = x_i - 1 = \frac{1}{y_i} - 1.$$

Le volume du représentant des tubes est :

$$V = \lim_{\max\Delta y_i \to 0} 2\pi y_i\left(\frac{1}{y_i} - 1\right)\Delta y_i.$$

La somme des volumes des tubes est une somme de Riemann et la limite de cette somme est l'intégrale définie sur l'intervalle [0; 1]. On a donc :

$$V = \lim_{\max\ y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i\left(\frac{1}{y_i} - 1\right)\ y_i$$

$$= 2\pi\int_0^1 (1-y)\,dy = 2\pi\left(y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg]_0^1$$

$$= 2\pi\left[\left(1-\frac{1}{2}\right) - \left(0 - \frac{0}{2}\right)\right] = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi.$$

Il est à noter qu'en appliquant la méthode des tubes, nous n'avons pas à effectuer une intégrale impropre car l'ntégrande, $(1 - y)$ n'a pas de discontinuité dans l'intervalle [0; 1].

Aire de la surface

L'aire de la surface de la trompette est :

$$A = 2\pi\int_1^{\infty} f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_1^{\infty} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Il s'agit d'une intégrale impropre. Déterminons d'abord l'intégrale indéfinie, nous évaluerons par la suite l'intégrale impropre.

Pour déterminer l'intégrande, il faut connaître la dérivée de la fonction :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)$$

$$= -1 \times x^{-2} = \frac{-1}{x^2}.$$

On donc effectuer l'intégrale :

$$2\pi\int y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{x^2}\right)}dx$$

$$= 2\pi\int \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$$

$$= 2\pi\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}dx$$

$$= 2\pi\int \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx.$$

Puisque l'intégrande comporte la racine d'une somme de carrés, il faut effectuer une substitution trigonométrique. Construisons un triangle rectangle dont le côté opposé à l'angle θ est x^2 et le côté adjacent est 1. L'hypoténuse est alors $\sqrt{x^4}+1$. On a donc :

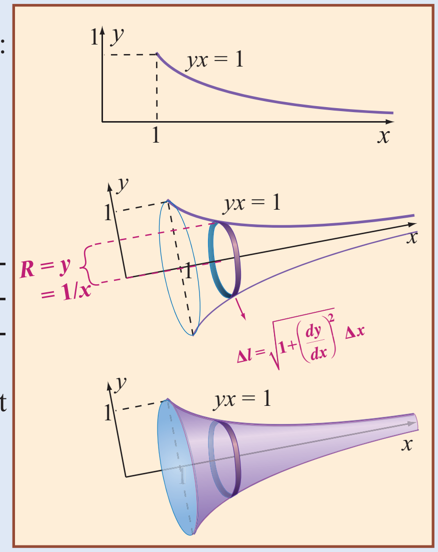
$$\sec\theta = \sqrt{x^4+1} \text{ et } \tan\theta = x^2.$$

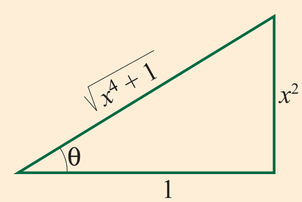
En dérivant implicitement la relation de la tangente, on obtient :

$$\sec^2\theta d\theta = 2xdx, \text{ d'où :}$$

$$dx = \frac{\sec^2\theta d\theta}{2x} = \frac{\sec^2\theta d\theta}{2\sqrt{\tan\theta}}.$$

En substituant ces expressions trigonométriques dans l'intégrale à effectuer, on obtient :



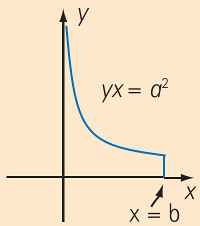


$$\sec\theta = \sqrt{x^4+1}$$

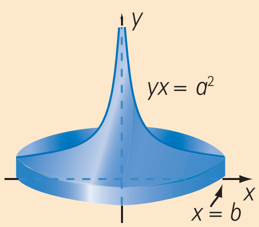
$$\tan\theta = x^2$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$$

Courbe plane



Solide de révolution



On procède de façon analogue pour un solide obtenu par révolution autour de l'axe vertical.

$$2\pi\int\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx=2\pi\int\frac{\sec\theta}{\tan\theta\sqrt{\tan\theta}}\,\frac{\sec^2\theta}{2\sqrt{\tan\theta}}d\theta$$
$$=2\pi\int\frac{\sec^2\theta\sec\theta}{2\tan^2\theta}d\theta$$
$$=\pi\int\frac{(\tan^2\theta+1)\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$
$$=\pi\int\frac{\tan^2\theta\sec\theta+\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$
$$=\pi\int\left(\sec\theta+\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\right)d\theta$$
$$=\pi\int\sec\theta d\theta+\pi\int\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta.$$

La première intégrale de cette somme fait partie de la banque d'intégrales élémentaires, soit :

$$\int\sec\theta\,d\theta=\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+k\,.$$

On doit modifier l'intégrande de la seconde à l'aide d'identités trigonométriques. En effet :

$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}=\frac{1/\cos\theta}{\sin^2\theta/\cos^2\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Par conséquent :

$$\int\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta.$$

Pour effectuer cette intégrale, on procède par changement de variable en posant $u = \sin^2\theta$, d'où $du = \cos\theta\ d\theta$. On a alors :

$$\int\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$
$$=\int\frac{1}{u^2}du=\int u^{-2}du$$
$$=\frac{-1}{u}=\frac{-1}{\sin\theta}.$$

Par conséquent :

$$2\pi\int\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx$$
$$=\pi\int\sec\theta d\theta+\pi\int\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta$$
$$=\pi\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|-\frac{\pi}{\sin\theta}+k$$
$$=\pi\left(\ln\left|\sqrt{x^4+1}+x^2\right|-\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\right)+k.$$

L'encadré ci-dessous indique comment compléter le calcul.

Évaluation de l'intégrale

Pour déterminer l'aire de la surface de la trompette, on doit donc évaluer une intégrale impropre, soit :

$$\pi\lim_{d\to\infty}\left[\left(\ln\left|\sqrt{x^4+1}+x^2\right|-\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}\right)\right]_1^d$$
$$=\pi\left[\lim_{d\to\infty}\left(\ln\left|\sqrt{d^4+1}+d^2\right|-\frac{\sqrt{d^4+1}}{d^2}\right)-\left(\ln\left|\sqrt{1^4+1}+1^2\right|-\frac{\sqrt{1^4+1}}{1^2}\right)\right]$$
$$=\pi\left[\lim_{d\to\infty}\left(\ln\left|\sqrt{d^4+1}+d^2\right|-\frac{\sqrt{d^4+1}}{d^2}\right)-\left(\ln\left|\sqrt{2}+1\right|-\sqrt{2}\right)\right].$$

Il reste à évaluer

$$\lim_{d\to\infty}\left(\ln\left|\sqrt{d^4+1}+d^2\right|-\frac{\sqrt{d^4+1}}{d^2}\right)$$

qui est de la forme $\infty-\infty$. On ne peut simplifier,

Appelons Maple à la rescousse pour tracer le graphique et évaluer la limite de cette expression :

```
>f:=x->ln((x^4+1)^(1/2)+x^2)-(x^4+1)^(1/2)/x^2;
>plot({f(x)},x=1..infinity, thickness=3);
>Limit(f(x),x=infinity)=limit(f(x),x=infinity);
```

Le graphique est reproduit ci-contre et Maple donne l'infini comme limite.